произвольные постоянные которых могут быть определены через начальные значения

$$x_i'^0,\ y_i'^0,\ z_i'^0,\ \dot{x}_i'^0,\ \dot{y}_i'^0,\ \dot{z}_i'^0$$

координат Якоби и их первых производных.

Уравнения (7.35) можно также рассматривать как дифференциальные уравнения абсолютного движения системы n «фиктивных» материальных точек M_i', обладающих массами m_i', в поле сил, определяемом силовой функцией U, зависящей только от координат x_i', y_i', z_i' этих точек.

Тогда интегралы площадей и интеграл живых сил можно написать сразу, основываясь на свойствах силовой функции, зависящей только от взаимных расстояний между точками и остающейся поэтому инвариантной при преобразовании координат.

Заметим еще, что интеграл живых сил следует также из уравнений (7.28) в силу свойств уравнений Лагранжа.

§ 5. Другие виды дифференциальных уравнений движения задачи многих тел

1. Прямоугольные декартовские координаты (абсолютные или относительные) в ряде случаев оказываются по тем или иным причинам неудобными для применения в некоторых конкретных задачах небесной механики и тогда их заменяют какими-либо другими, более подходящими переменными.

Рассмотрим сначала простейшую, не прямолинейную систему, а именно, систему цилиндрических координат.

Если желательно преобразовать к этой системе координат абсолютные уравнения движения (7.1), или (7.1′), то нужно положить:

$$\xi_i=\rho_i\cos\lambda_i,\quad \eta_i=\rho_i\sin\lambda_i,\quad \zeta_i=\zeta_i, \tag{7.38}$$

где ρ_i есть проекция радиуса-вектора r_i точки M_i на плоскость $O\xi\eta$, а λ_i — угол, образуемый этой проекцией с положительным направлением оси абсцисс (долгота) *).

Тогда (см. § 3 гл. VI) уравнения движения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\rho}_i-\rho_i\dot{\lambda}_i^2&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial\rho_i},\\ \frac{d}{dt}(\rho_i^2\dot{\lambda}_i)&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial\lambda_i},\\ \ddot{\zeta}_i&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}.\end{aligned}\right\} \tag{7.38′}$$

*) В системе координат (7.38) за основную плоскость взята плоскость $O\xi\eta$ и за основное направление — ось абсцисс. Ясно, что такой выбор не является обязательным и за основную плоскость можно взять любую координатную плоскость.

Силовая функция U, входящая в эти уравнения, определяется той же формулой (7.4′), но взаимные расстояния Δ_{ij} должны быть выражены через новые переменные (7.38). Таким образом,

$$\Delta_{ij}^2 = \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + (\zeta_i - \zeta_j)^2,$$

а правые части уравнений (7.38′), т. е. выражения для частных производных от силовой функции по цилиндрическим координатам, найдутся по формулам, приведенным в § 4 гл. I.

Уравнения (7.38′) имеют, разумеется, те же классические интегралы, как и уравнения (7.1), но эти интегралы нужно преобразовать к новым переменным при помощи формул (7.38).

Например, интеграл живой силы напишется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\dot\rho_i^2 + \rho_i^2\dot\lambda_i^2 + \dot\zeta_i^2) = U + h.$$

Выражения для других интегралов не представляют большого интереса и мы их выписывать не будем. Можно преобразовать к цилиндрическим координатам и уравнения в барицентрических координатах (7.22).

Полагая

$$\xi_i' = \rho_i' \cos\lambda_i', \quad \eta_i' = \rho_i' \sin\lambda_i', \quad \zeta_i' = \zeta_i',$$

мы будем иметь вместо уравнений (7.22) следующие:

$$\ddot\rho_i'^2 - \rho_i'\dot\lambda_i'^2 = \mathrm{P}_i', \quad \frac{d}{dt}(\rho_i'^2\dot\lambda_i') = \Lambda_i', \quad \ddot\zeta_i' = \mathrm{Z}_i',$$

где, как легко проверить,

$$\mathrm{P}_i' = -f\,\frac{(m_0 + m_i)\rho_i' + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j\rho_j' \cos(\lambda_i' - \lambda_j')}{\Delta_{i0}^3} + \\ + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{\rho_j'\cos(\lambda_i' - \lambda_j') - \rho_i'}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\Lambda_i' = \frac{f}{\Delta_{i0}^3}\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\rho_j' \sin(\lambda_i' - \lambda_j') - f\sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j\rho_j' \sin(\lambda_i' - \lambda_j')}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\mathrm{Z}_i' = -f\,\frac{(m_0 + m_i)\zeta_i' + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j\zeta_j'}{\Delta_{i0}^3} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{\zeta_i' - \zeta_j'}{\Delta_{ij}^3},$$

причем взаимные расстояния определяются формулами

$$\Delta_{i0}^2=\left[\left(1+\frac{m_i}{m_0}\right)\rho_i'\cos\lambda_i'+\sum_{j=1}^{n}{}'\frac{m_j}{m_0}\rho_j'\cos\lambda_j'\right]^2+$$
$$+\left[\left(1+\frac{m_i}{m_0}\right)\rho_i'\sin\lambda_i'+\sum_{j=1}^{n}{}'\frac{m_j}{m_0}\rho_j'\sin\lambda_j'\right]^2+$$
$$+\left[\left(1+\frac{m_i}{m_0}\right)\zeta_i'+\sum_{j=1}^{n}{}'m_j\zeta_j'\right]^2$$

и

$$\Delta_{ij}^2=\rho_i'^2+\rho_j'^2-2\rho_i'\rho_j'\cos(\lambda_i'-\lambda_j')+(\zeta_i'-\zeta_j')^2$$
$$(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j\neq i).$$

Четыре первых интеграла этих уравнений получатся из интегралов уравнений (7.22) простым преобразованием к новым переменным. Эти довольно громоздкие выражения мы приводить здесь не будем.

Рассмотрим теперь преобразование уравнений относительного движения (7.24) или (7.24′) к цилиндрическим кооординатам.

Положим предварительно

$$\Omega_i=\frac{f(m_0+m_i)}{r_i}+R_i\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда уравнения (7.24′) напишутся в виде

$$\ddot{x}_i=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i},\quad \ddot{y}_i=\frac{\partial\Omega_i}{\partial y_i},\quad \ddot{z}_i=\frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i}.\tag{7.39}$$

Переходя теперь к цилиндрическим координатам по формулам *)

$$x_i=\rho_i\cos\lambda_i,\quad y_i=\rho_i\sin\lambda_i,\quad z_i=z_i,\tag{7.39′}$$

мы получим следующие уравнения:

$$\ddot{\rho}_i-\rho_i\dot{\lambda}_i^2=\frac{\partial\Omega_i}{\partial\rho_i},\quad \frac{d}{dt}\left(\rho_i^2\dot{\lambda}_i\right)=\frac{\partial\Omega_i}{\partial\lambda_i},\quad \ddot{z}_i=\frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i},\tag{7.39″}$$

где функции Ω_i определяются формулами

$$\Omega_i=\frac{f(m_0+m_i)}{\sqrt{\rho_i^2+z_i^2}}+f\sum_{j=1}^{n}{}'m_j\left[\frac{1}{\Delta_{ij}}-\frac{\rho_i\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)+z_iz_j}{(\rho_j^2+z_j^2)^{3/2}}\right],$$

*) Здесь ρ_i обозначает проекцию радиуса-вектора $r_i=\overline{M_0M_i}$ точки M_0 на плоскость xy, а λ_i — угол, образуемый этой проекцией с положительным направлением оси $\overrightarrow{M_0x}$,

причем

$$\Delta_{ij}^2=\rho_i^2+\rho_j^2-2\rho_i\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)+(z_i-z_j)^2.$$

Составляя частные производные от Ω_i, мы найдем

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial\rho_i}=-\frac{f(m_0+m_i)\rho_i}{(\rho_i^2+z_i^2)^{3/2}}+$$
$$+f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left[\frac{\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)-\rho_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)}{(\rho_j^2+z_j^2)^{3/2}}\right],$$

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial\lambda_i}=-f\rho_i\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\rho_j\left[\frac{1}{\Delta_{ij}^3}-\frac{1}{(\rho_j^2+z_j^2)^{3/2}}\right]\sin(\lambda_i-\lambda_j),$$

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i}=-\frac{f(m_0+m_i)z_i}{(\rho_i^2+z_i^2)^{3/2}}+f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left[\frac{z_j-z_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{z_j}{(\rho_i^2+z_i^2)^{3/2}}\right].$$

Первые интегралы уравнений (7.39″), получаемые преобразованием интегралов (7.27) и (7.27′) при помощи формул (7.39′), мы также приводить здесь не будем.

Дифференциальные уравнения в координатах Якоби, конечно, тоже можно преобразовать к цилиндрическим координатам, вводя для каждой из точек M_i свою систему цилиндрических координат, связанную с собственной прямоугольной системой $G_{i-1}x_i'y_i'z_i'$.

Так как уравнения (7.35) имеют совершенно такой же вид, как и уравнения (7.1′), то и преобразованные к цилиндрическим координатам уравнения будут иметь такой же вид, как и уравнения (7.38′), только их правые части, написанные в раскрытом виде (т. е. после выполнения частных дифференцирований силовой функции U), будут значительно сложнее, чем правые части уравнений (7.38′), и мы их приводить не будем.

2. Рассмотрим теперь уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек в сферических координатах.

Преобразуем абсолютные координаты точек M_i при помощи формул

$$\xi_i=r_i\cos\varphi_i\cos\lambda_i,\quad \eta_i=r_i\cos\varphi_i\sin\lambda_i,\quad \zeta_i=r_i\sin\varphi_i \tag{7.40}$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $r_i=\overline{OM_i}$ есть радиус-вектор точки M_i; λ_i — так же как и в цилиндрической системе, — угол, образованный проекцией радиуса-вектора на плоскость $O\xi\eta$ с положительным направлением оси $O\xi$, и φ_i — угол, образованный радиусом-вектором с плоскостью $O\xi\eta$ (см. рис. 38).

Уравнения движения в полярных координатах напишутся по образцу уравнений (6.25′) § 3 гл. VI в виде

$$\left.\begin{aligned}\ddot{r}_i - r_i\dot{\varphi}_i^2 - r_i\dot{\lambda}_i^2\cos^2\varphi_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial r_i},\\ \frac{d}{dt}(r_i^2\dot{\varphi}_i) + r_i^2\dot{\lambda}_i^2\sin\varphi_i\cos\varphi_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \varphi_i},\\ \frac{d}{dt}(r_i^2\dot{\lambda}_i^2\cos^2\varphi_i) &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \lambda_i}\\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),&\end{aligned}\right\}\tag{7.40′}$$

Силовая функция сохраняет свой вид (7.4), но взаимные расстояния определятся по формулам

$$\Delta_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_ir_j\cos\gamma_{ij},$$

где

$$\cos\gamma_{ij} = \sin\varphi_i\sin\varphi_j + \cos\varphi_i\cos\varphi_j\cos(\lambda_i - \lambda_j),$$

так что γ_{ij} есть угол, образованный ридусами-векторами точек M_i и M_j.

Составляя выражения частных производных от U по сферическим координатам, мы будем иметь (см. § 4 гл. I)

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = -fm_i\sum_{j=0}^{n}{}' m_j\frac{r_i - r_j\cos\gamma_{ij}}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = -fm_ir_i\cos\varphi_i\sum_{j=0}^{n}{}' m_jr_j\cos\varphi_j\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = fm_ir_i\sum_{j=0}^{n}{}' m_jr_j\frac{\cos\varphi_i\sin\varphi_j - \sin\varphi_i\cos\varphi_j\cos(\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3}.$$

Преобразуя теперь уравнения движения относительно точки M_0, написанные в виде (7.39), к сферическим координатам по формулам, подобным (7.40),

$$x_i = r_i\cos\varphi_i\cos\lambda_i,\quad y_i = r_i\cos\varphi_i\sin\lambda_i,\quad z_i = r_i\sin\varphi_i \tag{7.41}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где r_i обозначают расстояния точек M_i от точки M_0, а λ_i и φ_i имеют значения, аналогичные предыдущим, мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{r}_i - r_i\dot{\varphi}_i^2 - r_i\dot{\lambda}_i\cos^2\varphi_i &= \frac{\partial\Omega_i}{\partial r_i},\\ \frac{d}{dt}(r_i^2\dot{\varphi}_i) + r_i^2\dot{\lambda}_i^2\sin\varphi_i\cos\varphi_i &= \frac{\partial\Omega_i}{\partial\varphi_i},\\ \frac{d}{dt}(r_i^2\dot{\lambda}_i\cos^2\varphi_i) &= \frac{\partial\Omega_i}{\partial\lambda_i},\end{aligned}\right\}\tag{7.41′}$$

где

$$\Omega_i = \frac{f(m_0+m_i)}{r_i} + f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i \cos \gamma_{ij}}{r_j^2} \right),$$

причем

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

а взаимные расстояния выражаются такими же формулами, как и для уравнений абсолютного движения.

Правые части уравнений (7.41′) выразятся следующими формулами:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial r_i} = -\frac{f(m_0+m_i)}{r_i^2} + f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left(\frac{r_j \cos \gamma_{ij} - r_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\cos \gamma_{ij}}{r_j^2} \right),$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i} = -f r_i \cos \varphi_i \sum_{j=1}^{n}{}' m_j r_j \cos \varphi_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right) \sin(\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \varphi_i} = f r_i \sum_{j=1}^{n}{}' m_j r_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right) [\cos \varphi_i \sin \varphi_j - \sin \varphi_i \cos \varphi_j \cos(\lambda_i - \lambda_j)].$$

Аналогично можно преобразовать и уравнения движения в координатах Якоби, вводя (так же, как было указано выше) для каждой точки M_i собственную систему сферических координат, связанную с собственной прямоугольной системой $G_{i-1}x_i'y_i'z_i'$.

Уравнения движения будут иметь такой же вид, как и уравнения (7.40′), однако, так как силовая функция зависит от координат Якоби гораздо более сложным образом, чем от обыкновенных прямоугольных координат, то и ее частные производные по полярным координатам также будут иметь довольно сложные выражения, и мы их приводить не будем.

Уравнения движения относительно точки M_0 в цилиндрических координатах (7.39′) или в сферических координатах (7.41′) особенно удобны для исследования движений планет солнечной системы.

Действительно, все большие планеты движутся почти в одной плоскости по орбитам, очень близким к круговым. Поэтому, принимая упомянутую плоскость *) за основную координатную плоскость, мы добьемся того, что радиусы-векторы планет (т. е. их гелиоцентрические расстояния), так же как и их проекции на

*) Как было уже отмечено выше, все большие планеты двнжутся почти в неизменяемой плоскости солнечной системы, которая проходит почти через центр Солнца, так как центр масс всей солнечиой системы очень близок к центру Солица.

основную плоскость (длительное время, по крайней мере), будут мало отличаться от некоторых постоянных величин (радиусов приближенных круговых орбит!), а аппликаты z_i и широты φ_i будут, вообще, весьма малы.

Это обстоятельство значительно упрощает приближенное интегрирование уравнений движения больших планет.

3. Рассмотрим еще одно специальное преобразование уравнений движения, использованное вначале Клеро в одной частной задаче (в теории движения Луны), а затем Лапласом в более общем случае.

Будем исходить из уравнений движения системы материальных точек, находящихся под действием заданных сил, в цилиндрических координатах

$$\ddot{\rho}_i - \rho_i\dot{\lambda}_i^2 = \mathrm{P}_i, \quad \frac{d}{dt}\left(\rho_i^2\dot{\lambda}_i\right) = \Lambda_i, \quad \ddot{z}_i = \mathrm{Z}_i \qquad (7.42)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где P_i, Λ_i, Z_i суть заданные функции величин ρ_1, λ_1, z_1, ..., ρ_n, λ_n, z_n и их первых производных по времени, но не зависят явно от времени t. Тогда, как известно, исключая время из уравнений движения и принимая за независимую переменную любую из координат, мы можем понизить порядок системы (7.42) на одну единицу. Наиболее удобно взять за новую независимую переменную одну из долгот λ_1, λ_2, ..., λ_n, например, λ_k (где k — любое из ряда чисел 1, 2, ..., n).

Преобразуем уравнения (7.42) введением новой переменной, полагая для упрощения письма $\lambda_k = \lambda$, и введем, кроме того, вместо зависимых переменных ρ_i и z_i новые зависимые переменные, u_i и s_i, посредством формул

$$u_i = \frac{1}{\rho_i}, \quad s_i = \frac{z_i}{\rho_i}, \qquad (7.42')$$

так что u_i есть обратное значение проекции радиуса-вектора ρ_i точки M_i на плоскость $z=0$, а s_i есть тангенс широты этой точки.

Положим теперь

$$\rho_i^2\dot{\lambda}_i = \Gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (7.43)$$

Тогда старая и новая независимые переменные будут связаны следующим соотношением:

$$\frac{d\lambda}{dt} = u_k^2\Gamma_k. \qquad (7.43')$$

Производная по времени от какой-либо функции Φ выразится через производную той же функции по λ следующим образом:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = u_k^2\Gamma_k\frac{d\Phi}{d\lambda}. \qquad (7.44)$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= u_k^2\Gamma_k \frac{d\rho_i}{d\lambda}, & \dot{z}_i &= u_k^2\Gamma_k \frac{dz_i}{d\lambda}, \\ \dot{\lambda}_i &= u_k^2\Gamma_k \frac{d\lambda_i}{d\lambda}, & \dot{\Gamma}_i &= u_k^2\Gamma_k \frac{d\Gamma_i}{d\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{7.44'}$$

Далее, из формулы (7.44) выводим

$$\ddot{\Phi} = \frac{d^2\Phi}{dt^2} = u_k^2\Gamma_k \frac{d}{d\lambda}\left(u_k^2\Gamma_k \frac{d\Phi}{d\lambda}\right), \tag{7.44''}$$

откуда получаем

$$\ddot{\rho}_i = u_k^2\Gamma_k \frac{d}{d\lambda}\left(u_k^2\Gamma_k \frac{d\rho_i}{d\lambda}\right) = -u_k^2\Gamma_k \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2} \frac{du_i}{d\lambda}\right),$$

$$\ddot{z}_i = u_k^2\Gamma_k \frac{d}{d\lambda}\left(u_k^2\Gamma_k \frac{dz_i}{d\lambda}\right) = u_k^2\Gamma_k \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2}\left(u_i \frac{ds_i}{d\lambda} - s_i \frac{du_i}{d\lambda}\right)\right].$$

Теперь уравнения (7.42) примут следующий вид:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2} \frac{du_i}{d\lambda}\right) + \frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i}\left(\frac{d\lambda_i}{d\lambda}\right)^2 = -\frac{\mathrm{P}_i}{u_k^2\Gamma_k},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2}\left(u_i \frac{ds_i}{d\lambda} - s_i \frac{du_i}{d\lambda}\right)\right] = \frac{\mathrm{Z}_i}{u_k^2\Gamma_k},$$

$$\frac{d\Gamma_i}{d\lambda} = \frac{\Lambda_i}{u_k^2\Gamma_k},$$

причем в выражениях для P_i, Z_i, Λ_i величины ρ_i, z_i, λ_i, $\dot{\rho}_i$, $\dot{z}_i$, $\dot{\lambda}_i$ должны быть заменены их выражениями в функции новых переменных по формулам (7.43) и (7.44′).

Чтобы привести написанные уравнения к окончательному виду, исключим из них производную от Γ_k по λ при помощи формулы

$$\frac{d\Gamma_k}{d\lambda} = \frac{\Lambda_k}{u_k^2\Gamma_k}, \tag{7.45}$$

затем из второго уравнения исключим при помощи первого вторую производную от u_i по λ и, наконец, заметим, что в силу (7.43) и (7.43′) имеем для $i \neq k$

$$\Gamma_i = \frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2} \frac{d\lambda_i}{d\lambda}.$$

В результате указанных преобразований и соответствующих упрощений уравнения движения системы n материальных точек приведутся к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u_i}{d\lambda^2}+\varkappa_i^2u_i=U_i,\\ &\frac{d^2s_i}{d\lambda^2}+\varkappa_i^2s_i=S_i,\\ &\frac{d^2\lambda_i}{d\lambda^2}=L_i \qquad (i\neq k), \end{aligned}\right\} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7.46}$$

где

$$\varkappa_i=\frac{d\lambda_i}{d\lambda},$$

$$U_i=-\frac{u_i^2}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{\mathrm{P}_i+u_k^2\left[\frac{\Lambda_k}{u_i^2}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_i^2}\right)\right]\frac{du_i}{d\lambda}\right\},$$

$$S_i=-\frac{u_i}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{\mathrm{P}_is_i-\mathrm{Z}_i+u_k^2\left[\frac{\Lambda_k}{u_i}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_i^2}\right)\right]\frac{ds_i}{d\lambda}\right\},$$

$$L_i=\frac{u_i^2}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{\Lambda_i-u_k^2\left[\frac{\Lambda_k}{u_i^2}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_i^2}\right)\right]\frac{d\lambda_i}{d\lambda}\right\} \qquad (i\neq k).$$

Входящая в уравнения (7.46) вспомогательная переменная Γ_k определяется уравнением (7.45), которое может быть присоединено к системе (7.46).

Проинтегрировав уравнения (7.46) и (7.45), мы получим величины u_i, s_i, λ_i и Γ_k в функции независимой переменной λ и $6n-1$ произвольных постоянных. После этого из уравнения (7.43′) простой квадратурой определим и время t, как функцию переменной λ, по формуле:

$$t-t_0=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{u_k^2\Gamma_k}, \tag{7.47}$$

где λ_0 можно рассматривать как последнюю произвольную постоянную.

Разрешая уравнение (7.47) относительно λ, мы определим эту величину как функцию времени, а затем без труда получим и все остальные переменные в зависимости от времени и $6n$ произвольных постоянных.

Заметим еще, что из уравнения (7.45) интегрированием мы найдем

$$\Gamma_k^2=\gamma^2+2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\Lambda_k\,d\lambda}{u_k^2}.$$

где γ^2 есть произвольная постоянная.

Подставляя это выражение в уравнения (7.46), мы исключим эту вспомогательную переменную, но превратим уравнения движения из дифференциальных в интегро-дифференциальные, что, впрочем, не очень усложнит процесс приближенного интегрирования этих уравнений *).

В заключение этого раздела рассмотрим случай, когда

$$\mathrm{P}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \rho_i},$$

$$\Lambda_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i},$$

$$\mathrm{Z}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i},$$

где функции Ω_i зависят только от координат ρ_i, z_i, λ_i точек M_i. Тогда величины P_i и Z_i легко выразить через производные от Ω_i по переменным u_i и s_i. Действительно, мы имеем

$$\mathrm{P}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i}\frac{\partial s_i}{\partial \rho_i} = -u_i^2 \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} - s_i u_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i},$$

$$\mathrm{Z}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i}\frac{\partial s_i}{\partial z_i} = u_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i},$$

где

$$\Omega_i = \frac{f\,(m_0 + m_i)\, u_i}{\sqrt{1 + s_i^2}} + f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left[\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{u_j^2\,(s_i s_j + \cos(\lambda_i - \lambda_j))}{u_i\left(1 + s_j^2\right)^{3/2}}\right], \tag{7.48}$$

а взаимные расстояния определятся формулой

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{u_i u_j}\sqrt{u_i^2 + u_j^2 - 2u_i u_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + (s_i u_j - s_j u_i)^2}.$$

*) Полезно отметить, что уравнения движения, соответствующие $i=k$, имеют гораздо более простой вид, чем все остальные уравнения. Действительно, $\varkappa_k = 1$, и мы можем написать

$$\frac{d^2 u_k}{d\lambda^2} + u_k = U_k, \qquad \frac{d^2 s_k}{d\lambda^2} + s_k = S_k,$$

где, как легко видеть,

$$U_k = -\frac{1}{u_k^2 \Gamma_k^2}\left(\mathrm{P}_k + \Lambda_k \frac{du_k}{d\lambda}\right),$$

$$S_k = -\frac{1}{u_k^3 \Gamma_k^2}\left(\mathrm{P}_k s_k - Z_k + u_k \Lambda_k \frac{ds_k}{d\lambda}\right).$$

С помощью этих формул выражения для величин U_l, S_l, L_l приведутся к следующему виду:

$$U_l = \frac{u_l^2}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{u_l^2\frac{\partial\Omega_l}{\partial u_l} + s_l u_l\frac{\partial\Omega_l}{\partial s_l} - u_k^2\left[\frac{1}{u_l^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda} + \Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_l^2}\right)\right]\frac{du_l}{d\lambda}\right\},$$

$$S_l = \frac{u_l}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{u_l^2 s_l\frac{\partial\Omega_l}{\partial u_l} + u_l(1+s_l^2)\frac{\partial\Omega_l}{\partial s_l} - \right.$$

$$\left. - u_k^2\left[\frac{1}{u_l}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda} + \Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_l^2}\right)\right]\frac{ds_l}{d\lambda}\right\},$$

$$L_l = \frac{u_l^2}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{\frac{\partial\Omega_l}{\partial\lambda_l} - u_k^2\left[\frac{1}{u_l^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda} + \Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_l^2}\right)\right]\frac{d\lambda_l}{d\lambda}\right\} \qquad (i \neq k),$$

где *)

$$\Gamma_k^2 = \gamma^2 + 2\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{1}{u_k^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}\,d\lambda.$$

Чтобы получить развернутые выражения для величин P_i, Z_i, Λ_i, входящих в правые части уравнений (7.46), нужно вычислить частные производные от функций Ω_i, определяемых формулой (7.48), и произвести затем надлежащие подстановки.

Можно также воспользоваться выражениями для частных производных от функций Ω_i, приведенных в конце раздела первого.

---

*) Полагая $i=k$, мы получим, в частности, выражения для функций U_k и S_k, подставляя которые в уравнения, определяющие движение точки M_k, найдем

$$\frac{d^2u_k}{d\lambda^2} + u_k = \frac{1}{\Gamma_k^2}\left[\frac{\partial\Omega_k}{\partial u_k} + \frac{s_k}{u_k}\frac{\partial\Omega_k}{\partial s_k} - \frac{1}{u_k^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}\frac{du_k}{\partial\lambda}\right],$$

$$\frac{d^2s_k}{d\lambda} + s_k = \frac{1}{\Gamma_k^2}\left[\frac{s_k}{u_k}\frac{\partial\Omega_k}{\partial u_k} + \frac{1+s_k^2}{u_k^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial s_k} - \frac{1}{u_k^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}\frac{ds_k}{d\lambda}\right],$$

причем

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{u_k^2\Gamma_k}.$$

Заменяя в этих производных величины ρ_i и z_i их выражениями через новые переменные, мы будем иметь

$$
\begin{gathered}
\mathrm{P}_i = -\frac{f(m_0+m_i)\,u_i^2}{(1+s_i^2)^{3/2}} + \\
+ f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left[\frac{u_i\cos(\lambda_i-\lambda_j)-u_j}{u_iu_j\Delta_{ij}^3} - \frac{u_j^2\cos(\lambda_i-\lambda_j)}{(1+s_j^2)^{3/2}}\right],
\end{gathered}
$$

$$
\mathrm{Z}_i = -\frac{f(m_0+m_i)\,s_iu_i^2}{(1+s_i^2)^{3/2}} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left[\frac{u_is_j-s_iu_j}{u_iu_j\Delta_{ij}^3} - \frac{s_ju_j^2}{(1+s_j^2)^{3/2}}\right],
$$

$$
\Lambda_i = -\frac{f}{u_i}\sum_{j=1}^{n}{}'\frac{m_j}{u_j}\left[\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{u_j^3}{(1+s_j^2)^{3/2}}\right]\sin(\lambda_i-\lambda_j).
$$

Полагая в последней из этих формул $i=k$ и заменяя λ_k на λ, мы найдем также выражение для производной $\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}$, после чего получим Γ_k^2 по формуле

$$
\Gamma_k^2 = \gamma^2 - 2f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\sin(\lambda-\lambda_j)}{u_k^3u_j}\left[\frac{1}{\Delta_{kj}^3} - \frac{u_j^3}{(1+s_j^2)^{3/2}}\right]d\lambda.
$$

4. Дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек можно также записать и в гамильтоновой (канонической) форме.

Рассмотрим сначала уравнения движения (7.1′) в абсолютных прямоугольных координатах

$$
m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial\xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial\eta_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial\zeta_i} \qquad (7.49)
$$

$$
(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),
$$

где U есть силовая функция, и обозначим, как обычно, через T полную живую силу системы, т. е. положим

$$
T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2\right). \qquad (7.50)
$$

Чтобы написать уравнения (7.49) в канонической форме, достаточно принять ξ_i, η_i, ζ_i за лагранжевы координаты и ввести импульсы формулами

$$
u_i = m_i\dot{\xi}_i, \quad v_i = m_i\dot{\eta}_i, \quad w_i = m_i\dot{\zeta}_i.
$$

Полагая теперь

$$H = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \frac{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}{m_i} - U, \tag{7.50'}$$

мы можем написать систему (7.49) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial u_i}, & \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial v_i}, & \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w_i}, \\ \frac{du_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \frac{dv_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \frac{dw_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}. \end{aligned}\right\} \tag{7.49'}$$

Те же уравнения (7.49′) можно написать гораздо короче, вводя подходящие обозначения для обобщенных координат.

Действительно, будем обозначать все координаты одной буквой q_j $(j=1, 2, \ldots, 3n+3)$, так что

$$\xi_i = q_{3i+1}, \quad \eta_i = q_{3i+2}, \quad \zeta_i = q_{3i+3} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

и введем для симметрии новые обозначения для масс точек, полагая

$$m_i = \mu_{3i+1} = \mu_{3i+2} = \mu_{3i+3} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда живая сила системы определится формулой

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n+3} \mu_j \dot{q}_j^2, \tag{7.50''}$$

откуда получим выражения для обобщенных импульсов

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \mu_j \dot{q}_j,$$

вследствие чего уравнения (7.49′) примут следующий вид*):

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \tag{7.49''}$$

где

$$H = T - U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n+3} \frac{p_j^2}{\mu_j} - U.$$

Классические интегралы системы (7.49″) получатся из интегралов (7.8′), (7.10) и (7.11) простым переходом к новым

---

*) Эти уравнения часто пишут еще проще, вводя в рассмотрение вектор q с компонентами q_j и соответствующий ему вектор p с компонентами p_j. Тогда уравнения (7.49″) можно написать в виде

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q.$$

переменным и новым обозначениям и напишутся следующим образом:

интегралы движения центра масс:

$$\sum_{i=0}^{n} p_{3i+1}=a_1, \quad \sum_{i=0}^{n}(\mu_{3i+1}q_{3i+1}-tp_{3i+1})=b_1,$$
$$\sum_{i=0}^{n} p_{3i+2}=a_2, \quad \sum_{i=0}^{n}(\mu_{3i+2}q_{3i+2}-tp_{3i+2})=b_2,$$
$$\sum_{i=0}^{n} p_{3i+3}=a_3, \quad \sum_{i=0}^{n}(\mu_{3i+3}q_{3i+3}-tp_{3i+3})=b_3,$$

интегралы площадей:

$$\sum_{i=0}^{n}(q_{3i+2}p_{3i+3}-q_{3i+3}p_{3i+2})=c_1,$$
$$\sum_{i=0}^{n}(q_{3i+3}p_{3i+1}-q_{3i+1}p_{3i+3})=c_2,$$
$$\sum_{i=0}^{n}(q_{3i+1}p_{3i+2}-q_{3i+2}p_{3i+1})=c_3$$

и, наконец, интеграл живой силы

$$H=h.$$

Совершенно аналогично можно привести к канонической форме и уравнения (7.35), т. е. уравнения относительного движения в координатах Якоби.

Полагая

$$u'_i=m'_i\dot{x}'_i, \quad v'_i=m'_i\dot{y}'_i, \quad w'_i=m'_i\dot{z}'_i$$

и

$$H'=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i'^2+v_i'^2+w_i'^2}{m'_i}-U,$$

мы напишем уравнения (7.35) в форме

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx'_i}{dt}&=\frac{\partial H'}{\partial u'_i}, & \frac{dy'_i}{dt}&=\frac{\partial H'}{\partial v'_i}, & \frac{dz'_i}{dt}&=\frac{\partial H'}{\partial w'_i},\\
\frac{du'_i}{dt}&=-\frac{\partial H'}{\partial x'_i}, & \frac{dv'_i}{dt}&=-\frac{\partial H'}{\partial y'_i}, & \frac{dw'_i}{dt}&=-\frac{\partial H'}{\partial z'_i}
\end{aligned}\right\} \qquad (7.51)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Уравнения (7.51) также можно записать более кратко, вводя новые обозначения для координат Якоби и приведенных масс. Действительно, положим

$$x'_i = q'_{3i-2}, \quad y'_i = q'_{3i-1}, \quad z'_i = q'_{3i}$$

и

$$m'_i = \mu'_{3i-2} = \mu'_{3i-1} = \mu'_{3i}.$$

Тогда

$$T'_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n} \mu'_j \dot{q}'^2_j,$$

и уравнениям (7.50) можно придать вид

$$\frac{dq'_j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'_j}, \quad \frac{dp'_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q'_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n). \quad (7.51')$$

Интегралы системы (7.51′) выведем из интегралов (7.37) и (7.37′) переходом к новым обозначениям переменных, что дает

$$\sum_{i=1}^{n} (q'_{3i-1}p'_{3i} - q'_{3i}p'_{3i-1}) = c'_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (q'_{3i}p'_{3i-2} - q'_{3i-2}p'_{3i}) = c'_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (q'_{3i-2}p'_{3i-1} - q'_{3i-1}p'_{3i-2}) = c'_3,$$

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n} \frac{p'^2_j}{\mu'_j} - U = h'.$$

Уравнения движения в цилиндрических или сферических координатах также легко привести к каноническому виду. Действительно, рассмотрим уравнения движения (7.38′) в абсолютных цилиндрических координатах. В этих координатах живая сила нашей материальной системы имеет следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2\dot{\lambda}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2).$$

Принимая величины ρ_i, λ_i, ζ_i за лагранжевы координаты, мы определим соответствующие им импульсы формулами

$$\mathrm{P}_i = m_i\dot{\rho}_i, \quad \Lambda_i = m_i\rho_i^2\dot{\lambda}_i, \quad \mathrm{Z}_i = m_i\dot{\zeta}_i,$$

откуда следует, что уравнения (7.38′) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathrm{P}_i}, & \frac{d\mathrm{P}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho_i}, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Lambda_i}, & \frac{d\Lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathrm{Z}_i}, & \frac{d\mathrm{Z}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \end{aligned}\right\} \tag{7.52}$$

где

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{m_i}\left[\mathrm{P}_i^2 + \frac{\Lambda_i^2}{\rho_i^2} + \mathrm{Z}_i^2\right] - U$$

есть соответствующая характеристическая функция.

Приведем еще к гамильтоновой форме относительные уравнения движения в координатах Якоби, преобразованные предварительно к сферическим координатам с помощью формул

$$x_i' = r_i' \cos\varphi_i' \cos\lambda_i', \quad y_i' = r_i' \cos\varphi_i' \sin\lambda_i', \quad z_i' = r_i' \sin\varphi_i'.$$

Тогда живая сила системы T' определится формулой

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i' \left[\dot{r}_i'^2 + r_i'^2 \dot{\varphi}_i'^2 + r_i'^2 \cos^2\varphi_i' \cdot \dot{\lambda}_i'^2\right].$$

Примем величины r_i', φ_i', λ_i' за обобщенные лагранжевы координаты и введем соответствующие им обобщенные импульсы формулами *)

$$R_i' = m_i' \dot{r}_i', \quad \Phi_i' = m_i' r_i'^2 \dot{\varphi}_i', \quad L_i' = r_i'^2 \cos^2\varphi_i' \cdot \dot{\lambda}_i'.$$

Тогда относительное движение системы определится следующими каноническими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr_i'}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial R_i'}, & \frac{dR_i'}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial r_i'}, \\ \frac{d\varphi_i'}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial \Phi_i'}, & \frac{d\Phi_i'}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \varphi_i'}, \\ \frac{d\lambda_i'}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial L_i'}, & \frac{dL_i'}{dt} &= -\frac{\partial H'}{d\lambda_i'} \\ & & (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

где

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i'}\left[R_i'^2 + \frac{\Phi_i'^2}{r_i'^2} + \frac{L_i'^2}{r_i'^2 \cos^2\varphi_i'}\right] - U.$$

*) Здесь R, Φ, L, так же как и P, Λ, Z, обозначают импульсы, а не составляющие сил, как выше.

Полезно напомнить, что x'_i, y'_i, z'_i суть декартовы координаты точки M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) в системе координат $G_{i-1}x'_iy'_iz'_i$ с началом в центре инерции системы точек $M_0, M_1, \ldots, M_i$ и с неизменными направлениями осей.

Уравнения движения системы в координатах x_i, y_i, z_i, определяющих положения точек M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) относительно точки M_0, можно также привести к канонической форме следующим образом.

Рассмотрим живую силу T в относительных координатах, которая определяется формулой

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)- \\ -\frac{1}{2m}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{y}_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{z}_i\right)^2\right]. \quad (7.54)$$

Рассматривая относительные координаты x_i, y_i, z_i как лагранжевы, мы определим соответствующие им импульсы формулами

$$\left.\begin{aligned} u_i&=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}=m_i\dot{x}_i-\frac{m_i}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i=m_i\dot{\xi}'_i,\\ v_i&=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}=m_i\dot{y}_i-\frac{m_i}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{y}_i=m_i\dot{\eta}'_i,\\ w_i&=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}=m_i\dot{z}_i-\frac{m_i}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{z}_i=m_i\dot{\zeta}'_i. \end{aligned}\right\} \quad (7.54')$$

Полагая затем

$$H=T-U,$$

мы можем написать следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial u_i}, & \frac{du_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\\ \frac{dy_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial v_i}, & \frac{dv_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial y_i},\\ \frac{dz_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial w_i}, & \frac{dw_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, n). \quad (7.55)$$

Характеристическую функцию H нужно выразить через канонические переменные x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i. Так как взаимные расстояния Δ_{ij} уже были выражены через относительные координаты, то силовая функция U также уже выражена через канонические переменные.

Остается выразить через импульсы u_i, v_i, w_i живую силу T. Но легко видеть, что обобщенные импульсы, соответствующие относительным координатам, являются импульсами в барицентрической системе координат, а поэтому из формул (7.23′) найдем выражения составляющих скоростей через барицентрические скорости, а значит, и через обобщенные импульсы

$$m_i\dot{x}_i = u_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_{j=1}^{n} u_j,$$

$$m_i\dot{y}_i = v_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_{j=1}^{n} v_j,$$

$$m_i\dot{z}_i = w_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_{j=1}^{n} w_j.$$

Подставив эти выражения в формулу (7.54), мы и получим нужное выражение живой силы, а следовательно, и характеристической функции H в канонических переменных.

Следует отметить, что канонические уравнения в координатах x_i, y_i, z_i имеют более сложный вид, чем уравнения в канонических координатах Якоби.