ГЛАВА VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

В начале предыдущей главы говорилось, что во многих случаях реально существующие небесные тела можно рассматривать как материальные точки, движущиеся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений согласно закону всемирного тяготения Ньютона.

При этих предположениях мы установили дифференциальные уравнения движения тел-точек и таким образом выяснили природу той математической задачи, к которой приводится в первом приближении исследование движения планет, их спутников, комет, астероидов, искусственных небесных тел и т. п.

Однако не всегда можно довольствоваться таким первым приближением, и в ряде существенно важных случаев приходится усложнять первоначально поставленную задачу, вводя дополнительные гипотезы или условия, вследствие чего рассматриваемая задача делается более близкой к действительности.

Так, иногда приходится вводить в рассмотрение, кроме сил взаимных притяжений, некоторые другие силы. В других случаях оказывается невозможным рассматривать реальные небесные тела как материальные точки и приходится принимать во внимание влияние их формы и физического строения. Например, при исследовании движений близких спутников больших планет, особенно в задаче о движении искусственных спутников Земли (ИСЗ), Луны (ИСЛ) или какой-либо другой планеты, необходимо учитывать отклонение формы планеты от сферической и эффект ее неоднородности.

При изучении вращательного движения небесного тела вокруг его собственного центра инерции (центра масс) приходится рассматривать это небесное тело как «тело» в собственном смысле этого слова, так как задача о вращательном движении материальной точки явно не имеет никакого смысла.

Наконец, может случиться, что вращение тела вокруг его центра инерции оказывает влияние на поступательное его движение, вследствие чего действительное (т. е. наблюдаемое) поступательное движение небесного тела может оказаться несколько отличным от поступательного движения тела, если его считать материальной точкой.

Разумеется, такое общее движение невозможно рассматривать во всей его общности и мы вынуждены поэтому и здесь ввести некоторые упрощающие предположения.

Мы будем рассматривать только неизменяемые твердые тела (или абсолютно твердые), элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона. Вследствие действия этих сил взаимных притяжений каждое тело будет обладать и поступательным движением и вращательным вокруг своего центра инерции. Такое общее, или совместное движение мы будем называть поступательно-вращательным движением.

В действительности небесные тела не являются материальными точками, но они не являются, конечно, и абсолютно твердыми телами, а всегда обладают известной степенью пластичности или даже представляют собой жидкие (или газообразные, или пылевые) образования. Поэтому, рассматривая задачу о движении неизменяемых твердых тел, мы делаем только следующий шаг на пути последовательных приближений к естественным условиям природы.

§ 1. Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения неизменяемых твердых тел

1. Рассмотрим материальную систему, состоящую из $n+1$ абсолютно твердых материальных тел M_0, M_1, ..., M_n, из которых никакие два не имеют общей части.

Как было установлено в гл. I (см. § 9 и 10 гл. I *)), положение и ориентация каждого тела M_i в абсолютной системе декартовых координат $O\xi\eta\zeta$ может быть определена шестью независимыми параметрами

$$\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i,\ \psi_i,\ \varphi_i,\ \vartheta_i, \tag{8.1}$$

т. е. тремя координатами ξ_i, η_i, ζ_i центра приведения G_i тела M_i и тремя эйлеровыми углами ψ_i, φ_i, ϑ_i, определяющими ориентацию «собственной» системы осей, неизменно связанных с телом M_i (см. рис. 43 для случая $n=2$).

В этой главе за центр приведения мы будем принимать центр инерции каждого тела, а за оси собственной системы коорди-

*) См. также Г. К. Суслов, Теоретическая механика, ОНТИ, 1944, или А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

нат — центральные, главные оси инерции тела (т. е. оси инерции с началом в центре инерции!).

Обозначим, как обычно, через p_i, q_i, r_i проекции угловой скорости вращения тела на оси собственной системы координат. Эти

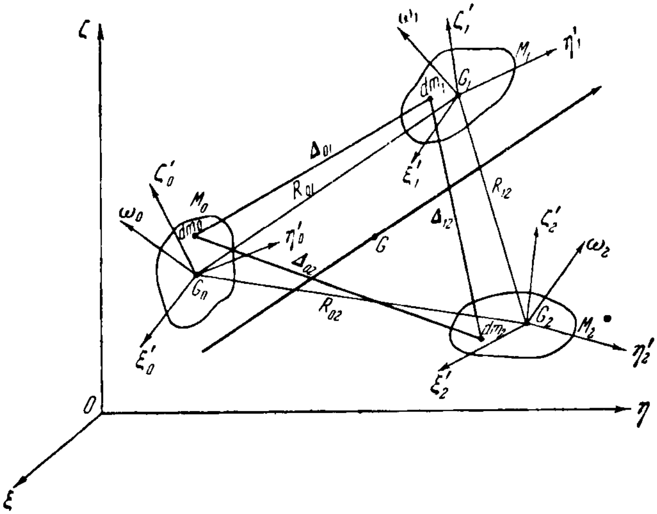

Рис. 43.

величины связаны с эйлеровыми углами тела известными кинематическими уравнениями Эйлера, имеющими вид

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \sin\varphi_i \sin\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \cos\varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \\ q_i &= \cos\varphi_i \sin\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i - \sin\varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \\ r_i &= \cos\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \dot{\varphi}_i. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Тогда, если m_i есть масса тела M_i и A_i, B_i, C_i — его главные, центральные моменты инерции, живая сила T_i этого тела определится следующей формулой:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + \frac{1}{2}(A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2), \tag{8.3}$$

а если T есть полная живая сила всей системы, то

$$T = \sum_{i=0}^{n} T_i. \tag{8.3$'$}$$

Полная силовая функция всей нашей материальной системы выражается (см. § 10 гл. I) формулой

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} {\sum_{j=0}^{n}}' U_{ij}, \tag{8.4}$$

где

$$U_{ij} = f \int\limits_{(M_i)} \int\limits_{(M_j)} \frac{dm_i\, dm_j}{\Delta_{ij}} \tag{8.4'}$$

есть силовая функция взаимного притяжения двух тел M_i и M_j, являющаяся некоторой функцией шести величин (8.1) тела M_i и шести аналогичных величин тела M_j.

Полная силовая функция U является поэтому некоторой функцией от $6n+6$ независимых переменных, определяющих положения и ориентации всех тел системы. Полезно отметить, что силовая функция не зависит ни от времени (явно), ни от производных величин (8.1).

Дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся тел могут быть написаны при помощи общих уравнений Лагранжа второго рода (см. уравнения (6.8) гл. VI), где за обобщенные координаты q нужно взять переменные (8.1), полностью определяющие положение системы (в обобщенном смысле) относительно абсолютных осей $O\xi\eta\zeta$.

Так как силовая функция U не зависит от производных обобщенных координат (8.1), а живая сила T в силу уравнений (8.2) не зависит от прецессионных углов ψ_i, то уравнения Лагранжа в нашем случае будут иметь такой вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\xi_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad && \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial \psi_i},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\eta_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad && \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\zeta_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \quad && \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\vartheta_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Подставляя сюда выражение для T, разрешая вторую группу уравнений (8.5) относительно производных $\dot p_i$, $\dot q_i$, $\dot r_i$ и присоединяя к получившимся уравнениям кинематические уравнения Эйлера, мы напишем полную систему дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения системы абсолютно твердых тел в следующем виде:

$$m_i\ddot\xi_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\ddot\eta_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i\ddot\zeta_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \tag{8.6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_i\dot p_i - (B_i - C_i)\, q_i r_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos\vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right)\frac{\sin\varphi_i}{\sin\vartheta_i} + \cos\varphi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i},\\
&B_i\dot q_i - (C_i - A_i)\, r_i p_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos\vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right)\frac{\cos\varphi_i}{\sin\vartheta_i} - \sin\varphi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i},\\
&C_i\dot r_i - (A_i - B_i)\, p_i q_i = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.6'}$$

2. В написанные уравнения входят вспомогательные переменные — проекции угловых скоростей ω_i тел системы p_i, q_i, r_i. Эти переменные можно исключить при помощи кинематических уравнений Эйлера (8.2), в результате чего получим уравнения, связывающие только переменные (8.1) всех тел системы.

Произведя это исключение и разрешив полученные уравнения относительно вторых производных от углов Эйлера, мы представим дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения еще в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, & m_i\ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, & m_i\ddot{\zeta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \\ \ddot{\psi}_i &= \Psi_i, & \ddot{\varphi}_i &= \Phi_i, & \ddot{\vartheta}_i &= \Theta_i, \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

где положено для сокращения:

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta_i\cdot\Psi_i &= \dot{\vartheta}_i(\dot{\varphi}_i-\dot{\psi}_i\cos\vartheta_i)+\left(\frac{1}{A_i}-\frac{1}{B_i}\right)\sin\varphi_i\cos\varphi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}+ \\ &+\operatorname{cosec}\vartheta_i\left(\frac{\sin^2\varphi_i}{A_i}+\frac{\cos^2\varphi_i}{B_i}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial\psi_i}-\cos\vartheta_i\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right)+ \\ &+\frac{1}{2}(\dot{\varphi}_i+\dot{\psi}_i\cos\vartheta_i)\left[\left(\frac{B_i-C_i}{A_i}+\frac{C_i-A_i}{B_i}\right)\sin 2\varphi_i\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i+\right. \\ &\qquad\left.+\left(\frac{C_i-A_i}{B_i}\cos^2\varphi_i-\frac{B_i-C_i}{A_i}\sin^2\varphi_i\right)\dot{\vartheta}_i\right]; \\ \Phi_i &= \frac{1}{C_i}\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}+\dot{\vartheta}_i\dot{\psi}_i\sin\vartheta_i-\cos\vartheta_i\cdot\Psi_i+ \\ &\qquad+\frac{A_i-B_i}{C_i}(\sin\varphi_i\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i+\cos\varphi_i\cdot\dot{\vartheta}_i)\times \\ &\qquad\qquad\times(\cos\varphi_i\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i-\sin\varphi_i\cdot\dot{\vartheta}_i); \\ \Theta_i &= -\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i\dot{\varphi}_i+\left(\frac{\cos^2\varphi_i}{A_i}+\frac{\sin^2\varphi_i}{B_i}\right)\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}+ \\ &+\left(\frac{1}{A_i}-\frac{1}{B_i}\right)\frac{\sin 2\varphi_i}{2\sin\vartheta_i}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi_i}-\cos\vartheta_i\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right)+ \\ &+(\cos\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i+\dot{\varphi}_i)\left[\left(\frac{B_i-C_i}{A_i}\cos^2\varphi_i-\frac{C_i-A_i}{B_i}\sin^2\varphi_i\right)\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i+\right. \\ &\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{C_i-B_i}{A_i}+\frac{A_i-C_i}{B_i}\right)\sin 2\varphi_i\cdot\dot{\vartheta}_i\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.7'}$$

Если какое-нибудь из тел системы обладает геометрической и механической (или динамической) симметрией относительно некоторой оси, неизменно связанной с телом, то выражения (8.7′) для этого тела значительно упростятся. В самом деле, примем ось симметрии тела (пусть это будет тело M_0) за ось аппликат собственной системы координат $G_0\xi_0'\eta_0'\zeta_0'$. Тогда (см. гл. V первой части) $A_0=B_0$ и силовая функция U не зависит от угла собственного вращения тела M_0. Поэтому предыдущие формулы дают

$$\left.\begin{aligned}
\sin\vartheta_0\cdot\Psi_0 &= -2\cos\vartheta_0\cdot\dot\vartheta_0\dot\psi_0+\frac{C_0}{A_0}\dot\vartheta_0(\dot\psi_0\cos\vartheta_0+\dot\varphi_0)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\operatorname{cosec}\vartheta_0}{A_0}\frac{\partial U}{\partial\psi_0},\\
\Phi_0 &= \dot\vartheta_0\dot\psi_0\sin\vartheta_0-\cos\vartheta_0\cdot\Psi_0,\\
\Theta_0 &= \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\cdot\dot\psi_0^2-\\
&\quad-\frac{C_0}{A_0}\dot\psi_0(\dot\psi_0\cos\vartheta_0+\dot\varphi_0)\sin\vartheta_0+\frac{1}{A_0}\frac{\partial U}{\partial\vartheta_0}.
\end{aligned}\right\}\quad(8.7'')$$

Если каждое из тел M_i обладает симметрией относительно некоторой оси, то к виду (8.7″) можно привести выражения (8.7′) для всех тел системы. Действительно, выражения (8.7′) упрощаются только за счет выбора собственной системы координат, а эти системы для различных тел заведомо не зависят друг от друга, поэтому ось симметрии каждого тела можно принять за ось аппликат собственной системы координат.

§ 2. Первые интегралы уравнений поступательно-вращательного движения

Уравнения (8.7) образуют систему $6n+6$ дифференциальных уравнений второго порядка, т. е. представляют собой совместную систему $12(n+1)$-го порядка. Поэтому общий интеграл этой системы, дающий полное решение рассматриваемой задачи, должен состоять из $12(n+1)$ независимых первых интегралов и должен содержать такое же число произвольных постоянных, которые могли бы быть однозначно определены начальными значениями величин (8.1) и их первых производных по времени.

Однако, так же как и дифференциальные уравнения движения взаимно притягивающихся материальных точек, уравнения поступательно-вращательного движения неизменяемых тел имеют в общем случае только десять первых интегралов, вытекающих из принципов сохранения движения центра инерции, момента количества движения и полной энергии системы.

Эти интегралы выводятся, так же как и для уравнений движения точек, при помощи свойств силовой функции, вполне аналогичных свойствам силовой функции системы материальных точек. Рассмотрим сначала эти свойства.

1. Силовая функция системы взаимно притягивающихся тел (8.4), очевидно, не зависит от выбора абсолютной системы коор-