собственной системы координат $G_0\xi_0'\eta_0'\zeta_0'$. Тогда (см. гл. V первой части) $A_0=B_0$ и силовая функция U не зависит от угла собственного вращения тела M_0. Поэтому предыдущие формулы дают

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta_0\cdot\Psi_0 &= -2\cos\vartheta_0\cdot\dot\vartheta_0\dot\psi_0+\frac{C_0}{A_0}\dot\vartheta_0(\dot\psi_0\cos\vartheta_0+\dot\varphi_0)+\\ &\qquad\qquad +\frac{\operatorname{cosec}\vartheta_0}{A_0}\frac{\partial U}{\partial\psi_0},\\ \Phi_0 &= \dot\vartheta_0\dot\psi_0\sin\vartheta_0-\cos\vartheta_0\cdot\Psi_0,\\ \Theta_0 &= \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\cdot\dot\psi_0^2-\\ &\qquad -\frac{C_0}{A_0}\dot\psi_0(\dot\psi_0\cos\vartheta_0+\dot\varphi_0)\sin\vartheta_0+\frac{1}{A_0}\frac{\partial U}{\partial\vartheta_0}. \end{aligned}\right\}\quad(8.7'')$$

Если каждое из тел M_i обладает симметрией относительно некоторой оси, то к виду (8.7″) можно привести выражения (8.7′) для всех тел системы. Действительно, выражения (8.7′) упрощаются только за счет выбора собственной системы координат, а эти системы для различных тел заведомо не зависят друг от друга, поэтому ось симметрии каждого тела можно принять за ось аппликат собственной системы координат.

§ 2. Первые интегралы уравнений поступательно-вращательного движения

Уравнения (8.7) образуют систему $6n+6$ дифференциальных уравнений второго порядка, т. е. представляют собой совместную систему $12(n+1)$-го порядка. Поэтому общий интеграл этой системы, дающий полное решение рассматриваемой задачи, должен состоять из $12(n+1)$ независимых первых интегралов и должен содержать такое же число произвольных постоянных, которые могли бы быть однозначно определены начальными значениями величин (8.1) и их первых производных по времени.

Однако, так же как и дифференциальные уравнения движения взаимно притягивающихся материальных точек, уравнения поступательно-вращательного движения неизменяемых тел имеют в общем случае только десять первых интегралов, вытекающих из принципов сохранения движения центра инерции, момента количества движения и полной энергии системы.

Эти интегралы выводятся, так же как и для уравнений движения точек, при помощи свойств силовой функции, вполне аналогичных свойствам силовой функции системы материальных точек. Рассмотрим сначала эти свойства.

1. Силовая функция системы взаимно притягивающихся тел (8.4), очевидно, не зависит от выбора абсолютной системы коор-

динат $O\xi\eta\zeta$, а поэтому остается неизменной при любом (не изменяющем масштабов) преобразовании координат. Следовательно, при всяком бесконечно малом преобразовании системы координат полное приращение силовой функции, определяемое следующей общей формулой,

$$dU=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\partial U}{\partial\xi_i}d\xi_i+\frac{\partial U}{\partial\eta_i}d\eta_i+\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}d\zeta_i+\frac{\partial U}{\partial\psi_i}d\psi_i+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}d\varphi_i+\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}d\vartheta_i\right], \quad (8.8)$$

должно быть равно нулю.

Сместим начало координат абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ вдоль оси абсцисс на бесконечно малую величину α, не изменяя направлений осей. Тогда абсциссы ξ_i всех точек G_i получат одно и то же приращение α, а ординаты и аппликаты не изменятся. Так как направления координатных осей остаются при указанном преобразовании неизменными, то эйлеровы углы всех тел системы также не изменятся.

Итак, при сделанном преобразовании переменные (8.1) получат следующие приращения:

$$d\xi_i=\alpha,\quad d\eta_i=0,\quad d\zeta_i=0,$$
$$d\psi_i=0,\quad d\varphi_i=0,\quad d\vartheta_i=0.$$

Приращение силовой функции должно быть равно нулю, вследствие чего формула (8.8) дает следующее соотношение между частными производными функции U:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}=0.$$

Смещая подобным же образом начало координат абсолютной системы вдоль оси $O\eta$ и вдоль оси $O\zeta$ и рассуждая так же, как и выше, мы получим еще два подобных же соотношения. В результате имеем следующие три равенства:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}=0,\quad \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\eta_i}=0,\quad \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}=0. \quad (8.9)$$

Повернем теперь систему абсолютных осей вокруг оси $O\xi$ на бесконечно малый угол ω. Тогда переменные (8.1) получат следующие приращения:

$$d\xi_i=0,\qquad d\eta_i=-\omega\cdot\zeta_i,\qquad d\zeta_i=+\omega\cdot\eta_i,$$
$$d\psi_i=-\frac{\sin\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\cdot\omega,\quad d\varphi_i=\frac{\sin\psi_i}{\sin\vartheta_i}\cdot\omega,\quad d\vartheta_i=\cos\psi_i\cdot\omega.$$

В самом деле, приращения прямоугольных координат точек G_i в силу взаимной независимости всех переменных (8.1), определятся так же, как и приращения прямоугольных координат материальных точек, выведенные в § 2 гл. VII. Что же касается приращений эйлеровых углов (не зависящих от приращений координат точек G_i), то они могут быть выведены следующим образом: рассмотрим сферу произвольного радиуса с центром в точке G_i (рис. 44). Пусть ξ, η, ζ — точки пересечения этой сферы прямыми, параллельными координатным осям системы $O\xi\eta\zeta$, а ξ', η', ζ' — точки пересечения сферы осями собственной системы координат тела M_i. Большой круг ($\xi\eta$) есть линия пересечения сферы плоскостью, параллельной плоскости $O\xi\eta$, а большой круг ($\xi'\eta'$) — пересечение сферы плоскостью $G_i\xi_i'\eta_i'$ собственной системы. Точка N есть точка пересечения сферы с линией узлов плоскости $G_i\xi_i'\eta_i'$ на плоскости, параллельной плоскости $O\xi\eta$.

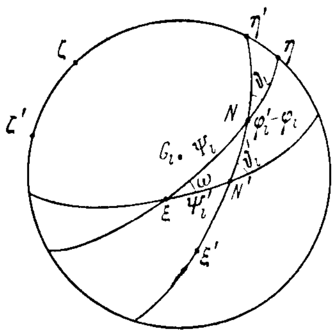

Рис. 44.

После поворота системы координат $O\xi\eta\zeta$ вокруг оси $O\xi$ на угол ω точка N займет новое положение на сфере N'. В образовавшемся бесконечно малом сферическом треугольнике $\xi NN'$ стороны равны:

$$\widehat{\xi N} = \psi_i, \quad \widehat{\xi N'} = \psi_i' = \psi_i + d\psi_i, \quad \widehat{NN'} = \varphi_i' - \varphi_i = d\varphi_i.$$

Далее, внутренний угол при точке ξ равен ω, внутренний угол при точке N равен ϑ_i и, наконец, внешний угол при точке N' равен $\vartheta_i' = \vartheta_i + d\vartheta_i$.

Применяя теперь к треугольнику $\xi NN'$ основные формулы сферической тригонометрии, мы получим следующие соотношения:

$$\frac{\sin\psi_i}{\sin(180^\circ - \vartheta_i')} = \frac{\sin(\varphi_i' - \varphi_i)}{\sin\omega},$$

$$\sin\omega\cos\psi_i = \cos(180^\circ - \vartheta_i')\sin\vartheta_i + \sin(180^\circ - \vartheta_i')\cos\vartheta_i\cos(\varphi_i' - \varphi_i),$$

$$\sin\psi_i'\cos\omega = \cos(\varphi_i' - \varphi_i)\sin\psi_i - \sin(\varphi_i' - \varphi_i)\cos\psi_i\cos\vartheta_i.$$

Принимая теперь во внимание, что синус бесконечно малого угла можно заменить самим углом, а косинус — единицей, мы получим из написанных формул приведенные выше выражения для приращений эйлеровых углов.

Аналогичным образом выведем следующие приращения переменных (8.1), получающиеся при повороте координатной системы $O\xi\eta\zeta$ на бесконечно малый угол ω вокруг оси $O\eta$:

$$d\xi_i = +\omega\cdot\zeta_i, \qquad d\eta_i = 0, \qquad d\zeta_i = -\omega\cdot\xi_i,$$
$$d\psi_i = \frac{\cos\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\cdot\omega, \quad d\varphi_i = -\frac{\cos\psi_i}{\sin\vartheta_i}\cdot\omega, \quad d\vartheta_i = \sin\psi_i\cdot\omega.$$

Наконец, поворачивая систему координат $O\xi\eta\zeta$ на бесконечно малый угол ω вокруг оси $O\zeta$, выведем следующие приращения переменных (8.1):

$$d\xi_i = -\omega\cdot\eta_i, \quad d\eta_i = +\omega\cdot\xi_i, \quad d\zeta_i = 0,$$
$$d\psi_i = \omega, \qquad d\varphi_i = 0, \qquad d\vartheta_i = 0.$$

При каждом из этих трех бесконечно малых преобразований силовая функция U остается неизменной, а поэтому из формулы (8.8) получим следующие три соотношения между частными производными функции U:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\left(\eta_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i} - \zeta_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i} - \frac{\sin\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\psi_i} + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\sin\psi_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\varphi_i} + \cos\psi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}\right) = 0,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(\zeta_i\frac{\partial U}{\partial\xi_i} - \xi_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i} + \frac{\cos\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\psi_i} - \frac{\cos\psi_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\varphi_i} + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \sin\psi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}\right) = 0,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(\xi_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i} - \eta_i\frac{\partial U}{\partial\xi_i} + \frac{\partial U}{\partial\psi_i}\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

2. Переходим теперь к выводу классических интегралов системы уравнений поступательно-вращательного движения (8.7)

Для этого просуммируем по индексу i каждое из равенств группы уравнений (8.6), что дает следующие три уравнения, являющиеся следствиями уравнений (8.6), а также уравнений (8.7):

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\xi}_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\eta}_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\eta_i}, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\zeta}_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}.$$

Отсюда, вследствие соотношений (8.9), находим следующие уравнения:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\xi}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\eta}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\zeta}_i = 0,$$

интегрируя которые, мы дважды получим первую группу первых интегралов уравнений (8.7):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i &= a_1, & \sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i &= a_1t + b_1, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i &= a_2, & \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i &= a_2t + b_2, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i &= a_3, & \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i &= a_3t + b_3. \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Эти уравнения имеют совершенно такой же вид, как и интегралы (7.8′), (7.8″) уравнений абсолютного движения системы материальных точек и имеют, кроме того, такой же механический смысл. Действительно, так как согласно принятому условию точки G_i являются центрами инерции тел M_i ($i=0, 1, 2, \ldots \ldots, n$) то координаты центра инерции всей системы $n+1$ тел, которые обозначим через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, определятся формулами

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i, \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i, \tag{8.12}$$

где

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

обозначает полную массу всей системы тел.

Формулы (8.11) и (8.12) дают

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{a_1}{m}t + \frac{b_1}{m}, & \bar{\eta} &= \frac{a_2}{m}t + \frac{b_2}{m}, & \bar{\zeta} &= \frac{a_3}{m}t + \frac{b_3}{m}, \\ \dot{\bar{\xi}} &= \frac{a_1}{m}, & \dot{\bar{\eta}} &= \frac{a_2}{m}, & \dot{\bar{\zeta}} &= \frac{a_3}{m}. \end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что центр инерции G всей системы тел движется в абсолютном пространстве *прямолинейно* и *равномерно*.

Поэтому интегралы (8.11) называются (так же как и в задаче о движении взаимно притягивающихся точек) *интегралами движения центра инерции* *).

Вторая группа первых интегралов системы (8.7), выражающих принцип сохранения момента количества движения всей системы, получается несколько более длинным и громоздким

---

*) На рис. 42 прямолинейная траектория центра масс G всей системы тел (для случая $n=2$) изображена жирной линией. Точка G изображена для того же момента, как и три тела M_0, M_1 и M_2.

путем, но совершенно таким же способом, как и интегралы движения центра инерции.

Для сокращения мы выведем только один из интегралов моментов, после чего напишем сразу и два остальные по аналогии при помощи циклической перестановки букв и значков.

Умножим второе и третье из уравнений группы (8.6) соответственно на $-\zeta_i$ и $+\eta_i$, уравнения группы (8.6′) соответственно на $a_{11}^{(i)}$, $a_{12}^{(i)}$, $a_{13}^{(i)}$ и, наконец, кинематические уравнения Эйлера (8.2) соответственно на $A_i\dot{a}_{11}^{(i)}$, $B_i\dot{a}_{12}^{(i)}$, $C_i\dot{a}_{13}^{(i)}$ *). Сложим после этого восемь получившихся равенств и просуммируем по индексу i от нуля до n.

Обозначая для сокращения правые части равенств (8.6) временно буквами P_i, Q_i, R_i, мы получим в результате следующее уравнение, являющееся следствием всех уравнений (8.2), (8.6) и (8.6′), а значит, и уравнений (8.7):

$$\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\eta_i\ddot{\xi}_i-\zeta_i\ddot{\eta}_i)+A_i\dot{p}_ia_{11}^{(i)}+B_i\dot{q}_ia_{12}^{(i)}+C_i\dot{r}_ia_{13}^{(i)}+\right.$$
$$\left.+A_ip_i\dot{a}_{11}^{(i)}+B_iq_i\dot{a}_{12}^{(i)}+C_ir_i\dot{a}_{13}^{(i)}\right]=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\eta_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}-\zeta_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i}+(B_i-C_i)q_ir_ia_{11}^{(i)}+(C_i-A_i)r_ip_ia_{12}^{(i)}+\right.$$
$$+(A_i-B_i)p_iq_ia_{13}^{(i)}+A_ip_i\dot{a}_{11}^{(i)}+B_iq_i\dot{a}_{12}^{(i)}+C_ir_i\dot{a}_{13}^{(i)}+$$
$$\left.+P_ia_{11}^{(i)}+Q_ia_{12}^{(i)}+R_ia_{13}^{(i)}\right].$$

Легко видеть, что левая часть последнего равенства есть точная производная по t.

Преобразуем теперь правую часть этого равенства. Для этого воспользуемся формулами **)

$$\dot{a}_{11}^{(i)}=r_ia_{12}^{(i)}-q_ia_{13}^{(i)},\quad \dot{a}_{12}^{(i)}=p_ia_{13}^{(i)}-r_ia_{11}^{(i)},\quad \dot{a}_{13}^{(i)}=q_ia_{11}^{(i)}-p_ia_{12}^{(i)},$$

затем подставим вместо P_i, Q_i, R_i их выражения (т. е. правые части уравнений (8.6′)) и произведем, наконец, необходимые сокращения и упрощения.

---

*) $a_{ks}^{(i)}$ суть направляющие косинусы собственных осей тела M_i в системе $O\xi\eta\zeta$, так что $a_{11}^{(i)}$, $a_{12}^{(i)}$, $a_{13}^{(i)}$ суть косинусы углов, образуемых собственными осями тела M_i с осью $O\xi$. Величины $a_{ks}^{(i)}$ выражаются через эйлеровы углы тела M_i формулами (1.27) гл. I части первой.

**) См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика. Впрочем, эти формулы нетрудно получить, дифференцируя формулы, подобные (1.27), и преобразуя полученные выражения при помощи формул (8.2).

Тогда предыдущее равенство перепишется в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_i\dot{\eta}_i)+A_ip_ia_{11}^{(i)}+B_iq_ia_{12}^{(i)}+C_ir_ia_{13}^{(i)}\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\eta_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}-\zeta_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i}+\frac{\sin\psi_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}-\frac{\sin\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\psi_i}+\cos\psi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}\right].$$

Но в силу первого из соотношений (8.10) правая часть последнего равенства равна нулю, а поэтому выражение, стоящее под знаком производной в левой части, есть величина постоянная, что и дает первый из интегралов момента количества движения.

Подобным же образом, как уже было отмечено выше, получаются и другие два интеграла, которые легко также выводятся из найденного первого циклической перестановкой букв ξ, η, ζ и заменой первого индекса «1» у направляющих косинусов индексами «2» и «3» соответственно.

Выведенные три интеграла напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_i\dot{\eta}_i)+A_ip_ia_{11}^{(i)}+B_iq_ia_{12}^{(i)}+C_ir_ia_{13}^{(i)}\right]=c_1,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i-\xi_i\dot{\zeta}_i)+A_ip_ia_{21}^{(i)}+B_iq_ia_{22}^{(i)}+C_ir_ia_{23}^{(i)}\right]=c_2,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\xi_i\dot{\eta}_i-\eta_i\dot{\xi}_i)+A_ip_ia_{31}^{(i)}+B_iq_ia_{32}^{(i)}+C_ir_ia_{33}^{(i)}\right]=c_3,
\end{aligned}\right\}\qquad(8.13)$$

где c_1, c_2, c_3 обозначают три произвольные постоянные интегрирования.

Так как левые части равенств (8.13) представляют собой проекции на абсолютные оси вектора полного момента количества движения всей системы тел, то интегралы (8.13) действительно можно назвать *интегралами момента количества движения* или, более просто, *интегралами моментов*.

Наконец, последний интеграл — *интеграл живой силы* или *интеграл энергии* — можно написать сразу, имея в виду, что уравнения (8.7) суть преобразованные уравнения (8.5), которые, как уравнения Лагранжа второго рода, имеют всегда интеграл $T-U=h$.

Этот последний интеграл напишется в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2)+A_ip_i^2+B_iq_i^2+C_ir_i^2\right]=U+h,\qquad(8.14)$$

где h — произвольная постоянная.

Итак, дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения системы абсолютно твердых взаимно притягивающихся тел имеют такие же десять первых интегралов, как и уравнения поступательного движения системы взаимно притягивающихся материальных точек.

При этом выведенные интегралы имеют место независимо от вида и структуры тел системы, а также при любом их числе.

3. Если все тела системы вполне произвольны, то уравнения поступательно-вращательного движения не имеют других интегралов, кроме десяти указанных*). Но в частных случаях уравнения (8.7) могут иметь еще некоторые другие интегралы.

Действительно, пусть некоторые тела системы, например $M_0, M_1, \ldots, M_k$ $(k \leqslant n)$, суть шары, обладающие сферической структурой. Тогда для каждого из этих тел любые три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр шара, являются главными, центральными осями инерции (центр такого шара является также его центром инерции). Поэтому очевидно, что

$$A_i = B_i = C_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

и, кроме того, ясно, что силовая функция U не зависит от эйлеровых углов $\psi_i, \varphi_i, \vartheta_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, k)$.

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \psi_i} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} = 0 \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

и уравнения (8.6′) дают немедленно

$$p_i = p_i^{(0)} = \mathrm{const}, \quad q_i = q_i^{(0)} = \mathrm{const}, \quad r_i = r_i^{(0)} = \mathrm{const} \qquad (8.15)$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

а это и есть дополнительные интегралы уравнений задачи в рассматриваемом случае.

Интегралы (8.15) показывают, что угловая скорость ω_i вращения каждого из тел $M_0, M_1, \ldots, M_k$ остается постоянной по величине и направлению относительно собственной для каждого тела системы координат. Но так как главные оси инерции, принятые за оси собственной системы координат, для каждого из тел M_i $(i=0, 1, \ldots, k)$ совершенно произвольны, то отсюда

*) Лучше сказать, что в общем случае нам неизвестны никакие другие интегралы уравнений (8.7), кроме десяти классических. Отметим, что эти десять интегралов получены независимо друг от друга В. В. Белецким и Г. Н. Дубошиным. См. Г. Н. Дубошин, О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения, Астрон. журн. 35, вып. 2, 1958, и В. В. Белецкий, Некоторые вопросы поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском поле сил, Сб. «Искусственные спутники Земли», Изд-во АН СССР, 1963.

следует, что угловая скорость вращения каждого из этих тел будет оставаться постоянной (по величине и направлению) и относительно абсолютной системы координат. Иными словами, каждое из этих тел-шаров будет вращаться равномерно вокруг некоторой неизменной оси, определяемой исключительно начальными условиями задачи.

Так как силовая функция U не зависит от эйлеровых углов тел-шаров, то уравнения (8.6) и (8.6′) не будут содержать этих переменных, а поэтому порядок системы, определяющий остальные неизвестные, будет на $6k$ единиц ниже порядка первоначальной системы (8.7).

Особого внимания заслуживает случай, когда $k=n$, т. е. когда каждое из тел системы есть шар, обладающий сферическим распределением плотностей.

Тогда силовая функция U совершенно не зависит от эйлеровых углов, и уравнения (8.7) приводятся только к системе (8.6), определяющей поступательные движения точек G_i — центров шаров, как материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Вращательное движение тел-шаров *не зависит от их поступательных движений* и может быть определено без всякого труда.

Действительно, вращательное движение каждого тела-шара определяется независимой системой уравнений группы (8.2), которая представляет собой систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно эйлеровых углов каждого тела.

Решение этих уравнений может быть написано сразу, если заметить, что благодаря произволу выбора собственной для каждого тела системы координат эту собственную систему можно выбрать так, чтобы ось $G_i\zeta_i'$ совпадала с направлением вектора ω_i угловой скорости вращения тела. Тогда будем иметь

$$p_i=0, \quad q_i=0, \quad r_i=\omega_i=\text{const},$$

и уравнения (8.2) дадут, как легко убедиться,

$$\psi_i=\psi_i^{(0)}=\text{const}, \quad \vartheta_i=\vartheta_i^{(0)}=\text{const}, \quad \varphi_i=\omega_i(t-t_0)+\varphi_i^{(0)}.$$

Второй важный для приложений частный случай будем иметь тогда, когда каждое из $k+1$ тел (например, тела M_0, M_1, ..., M_k) есть тело вращения, обладающее осесимметричным распределением плотностей (ось симметрии распределения плотностей должна совпадать с осью поверхности вращения, ограничивающей тело извне).

Тогда центр симметрии такого тела обязательно лежит на оси симметрии, которую и можно принять за ось аппликат собственной для такого тела системы координат. В этом случае *)

$$A_i = B_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k),$$

а силовая функция U не зависит от углов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Поэтому третьи уравнения группы (8.6′) дают

$$r_i = r_i^{(0)} = \text{const} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k). \tag{8.15′}$$

Эти интегралы позволяют понизить порядок системы на $2k$ единиц, так что решение задачи приведется к интегрированию системы $12(n+1) - 2k$-го порядка и определению затем переменных $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ простыми квадратурами соответствующих уравнений (8.2), которые дают

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)} + r_i^{(0)}(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} \dot{\psi}_i \cos\vartheta_i \, dt \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Полезно отметить, что в рассмотренном случае переменные углы собственного вращения тел $M_0, M_1, \ldots, M_k$ являются циклическими координатами системы. В самом деле, силовая функция U не зависит, как уже было замечено, от величин $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_k$. Живая сила T_i тела M_i, определяемая формулой (8.3), также не зависит от φ_i, так как

$$A_i p_i^2 + B_i q_i^2 = A_i(\sin^2\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i^2 + \dot{\vartheta}_i^2) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Следовательно, полная живая сила системы T также не зависит от величин $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$, т. е. эти величины являются, действительно, циклическими координатами.

Тогда уравнения (8.5) дают

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = c_i = \text{const} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Но

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\varphi}_i} = C_i r_i,$$

и мы опять приходим к интегралам (8.15′).

§ 3. Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения в относительных осях

1. Десять классических интегралов (8.11), (8.13) и (8.14) уравнений поступательно-вращательного движения $n+1$ тел в абсолютной системе координат позволяют, конечно, понизить порядок системы (8.7) на десять единиц.

*) См. § 4 гл. V этой книги, а также любой курс теоретической механики, например, книгу Г. К. Суслова, Теоретическая механика.