ственной для такого тела системы координат. В этом случае *)

$$A_i = B_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k),$$

а силовая функция U не зависит от углов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Поэтому третьи уравнения группы (8.6′) дают

$$r_i = r_i^{(0)} = \text{const} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k). \tag{8.15'}$$

Эти интегралы позволяют понизить порядок системы на $2k$ единиц, так что решение задачи приведется к интегрированию системы $12(n+1) - 2k$-го порядка и определению затем переменных $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ простыми квадратурами соответствующих уравнений (8.2), которые дают

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)} + r_i^{(0)}(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} \dot{\psi}_i \cos\vartheta_i \, dt \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Полезно отметить, что в рассмотренном случае переменные углы собственного вращения тел $M_0, M_1, \ldots, M_k$ являются циклическими координатами системы. В самом деле, силовая функция U не зависит, как уже было замечено, от величин $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Живая сила T_i тела M_i, определяемая формулой (8.3), также не зависит от φ_i, так как

$$A_i p_i^2 + B_i q_i^2 = A_i(\sin^2\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i^2 + \dot{\vartheta}_i^2) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Следовательно, полная живая сила системы T также не зависит от величин $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$, т. е. эти величины являются, действительно, циклическими координатами.

Тогда уравнения (8.5) дают

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = c_i = \text{const} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Но

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\varphi}_i} = C_i r_i,$$

и мы опять приходим к интегралам (8.15′).

§ 3. Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения в относительных осях

1. Десять классических интегралов (8.11), (8.13) и (8.14) уравнений поступательно-вращательного движения $n+1$ тел в абсолютной системе координат позволяют, конечно, понизить порядок системы (8.7) на десять единиц.

*) См. § 4 гл. V этой книги, а также любой курс теоретической механики, например, книгу Г. К. Суслова, Теоретическая механика.

Однако, так же как и в случае задачи о движении взаимно притягивающихся материальных точек, эффективным для практических приложений оказывается лишь использование для понижения порядка системы (8.7) шести интегралов движения центра инерции всей системы.

Для понижения порядка системы (8.7) перейдем от абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к относительной с началом в одной

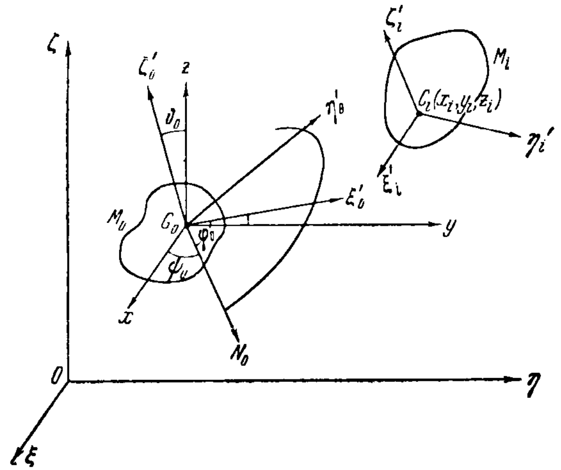

Рис. 45.

из точек G_i. Для определенности, возьмем начало координат новой системы в точке G_0, оставляя направления осей координат неизменными и параллельными соответствующим осям абсолютной системы (рис. 45).

Обозначим относительные координаты тела M_i (т. е. центра инерции G_i тела M_i) через x_i, y_i, z_i, так что будем иметь для $i=1, 2, \ldots, n$:

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0. \tag{8.16}$$

Другие переменные, т. е. эйлеровы углы всех тел системы, не изменятся, так как направления новых осей совпадают, как принято, с направлениями абсолютных осей.

Так как силовая функция U_{ij} взаимного притяжения двух тел M_i и M_j зависит только от разностей координат точек G_i и G_j *), то полная силовая функция U всей системы (8.4′) зави-

*) См. § 10 гл. I и § 6 гл. V. Это свойство и было использоваио для вывода интегралов движеиия центра иериции в предыдущем параграфе.

сит только от разностей абсолютных координат всех точек G_i и так как в силу (8.16)

$$\xi_j-\xi_i=x_j-x_i,\quad \eta_j-\eta_i=y_j-y_i,\quad \zeta_j-\zeta_i=z_j-z_i,$$

то после преобразования к новым переменным U будет функцией от $3n$ относительных координат точек G_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и от $3(n+1)$ эйлеровых углов всех $n+1$ тел системы.

Чтобы получить преобразованные уравнения, заметим, что, например,

$$\ddot{x}_i=\ddot{\xi}_i-\ddot{\xi}_0=\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}-\frac{1}{m_0}\frac{\partial U}{\partial \xi_0}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Но очевидно, что

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_0}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U_{j0}}{\partial \xi_0}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=\frac{\partial U}{\partial x_i}=\sum_{j=0}^{n}{}'\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

что позволяет написать

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}-\frac{1}{m_0}\frac{\partial U}{\partial \xi_0}=\frac{1}{m_i}\sum_{j=0}^{n}{}'\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i}+\frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}=$$

$$=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i}+\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{n}{}'\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i}+\frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{n}{}'\frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}=$$

$$=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i}+\frac{\partial R_i}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где положено для сокращения

$$R_i=\sum_{j=1}^{n}{}'\left\{\frac{1}{m_i}U_{ij}+\frac{1}{m_0}\left[x_i\frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}+y_i\frac{\partial U_{j0}}{\partial y_j}+z_i\frac{\partial U_{j0}}{\partial z_j}\right]\right\}.\qquad (8.17)$$

Составляя таким же образом выражения для вторых производных от y_i и z_i, мы можем написать уравнения поступательного движения тел $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n$ в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_i&=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i}+\frac{\partial R_i}{\partial x_i},\\ \ddot{y}_i&=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial y_i}+\frac{\partial R_i}{\partial y_i},\\ \ddot{z}_i&=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial z_i}+\frac{\partial R_i}{\partial z_i}.\end{aligned}\right\}\qquad (8.18)$$

Присоединяя к уравнениям (8.18) уравнения (8.6′) и (8.2), которые остаются неизменными *), мы получим полную систему уравнений второго порядка с таким же числом неизвестных функций:

$$\left.\begin{array}{c} x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n, \\ \psi_0,\ \varphi_0,\ \vartheta_0,\ \psi_1,\ \varphi_1,\ \vartheta_1,\ \ldots,\ \psi_n,\ \varphi_n,\ \vartheta_n. \end{array}\right\} \tag{8.19}$$

Для полученных уравнений можно написать четыре первых интеграла, преобразуя интегралы (8.13) и (8.14) к новым переменным. Мы не будем выписывать эти интегралы и заметим только, что те члены в равенствах (8.13) и (8.14), которые зависят от поступательного движения тел, должны быть заменены членами, совокупности которых образуют левые части равенств (7.27) и (7.27′), являющихся интегралами уравнений относительного движения материальных точек.

Если тело M_0 есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей, то U не зависит от углов ψ_0, φ_0, ϑ_0, а поэтому из уравнений (8.2) и (8.6) можно отбросить те, для которых $i=0$. Оставшиеся уравнения этих двух групп и уравнения (8.16) образуют тогда совместную систему порядка $12n$ с таким же числом неизвестных функций **).

2. Движения тел M_1, M_2, ..., M_n можно отнести также к системе осей координат, совпадающих с главными центральными осями инерции тела M_0, т. е. к системе координат, у которой и положение начала и направления осей не будут оставаться неизменными с течением времени ***).

При переходе к такой системе координат изменятся уравнения и поступательного и вращательного движения. Чтобы получить эти уравнения, нужно только выразить живую силу всей системы T в новых координатах, а затем написать вновь уравнения типа (8.5). Не останавливаясь для сокращения на промежуточных выкладках, мы приведем искомые уравнения в их окончательной форме.

Пусть x'_i, y'_i, z'_i суть координаты точек G_i относительно главных осей инерции тела M_0, т. е. относительно системы $G_0\xi'_0\eta'_0\zeta'_0$ (см. рис. 44); пусть, далее, p'_i, q'_i, r'_i суть проекции угловой скорости относительного движения тела M_i на главные центральные оси инерции этого тела и, наконец, p_0, q_0, r_0 — проекции угловой скорости тела M_0 на его оси инерции.

*) Нужно только, само собой разумеется, выразить силовую функцию U через относительные координаты. Конечно, выражение для U можно представить только рядом, как это было сделано для двух тел в гл. V.

**) В число неизвестных функций включаются также первые производные от относительных координат и эйлеровых углов.

***) См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, а также мою статью в Астрон. журн. 35, вып. 2, 1958.

Тогда уравнения поступательно-вращательного движения напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}'_i + 2(q_0\dot{z}'_i - r_0\dot{y}'_i) + z'_i\dot{q}_0 - y'_i\dot{r}_0 - x'_i\omega_0^2 + \\
&\qquad + p_0(p_0x'_i + q_0y'_i + r_0z'_i) = \frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial x'_i},\\
&\ddot{y}'_i + 2(r_0\dot{x}'_i - p_0\dot{z}'_i) + x'_i\dot{r}_0 - z'_i\dot{p}_0 - y'_i\omega_0^2 + \\
&\qquad + q_0(p_0x'_i + q_0y'_i + r_0z'_i) = \frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial y'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial y'_i},\\
&\ddot{z}'_i + 2(p_0\dot{y}'_i - q_0\dot{x}'_i) + y'_i\dot{p}_0 - x'_i\dot{q}_0 - z'_i\omega_0^2 + \\
&+ r_0(p_0x'_i + q_0y'_i + r_0z'_i) = \frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial z'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial z'_i},
\end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_i(\dot{p}'_i + \dot{p}_0^{(i)}) - (B_i - C_i)(q'_i + q_0^{(i)})(r'_i + r_0^{(i)}) = \\
&\qquad = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi'_i} - \cos\vartheta'_i\frac{\partial U}{\partial \varphi'_i}\right]\frac{\sin\varphi'_i}{\sin\vartheta'_i} + \cos\varphi'_i\frac{\partial U}{\partial \vartheta'_i},\\
&B_i(\dot{q}'_i + \dot{q}_0^{(i)}) - (C_i - A_i)(r'_i + r_0^{(i)})(p'_i + p_0^{(i)}) = \\
&\qquad = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi'_i} - \cos\vartheta'_i\frac{\partial U}{\partial \varphi'_i}\right]\frac{\cos\varphi'_i}{\sin\vartheta'_i} - \sin\varphi'_i\frac{\partial U}{\partial \vartheta'_i},\\
&\quad C_i(\dot{r}'_i + \dot{r}_0^{(i)}) - (A_i - B_i)(p'_i + p_0^{(i)})(q'_i + q_0^{(i)}) = \frac{\partial U}{\partial \varphi'_i},
\end{aligned}\right\} \tag{8.20$'$}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_0\dot{p}_0 - (B_0 - C_0)q_0r_0 = \\
&\qquad = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_0} - \cos\vartheta_0\frac{\partial U}{\partial \varphi_0}\right]\frac{\sin\varphi_0}{\sin\vartheta_0} + \cos\varphi_0\frac{\partial U}{\partial \vartheta_0},\\
&B_0\dot{q}_0 - (C_0 - A_0)r_0p_0 = \\
&\qquad = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_0} - \cos\vartheta_0\frac{\partial U}{\partial \varphi_0}\right]\frac{\cos\varphi_0}{\sin\vartheta_0} - \sin\varphi_0\frac{\partial U}{\partial \vartheta_0},\\
&C_0\dot{r}_0 - (A_0 - B_0)p_0q_0 = \frac{\partial U}{\partial \varphi_0},
\end{aligned}\right\} \tag{8.20$''$}$$

где

$$\omega_0^2 = p_0^2 + q_0^2 + r_0^2,$$

$$p_0^{(i)} = a'^{(i)}_{11}p_0 + a'^{(i)}_{21}q_0 + a'^{(i)}_{31}r_0,$$

$$q_0^{(i)} = a'^{(i)}_{12}p_0 + a'^{(i)}_{22}q_0 + a'^{(i)}_{32}r_0,$$

$$r_0^{(i)} = a'^{(i)}_{13}p_0 + a'^{(i)}_{23}q_0 + a'^{(i)}_{33}r_0,$$

и $a_{sk}^{\prime(i)}$ суть направляющие косинусы главных центральных осей инерции тела M_i по отношению к осям $G_0x'y'z'$.

Эти направляющие косинусы, а также величины p_i', q_i', r_i' и p_0, q_0, r_0 связаны с углами Эйлера ψ_i', φ_i', ϑ_i' и ψ_0, φ_0, ϑ_0 формулами, совершенно подобными формулам (1.27) и (8.2), так что выписывать эти формулы заново нет необходимости.

Силовая функция U, а также функции U_{i0} и R_i должны быть выражены через новые переменные, т. е. через

$$\left.\begin{array}{c} x_1', \ y_1', \ z_1', \ \ldots, \ x_n', \ y_n', \ z_n', \\ \psi_0, \ \varphi_0, \ \vartheta_0, \ \psi_1', \ \varphi_1', \ \vartheta_1', \ \ldots, \ \psi_n', \ \varphi_n', \ \vartheta_n', \end{array}\right\} \tag{8.21}$$

которые и являются неизвестными функциями в этой задаче.

Уравнения (8.20) значительно упрощаются, если тело M_0 есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей. Действительно, в этом случае, как было отмечено выше, $A_0=B_0=C_0$, и силовая функция не зависит от углов Эйлера ψ_0, φ_0, ϑ_0. Поэтому уравнения (8.20″) дают опять

$$p_0=\text{const}, \quad q_0=\text{const}, \quad r_0=\text{const}.$$

Таким образом, тело M_0 вращается вокруг неизменной оси с постоянной угловой скоростью ω_0. Выбирая теперь упомянутую неизменную ось за ось аппликат собственной для тела M_0 системы координат, мы будем иметь

$$p_0=0, \quad q_0=0, \quad r_0=\omega_0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} p_0^{(i)} &= a_{31}^{\prime(i)} r_0 = \omega_0 \sin\varphi_i' \sin\vartheta_i', \\ q_0^{(i)} &= a_{32}^{\prime(i)} r_0 = \omega_0 \cos\varphi_i' \sin\vartheta_i', \\ r_0^{(i)} &= a_{33}^{\prime(i)} r_0 = \omega_0 \cos\vartheta_i'. \end{aligned}$$

Полагая затем для сокращения

$$\bar{p}_i = p_i' + p_0^{(i)}, \quad \bar{q}_i = q_i' + q_0^{(i)}, \quad \bar{r}_i = r_i' + r_0^{(i)},$$

мы напишем уравнения поступательно-вращательного движения тел M_1, M_2, ..., M_n относительно вращающейся равномерно вместе с телом M_0 системы координат в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_i' - 2\omega_0 \dot{y}_i' - \omega_0^2 x_i' = \frac{m_0+m_i}{m_0 m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i'} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i'},\\
&\ddot{y}_i' + 2\omega_0 \dot{x}_i' - \omega_0^2 y_i' = \frac{m_0+m_i}{m_0 m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial y_i'} + \frac{\partial R_i}{\partial y_i'},\\
&\ddot{z}_i' = \frac{m_0+m_i}{m_0 m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial z_i'} + \frac{\partial R_i}{\partial z_i'},
\end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_i\dot{\bar{p}}_i - (B_i - C_i)\bar{q}_i\bar{r}_i = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i'} - \cos\vartheta_i'\frac{\partial U}{\partial \varphi_i'}\right]\frac{\sin\varphi_i'}{\sin\vartheta_i'} + \cos\varphi_i'\frac{\partial U}{\partial \vartheta_i'},\\
&B_i\dot{\bar{q}}_i - (C_i - A_i)\bar{r}_i\bar{p}_i = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i'} - \cos\vartheta_i'\frac{\partial U}{\partial \varphi_i'}\right]\frac{\cos\varphi_i'}{\sin\vartheta_i'} - \sin\varphi_i'\frac{\partial U}{\partial \vartheta_i'},\\
&C_i\dot{\bar{r}}_i - (A_i - B_i)\bar{p}_i\bar{q}_i = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i'},
\end{aligned}\right\} \tag{8.22'}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{p}_i = (\dot{\psi}_i' + \omega_0)\sin\varphi_i'\sin\vartheta_i' + \dot{\vartheta}_i'\cos\varphi_i',\\
&\bar{q}_i = (\dot{\psi}_i' + \omega_0)\cos\varphi_i'\sin\vartheta_i' - \dot{\vartheta}_i'\sin\varphi_i',\\
&\bar{r}_i = (\dot{\psi}_i' + \omega_0)\cos\vartheta_i' + \dot{\varphi}_i'.
\end{aligned}\right\} \tag{8.22''}$$

В частности, когда тело M_0 есть шар и $n=1$, мы напишем уравнения (8.22), отбрасывая для простоты значки, в следующем виде:

$$\ddot{x}' - 2\omega_0\dot{y}' - \omega_0^2 x' = \frac{m_0+m}{m_0 m}\frac{\partial U}{\partial x'},$$

$$\ddot{y}' + 2\omega_0\dot{x}' - \omega_0^2 y' = \frac{m_0+m}{m_0 m}\frac{\partial U}{\partial y'},$$

$$\ddot{z}' = \frac{m_0+m}{m_0 m}\frac{\partial U}{\partial z'},$$

$$A\dot{\bar{p}} - (B-C)\bar{q}\bar{r} = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi'} - \cos\vartheta'\frac{\partial U}{\partial \varphi'}\right]\frac{\sin\varphi'}{\sin\vartheta'} + \cos\varphi'\frac{\partial U}{\partial \vartheta'},$$

$$B\dot{\bar{q}} - (C-A)\bar{r}\bar{p} = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi'} - \cos\vartheta'\frac{\partial U}{\partial \varphi'}\right]\frac{\cos\varphi'}{\sin\vartheta'} - \sin\varphi'\frac{\partial U}{\partial \vartheta'},$$

$$C\dot{\bar{r}} - (A-B)\bar{p}\bar{q} = \frac{\partial U}{\partial \varphi'},$$

$$\bar{p} = (\dot{\psi}' + \omega_0)\sin\varphi'\sin\vartheta' + \dot{\vartheta}'\cos\varphi',$$

$$\bar{q} = (\dot{\psi}' + \omega_0)\cos\varphi'\sin\vartheta' - \dot{\vartheta}'\sin\varphi',$$

$$\bar{r} = (\dot{\psi}' + \omega_0)\cos\vartheta' + \dot{\varphi}',$$

где

$$U = f\int\limits_{(M_0)} dm_0 \int\limits_{(M)} \frac{dm}{\Delta} = fm_0 \int\limits_{(M)} \frac{dm}{\Delta},$$

есть функция только шести переменных,

$$x',\ y',\ z',\ \psi',\ \varphi',\ \vartheta',$$

т. е. трех координат x', y', z' центра инерции тела M во вращающейся равномерно системе координат, связанной с телом-шаром M_0, а ψ', φ', ϑ' суть эйлеровы углы, определяющие ориентацию тела M в той же системе координат.

Если тело M также есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей, то $A=B=C$, и силовая функция не зависит от углов ψ', φ', ϑ'.

Поэтому предыдущие уравнения дают $\bar{p}=\mathrm{const}$, $\bar{q}=\mathrm{const}$, $\bar{r}=\mathrm{const}$, а первые три уравнения определяют поступательное движение тела M относительно осей, неизменно связанных с телом M_0.

§ 4. Приближенные уравнения поступательно-вращательного движения

1. Для интегрирования дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения как в абсолютных так и в относительных осях необходимо знать выражение силовой функции U, в зависимости от тех зависимых переменных, которые желательно определить. Однако в общем случае силовая функция представляется (см. формулы (8.4) и (8.4′)) в виде суммы интегралов, каждый из которых имеет кратность не меньшую двух и не большую шести. Все эти интегралы вообще не вычисляются в конечном виде и могут быть выражены только при помощи бесконечных рядов того или иного вида.

В § 6 гл. V было показано, как можно получить разложение силовой функции взаимного притяжения двух тел, независимо от их формы и структуры. Применяя полученные там формулы к любым двум телам M_i и M_j, мы будем иметь следующие разложения:

$$U_{ij} = f\sum_{s=0}^{\infty} \frac{U_{ij}^{(s)}}{R_{ij}^{2s+1}}, \tag{8.23}$$

где в абсолютной системе координат

$$R_{ij} = \sqrt{(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2+(\zeta_j-\zeta_i)^2}$$

есть расстояние между центрами инерции G_i и G_j рассматриваемых тел, а $U_{ij}^{(s)}$ — некоторые многочлены относительно абсолют-