где

$$U = f\int_{(M_0)} dm_0 \int_{(M)} \frac{dm}{\Delta} = fm_0\int_{(M)} \frac{dm}{\Delta},$$

есть функция только шести переменных,

$$x',\ y',\ z',\ \psi',\ \varphi',\ \vartheta',$$

т. е. трех координат x', y', z' центра инерции тела M во вращающейся равномерно системе координат, связанной с телом-шаром M_0, а ψ', φ', ϑ' суть эйлеровы углы, определяющие ориентацию тела M в той же системе координат.

Если тело M также есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей, то $A=B=C$, и силовая функция не зависит от углов ψ', φ', ϑ'.

Поэтому предыдущие уравнения дают $\bar{p}=\text{const}$, $\bar{q}=\text{const}$, $\bar{r}=\text{const}$, а первые три уравнения определяют поступательное движение тела M относительно осей, неизменно связанных с телом M_0.

§ 4. Приближенные уравнения поступательно-вращательного движения

1. Для интегрирования дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения как в абсолютных так и в относительных осях необходимо знать выражение силовой функции U, в зависимости от тех зависимых переменных, которые желательно определить. Однако в общем случае силовая функция представляется (см. формулы (8.4) и (8.4′)) в виде суммы интегралов, каждый из которых имеет кратность не меньшую двух и не большую шести. Все эти интегралы вообще не вычисляются в конечном виде и могут быть выражены только при помощи бесконечных рядов того или иного вида.

В § 6 гл. V было показано, как можно получить разложение силовой функции взаимного притяжения двух тел, независимо от их формы и структуры. Применяя полученные там формулы к любым двум телам M_i и M_j, мы будем иметь следующие разложения:

$$U_{ij} = f\sum_{s=0}^{\infty} \frac{U_{ij}^{(s)}}{R_{ij}^{2s+1}}, \tag{8.23}$$

где в абсолютной системе координат

$$R_{ij} = \sqrt{(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2+(\zeta_j-\zeta_i)^2}$$

есть расстояние между центрами инерции G_i и G_j рассматриваемых тел, а $U_{ij}^{(s)}$ — некоторые многочлены относительно абсолютных координат G_i и G_j, коэффициенты которых зависят от эйлеровых углов обоих тел.

Первые члены разложений (8.23), как было выведено в § 6 гл. V, имеют следующий вид:

$$U_{ij}=f\frac{m_i m_j}{R_{ij}}+fm_j\frac{A_i+B_i+C_i-3I_i^{(i,\,j)}}{2R_{ij}^3}+ \\ +fm_i\frac{A_j+B_j+C_j-3I_j^{(i,\,j)}}{2R_{ij}^3}+\ldots, \qquad (8.24)$$

где $I_i^{(i,\,j)}$ и $I_j^{(i,\,j)}$ суть моменты инерции тел M_i и M_j относительно прямой, проходящей через центры инерции этих тел, т. е.

$$\left.\begin{aligned} I_i^{(i,\,j)}&=A_i\alpha_{ij}^2+B_i\beta_{ij}^2+C_i\gamma_{ij}^2,\\ I_j^{(i,\,j)}&=A_j\alpha_{ji}^2+B_j\beta_{ji}^2+C_j\gamma_{ji}^2,\end{aligned}\right\} \qquad (8.25)$$

где α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} суть косинусы углов, образуемых прямой G_iG_j с главными центральными осями инерции тела *) M_i, а α_{ji}, β_{ji}, γ_{ji} суть аналогичные величины для тела M_j.

Поэтому имеем (аналогично формулам § 6 гл. V)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ij}&=(\cos\psi_i\cos\varphi_i-\sin\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}}+\\ &\quad+(\sin\psi_i\cos\varphi_i+\cos\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\eta_j-\eta_i}{R_{ij}}+\\ &\quad+\sin\varphi_i\sin\vartheta_i\frac{\zeta_j-\zeta_i}{R_{ij}},\\ \beta_{ij}&=(-\cos\psi_i\sin\varphi_i-\sin\psi_i\cos\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}}+\\ &\quad+(-\sin\psi_i\sin\varphi_i+\cos\psi_i\cos\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\eta_j-\eta_i}{R_{ij}}+\\ &\quad+\cos\varphi_i\sin\vartheta_i\frac{\zeta_j-\zeta_i}{R_{ij}},\\ \gamma_{ij}&=\sin\psi_i\sin\vartheta_i\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}}-\cos\psi_i\sin\vartheta_i\frac{\eta_j-\eta_i}{R_{ij}}+\\ &\quad+\cos\vartheta_i\frac{\zeta_j-\zeta_i}{R_{ij}}.\end{aligned}\right\} \qquad (8.26)$$

*) Напоминаем, что главные центральные оси инерции каждого тела приняты за оси собственной для этого тела системы координат. Отметим еще, что $\alpha_{ji}\neq\alpha_{ij}$, $\beta_{ji}\neq\beta_{ij}$, $\gamma_{ji}\neq\gamma_{ij}$.

Величины α_{ji}, β_{ji}, γ_{ji} получатся из формул (8.26) простой заменой ψ_i, φ_i, ϑ_i на эйлеровы углы тела M_j, т. е. иа ψ_j, φ_j, ϑ_j.

2. Рассмотрим теперь вопрос о расщеплении полной системы диффереициальных уравиений поступательио-вращательного движения тел на две независимые или полунезависимые системы уравнений, каждая из которых определяла бы отдельио поступательные или вращательиые движения.

В § 2 этой главы было уже отмечено, что если каждое тело системы есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей, то полная силовая фуикция системы приводится к виду

$$U^{(0)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}U_{ij}^{(0)}=\frac{1}{2}f\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{m_i m_j}{R_{ij}} \tag{8.27}$$

и зависит только от координат точек G_i. Поэтому в этом случае уравиения абсолютного движения (8.7) распадаются на две независимые системы, одна из которых,

$$m_i\ddot{\xi}_i=\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \xi_i}, \qquad m_i\ddot{\eta}_i=\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \eta_i}, \qquad m_i\ddot{\zeta}_i=\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \zeta_i}, \tag{8.28}$$

определяет только поступательные движения наших тел-шаров, а вторая показывает, что каждое из тел-шаров M_i вращается вокруг иеизменной оси, проходящей через его центр, с постоянной угловой скоростью.

Таким образом, в этом (впрочем, довольно тривиальном) случае мы имеем полное расщепление общей системы.

Совершенно очевидно, что во всяком другом случае мы ие будем иметь полиого расщепления системы (8.7) иа две независимые системы, так как силовая функция U обязательно будет зависеть и от коордииат точек G_i и от эйлеровых углов тел M_i.

Одиако в конкретных задачах небесной механики мы не имеем возможиости составить полное выражение U и принуждеиы использовать только ее приближеиное выражеиие, представляемое суммой нескольких первых членов рядов вида (8.23).

Рассматривая опять систему произвольных твердых тел, посмотрим теперь, с какой степеиью приближения, считая все расстояния достаточио большими по сравнению с линейными размерами тел, можно отделить уравнеиия поступательного движения от уравнений вращательного движения и получить, таким образом, вместо одной, весьма сложиой, задачи — две, каждая из которых несколько проще.

Первые члены рядов (8.23) даются формулами (8.24), в которых первые члены суть величииы первого порядка относительио обратных расстояиий, а вторые — третьего порядка *).

*) Все остальные члены рядов (8.23) суть величины порядка выше третьего относительно обратных расстояний R_{ij}.

Считая, что наименьшее из обратных расстояний R_{ij} между телами системы таково, что третья степень его обратного значеиия есть величина настолько малая, что ею можно пренебречь, мы можем заменить полную силовую функцию U ее приближеиным выражением U^0 по формуле (8.27)*). В этом приближении силовая функция будет зависеть только от прямоугольиых коордиинат точек G_i, а поэтому общие уравнения поступательио-вращательного движения разделятся на две системы.

Первая система, система (8.28), определит только поступательные движения тел, так же как если бы каждое из них было материальиой точкой, а вторая система, получаемая из (8.6′) заменой U на U^0, которая ие зависит от углов Эйлера, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot{p}_i-(B_i-C_i)\,q_ir_i&=0,\\ B_i\dot{q}_i-(C_i-A_i)\,r_ip_i&=0,\\ C_i\dot{r}_i-(A_i-B_i)\,p_iq_i&=0\\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).& \end{aligned}\right\} \tag{8.28′}$$

Таким образом, при указанной степени приближения силовой функции поступательные и вращательные движения тел не зависят друг от друга. Кроме того, очевидно, что вся система (8.28′) распадается иа $n+1$ независимых систем, каждая из которых определяет вращательное движение каждого из тел системы так, как будто бы оио не подвергается воздействиям виешних сил (случай Эйлера вращеиия абсолютно твердого тела). Известно, что каждая из систем (8.28′) интегрируется в квадратурах при помощи эллиптических функций.

Если же кубами обратных расстояний пренебречь невозможно, то силовая функция необходимо будет зависеть от всех переменных (8.1), и уравнения (8.6), (8.6′) или (8.7) не разделятся на две независимые системы.

Однако более правильно отбрасывать члены выше известного порядка *не в силовой фуикции*, а в самих дифферeнциальных уравнеииях, т. е. в частиых производных от силовой функции по переменным (8.1).

Дифференцируя разложение (8.23) по перемеиным (8.1), мы получим соответствующие разложеиия для составляющих силы притяжения, действующей на тело M_i (со стороиы тела M_j), и для составляющих момента этой силы, т. е. получим разложения правых частей уравиений (8.6) и (8.6′) или (8.7).

*) Обратиые значения взаимных расстояний, превышающих наименьшее, очевидно, суть величины еще более малые, так что их третьими степенями также можно пренебречь.

Таким образом, получим следующие разложения:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i} = f \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\dfrac{\partial U_{ij}^{(k)}}{\partial \xi_i}}{R_{ij}^{2k+1}} + \frac{(2k+1)(\xi_j - \xi_i)}{R_{ij}^{2k+3}} U_{ij}^{(k)} \right\} \tag{8.29}$$

(аналогично для двух других составляющих) и

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i} = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\dfrac{\partial U_{ij}^{(k)}}{\partial \varphi_i}}{R_{ij}^{2k+1}} \tag{8.29'}$$

(аналогично для двух других производных).

Далее, очевидно, можем написать

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \sum_{j=0}^{n}{}' \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i}, \tag{8.30}$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = \sum_{j=0}^{n}{}' \frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i} \tag{8.30'}$$

(аналогично и для всех остальных производных).

Если ограничиться приближенным выражением (8.24) силовой функции взаимного притяжения двух тел, то получим соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i} = f m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^3} + \frac{3}{2} f m_i \left[A_j + B_j + C_j - 3I_j^{(i,\, j)}\right] \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^5} + \\ + \frac{3}{2} f m_j \left[A_i + B_i + C_i - 3I_i^{(i,\, j)}\right] \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^5} - \\ - \frac{3}{2} \frac{f m_i}{R_{ij}^3} \frac{\partial I_i^{(i,\, j)}}{\partial \xi_i} - \frac{3}{2} \frac{f m_j}{R_{ij}^3} \frac{\partial I_j^{(i,\, j)}}{\partial \xi_i} + \ldots \end{aligned} \tag{8.31}$$

и

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i} = -\frac{3}{2} \frac{f m_j}{R_{ij}^3} \frac{\partial I_i^{(i,\, j)}}{\partial \varphi_i} + \ldots \tag{8.31'}$$

где, ввиду (8.25) ($s = i,\, j$),

$$\frac{\partial I_s^{(i,\, j)}}{\partial \xi_i} = 2A_s \alpha_{ij} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \xi_i} + 2B_s \beta_{ij} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \xi_i} + 2C_s \gamma_{ij} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_i},$$

$$\frac{\partial I_s^{(i,\, j)}}{\partial \varphi_i} = 2A_s \alpha_{ij} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varphi_i} + 2B_s \beta_{ij} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \varphi_i} + 2C_s \gamma_{ij} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varphi_i}.$$

Подобным же образом можно получить выражения и для всех остальных частных производных от U_{ij}, а значит, и от полной силовой функции U. Входящие в эти выражения производные по величинам (8.1) от направляющих косинусов находятся легко дифференцированием формул (8.26) и им подобных. Например, мы имеем

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \xi_i} = (\cos\psi_i \cos\varphi_i - \sin\psi_i \sin\varphi_i \cos\vartheta_i)\left[-\frac{1}{R_{ij}} + \frac{(\xi_j - \xi_i)^2}{R_{ij}^3}\right] - \\ - (\sin\psi_i \cos\varphi_i + \cos\psi_i \sin\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{(\xi_j - \xi_i)(\eta_j - \eta_i)}{R_{ij}^3} - \\ - \sin\varphi_i \sin\vartheta_i \frac{(\xi_j - \xi_i)(\zeta_j - \zeta_i)}{R_{ij}^3}.$$

Рассматривая полученные выражеиия для частных производных от силовой функции U_{ij}, мы можем заметить, что первый член в (8.31) есть величина второго порядка относительно обратного расстояиия, первый члеи в (8.31′) — третьего порядка, а все остальные члены в (8.31) и (8.31′) соответственно выше второго и третьего порядков *).

Поэтому если в интересующей нас задаче обратная величина наименьшего из всех расстояний может рассматриваться как малая величина первого порядка и мы желаем сохранить в уравнениях (8.6) и (8.6′) члены одинакового порядка, то придем к следующему:

Сохраняя члены только второго порядка относительио обратных расстояний **), мы должны положить в уравнениях (8.6)

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i} = f m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^3} = \frac{\partial U_{ij}^0}{\partial \xi_i},$$

а в уравнениях (8.6′) все частные производные от силовой функции должны заменить нулями. Тогда, очевидно, мы получим вместо (8.6) и (8.6′) уравнения (8.28) и (8.28′), т. е. будем иметь тот же эффект, как если бы замеиили полную силовую функцию U функцией U^0.

---

*) Нужно обратить внимание на то, что величины типа $\frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}}$ представляют собой направляющие косинусы и могут иметь любое числовое значение от нуля до единицы. Кроме того, нужно иметь в виду, что следующий член в (8.31) есть величина уже четвертого порядка.

**) Мы рассматриваем величину, обратную наименьшему из расстояний, как малую первого порядка. Разумеется, среди остальных обратных расстояний могут найтись величины более высокого порядка, которые могут быть отброшены. В этих случаях мы будем иметь некоторое упрощение.

Если желательно сохранить в дифференциальных уравнениях члены второго и третьего порядков, а все члены, начиная с членов четвертого порядка — отбросить, то в уравнениях (8.6) мы опять должны положить

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i} = f m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^3},$$

и тогда уравнения (8.6) опять приведутся к системе (8.28), которая не содержит эйлеровых углов и может быть интегрирована отдельно.

Но в уравнениях (8.6′) с той же точностью нужно положить

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i} = -\frac{3}{2} \frac{f m_j}{R_{ij}^3} \frac{\partial I_i^{(i,\,j)}}{\partial \varphi_i}.$$

Тогда правые части уравнений (8.6′) будут функциями и эйлеровых углов и координат точек G_i. Предполагая, что уравнения поступательного движения (8.28) (т. е. уравнения, определяющие движение системы взаимно притягивающихся материальных точек) проинтегрированы, мы можем подставить в уравнения (8.6′) вместо координат ξ_i, η_i, ζ_i найденные выражения их в функции времени и произвольных постоянных, после чего правые части уравнений (8.6′) сделаются функциями эйлеровых углов и времени. Эти уравнения образуют тогда совместную систему порядка $6n+6$ и интегрирование этих уравнений определит вращательные движения тел системы с принятой степенью точности.

Легко теперь видеть, что в следующем приближении, т. е. когда мы пожелаем сохранить в уравнениях (8.6) и (8.6′) все члены до четвертого порядка включительно, эти уравнения уже не будут распадаться на две независимые (или полунезависимые) системы и должны интегрироваться совместно.

Рассмотрим теперь вопрос об интегралах приближенных уравнений поступательно-вращательного движения.

Представим для этой цели полную силовую функцию U_{ij} в следующем виде:

$$U_{ij} = U_{ij}^0 + U_{ij}^{(1)} + \ldots, \tag{8.32}$$

где

$$U_{ij}^{(1)} = f m_j \frac{A_i + B_i + C_i - 3I_i^{(i,\,j)}}{2R_{ij}^3} + f m_i \frac{A_j + B_j + C_j - 3I_j^{(i,\,j)}}{2R_{ij}^3}, \tag{8.32′}$$

а все невыписанные члены имеют более высокий порядок.

Сохраняя в дифференциальных уравнениях (8.6) и (8.6′) только члены второго и третьего порядков (относительно обратных расстояний) мы, по существу, заменяем в уравнениях (8.6) полную силовую функцию функцией U^0, а в уравнениях (8.6′) — функцией $U^{(1)}$. Тогда уравнения (8.6) превращаются в уравнения (8.28) и имеют все десять классических интегралов.

Что касается уравнений (8.6′), определяющих вращательные движения тел, когда их поступательные движения уже известны, то здесь дело обстоит следующим образом.

Интегралы движения центра инерции не зависят от вращательных движений тел, поэтому к системе (8.6′) эти интегралы не имеют никакого отношения.

Интегралы (8.13) и (8.14) справедливы для полной системы уравнений поступательно-вращательного движения и сохраняются также при замене точной силовой функции ее приближением.

В силу уравнений поступательного движения (8.28) момент количества движения (поступательного) сохраняет постоянное значение во все время движения, а поэтому мы имеем также равенства

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\left(A_i p_i a_{11}^{(i)} + B_i q_i a_{12}^{(i)} + C_i r_i a_{13}^{(i)}\right) = \bar{c}_1,\\ \sum_{i=0}^{n}\left(A_i p_i a_{21}^{(i)} + B_i q_i a_{22}^{(i)} + C_i r_i a_{23}^{(i)}\right) = \bar{c}_2,\\ \sum_{i=0}^{n}\left(A_i p_i a_{31}^{(i)} + B_i q_i a_{32}^{(i)} + C_i r_i a_{33}^{(i)}\right) = \bar{c}_3,\end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

представляющие собой первые интегралы уравнений вращательного движения и выражающие принцип сохранения момента вращательного движения системы.

Далее, для системы (8.28) имеем еще интеграл живой силы, который имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2\right) = U^0 + h^0. \tag{8.34}$$

В силу этого соотношения равенство (8.14) примет следующую форму:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2\right) = U^{(1)} + h^{(1)}, \tag{8.34′}$$

и может рассматриваться как приближенный интеграл уравнений вращательного движения.