§ 5. Канонические уравнения поступательно-вращательного движения

В заключение этой главы представим уравнения поступательно-вращательного движения в абсолютных осях (8.7) в канонической форме, что, очевидно, возможно, так как упомянутые уравнения являются следствиями уравнений (8.5), которые суть уравнения Лагранжа второго рода.

Примем за обобщенные координаты Лагранжа абсолютные координаты точек G_i и эйлеровы углы тел системы и определим сопряженные им канонические импульсы посредством общих формул:

$$\left.\begin{aligned}
&u_i=\frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}_i}=m_i\dot{\xi}_i,\quad v_i=\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}_i}=m_i\dot{\eta}_i,\quad w_i=\frac{\partial T}{\partial\dot{\zeta}_i}=m_i\dot{\zeta}_i,\\
&\Psi_i=\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}_i}=A_ip_i\sin\varphi_i\sin\vartheta_i+B_iq_i\cos\varphi_i\sin\vartheta_i+C_ir_i\cos\vartheta_i,\\
&\Phi_i=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_i}=C_ir_i,\\
&\Theta_i=\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}_i}=A_ip_i\cos\varphi_i-B_iq_i\sin\varphi_i.
\end{aligned}\right\}\tag{8.35}$$

Тогда характеристическая (или гамильтонова) функция определится формулой

$$H=T-U=\\
=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\{m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2)+A_ip_i^2+B_iq_i^2+C_ir_i^2\}-U\tag{8.36}$$

и представляет полную энергию рассматриваемой системы взаимно притягивающихся тел.

Теперь уравнения поступательно-вращательного движения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\xi}_i=\frac{\partial H}{\partial u_i},\quad \dot{u}_i=-\frac{\partial H}{\partial\xi_i},\quad \dot{\psi}_i=\frac{\partial H}{\partial\Psi_i},\quad \dot{\Psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial\psi_i},\\
&\dot{\eta}_i=\frac{\partial H}{\partial v_i},\quad \dot{v}_i=-\frac{\partial H}{\partial\eta_i},\quad \dot{\varphi}_i=\frac{\partial H}{\partial\Phi_i},\quad \dot{\Phi}_i=-\frac{\partial H}{\partial\varphi_i},\\
&\dot{\zeta}_i=\frac{\partial H}{\partial w_i},\quad \dot{w}_i=-\frac{\partial H}{\partial\zeta_i},\quad \dot{\vartheta}_i=\frac{\partial H}{\partial\Theta_i},\quad \dot{\Theta}_i=-\frac{\partial H}{\partial\vartheta_i}.
\end{aligned}\right\}\tag{8.37}$$

Остается выразить характеристическую функцию H через канонические переменные, для чего достаточно в выражение (8.3) для кинетической энергии тела M_i подставить вместо производных от абсолютных координат и эйлеровых углов их выражения через обобщенные скорости, определяемые формулами (8.35), из которых находим:

$$\dot{\xi}_i = \frac{1}{m_i} u_i, \qquad \dot{\eta}_i = \frac{1}{m_i} v_i, \qquad \dot{\zeta}_i = \frac{1}{m_i} w_i,$$

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\operatorname{cosec} \vartheta_i}{A_i} [\Psi_i \sin\varphi_i - \Phi_i \sin\varphi_i \cos\vartheta_i + \Theta_i \cos\varphi_i \sin\vartheta_i], \\ q_i &= \frac{\operatorname{cosec} \vartheta_i}{B_i} [\Psi_i \cos\varphi_i - \Phi_i \cos\varphi_i \cos\vartheta_i - \Theta_i \sin\varphi_i \sin\vartheta_i], \\ r_i &= \frac{1}{C_i} \Phi_i. \end{aligned}\right\} \quad (8.35')$$

Подставляя эти выражения в формулу (8.3), получим

$$T_i = \frac{1}{2m_i}(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) +$$
$$+ \frac{\operatorname{cosec}^2 \vartheta_i}{2A_i} [\Psi_i \sin\varphi_i - \Phi_i \sin\varphi_i \cos\vartheta_i + \Theta_i \cos\varphi_i \sin\vartheta_i]^2 +$$
$$+ \frac{\operatorname{cosec}^2 \vartheta_i}{2B_i} [\Psi_i \cos\varphi_i - \Phi_i \cos\varphi_i \cos\vartheta_i - \Theta_i \sin\varphi_i \sin\vartheta_i]^2 + \frac{1}{2C_i} \Phi_i^2,$$

после чего найдем полную живую силу (кинетическую энергию) по формуле (8.3′) и функцию Гамильтона по формуле (8.36) *).

Система (8.37) представляет собой, так же как и уравнения абсолютного движения, систему $12(n+1)$ дифференциальных уравнений первого порядка с таким же числом неизвестных функций, которыми являются канонические переменные — абсолютные координаты точек G_i, эйлеровы углы и импульсы, определяемые формулами (8.35).

Уравнения (8.37) имеют, разумеется, те же десять первых интегралов, которые получаются из соотношений (8.11), (8.13) и (8.14) заменой истинных скоростей их выражениями (8.35′).

*) Буквы Ψ, Φ, Θ в этом параграфе обозначают, конечно, другие величины, чем в уравнениях (8.7).