ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
НЕВОЗМУЩЕННОЕ КЕПЛЕРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

ГЛАВА IX
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения невозмущенного кеплеровского движения

1. В этой главе будет подробно рассмотрен важный частный случай общей задачи многих тел (материальных точек!), когда система состоит всего из двух материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Дифференциальные уравнения движения в этой задаче, называемой обычно **задачей двух тел**, можно, конечно, вывести непосредственно, но можно и написать сразу, полагая в общей задаче $n=1$.

В абсолютной системе координат мы получим нужные уравнения из уравнений (7.1) и формул (7.2) (см. § 1 гл. VII) в виде

$$\left.\begin{aligned}
m_0\ddot{\xi}_0 &= f m_0 m_1 \frac{\xi_1-\xi_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1\ddot{\xi}_1 &= f m_1 m_0 \frac{\xi_0-\xi_1}{\Delta_{10}^3},\\
m_0\ddot{\eta}_0 &= f m_0 m_1 \frac{\eta_1-\eta_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1\ddot{\eta}_1 &= f m_1 m_0 \frac{\eta_0-\eta_1}{\Delta_{10}^3},\\
m_0\ddot{\zeta}_0 &= f m_0 m_1 \frac{\zeta_1-\zeta_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1\ddot{\zeta}_1 &= f m_1 m_0 \frac{\zeta_0-\zeta_1}{\Delta_{10}^3},
\end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

где

$$\Delta_{10}=\Delta_{01}=\sqrt{(\xi_1-\xi_0)^2+(\eta_1-\eta_0)^2+(\zeta_1-\zeta_0)^2}=\Delta.$$

Вводя в рассмотрение силовую функцию, которая в этой задаче приводится к одному члену (см. общую формулу (7.4))

$$U=f\frac{m_0m_1}{\Delta}, \tag{9.2}$$

мы можем также написать уравнения (9.1) в виде

$$m_i\ddot{\xi}_i=\frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i=\frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}_i=\frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \qquad (i=0,\ 1). \tag{9.1$'$}$$

Шесть уравнений (9.1) образуют систему двенадцатого порядка, для которой мы можем написать десять первых интегралов, получающихся из (7.8″), (7.10) и (7.11) при $n=1$:

$$\left.\begin{aligned} m_0\xi_0+m_1\xi_1&=a_1t+b_1, & m_0\dot{\xi}_0+m_1\dot{\xi}_1&=a_1,\\ m_0\eta_0+m_1\eta_1&=a_2t+b_2, & m_0\dot{\eta}_0+m_1\dot{\eta}_1&=a_2,\\ m_0\zeta_0+m_1\zeta_1&=a_3t+b_3, & m_0\dot{\zeta}_0+m_1\dot{\zeta}_1&=a_3,\end{aligned}\right\}\tag{9.3}$$

$$\left.\begin{aligned} m_0(\eta_0\dot{\zeta}_0-\zeta_0\dot{\eta}_0)+m_1(\eta_1\dot{\zeta}_1-\zeta_1\dot{\eta}_1)&=c_1,\\ m_0(\zeta_0\dot{\xi}_0-\xi_0\dot{\zeta}_0)+m_1(\zeta_1\dot{\xi}_1-\xi_1\dot{\zeta}_1)&=c_2,\\ m_0(\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0)+m_1(\xi_1\dot{\eta}_1-\eta_1\dot{\xi}_1)&=c_3,\end{aligned}\right\}\tag{9.3′}$$

$$T=\frac{1}{2}m_0\left(\dot{\xi}_0^2+\dot{\eta}_0^2+\dot{\zeta}_0^2\right)+\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\xi}_1^2+\dot{\eta}_1^2+\dot{\zeta}_1^2\right)=U+h.\tag{9.3″}$$

При помощи этих десяти интегралов можно было бы понизить порядок системы (9.1) на десять единиц, а исключая еще время, привести окончательно эту систему к одному дифференциальному уравнению первого порядка, разрешаемому квадратурой.

Однако сначала мы используем для понижения порядка системы (9.1) только шесть первых интегралов (9.3), определяющих движение центра масс двух точек M_0 и M_1 в абсолютных осях.

Отнесем движения обеих материальных точек M_0 и M_1 к барицентрической системе координат с началом в центре масс G и с неизменными направлениями осей. Тогда уравнения относительного движения точки M_1 получатся из общих уравнений (7.22) и напишутся, как легко проверить, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_1'&=-\frac{fm_0^3}{(m_0+m_1)^2}\,\frac{\xi_1'}{r_1'^3},\\ \ddot{\eta}_1'&=-\frac{fm_0^3}{(m_0+m_1)^2}\,\frac{\eta_1'}{r_1'^3},\\ \ddot{\zeta}_1'&=-\frac{fm_0^3}{(m_0+m_1)^2}\,\frac{\zeta_1'}{r_1'^3},\end{aligned}\right\}\tag{9.4}$$

где

$$r_1'=\sqrt{\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2}$$

есть расстояние точки M_1 от начала координат, т. е. от центра масс G обеих точек.

Система (9.4) есть система шестого порядка, определяющая относительное движение точки M_1. Как будет показано следующем параграфе, эту систему можно полностью проинтегрировать, т. е. получить барицентрические координаты ξ_1', η_1', ζ_1' точки M_1 как явные функции времени и шести произвольных постоянных интегрирования. После этого барицентрические координаты точки M_0 найдутся весьма просто без всякого интегрирования.

Действительно, из формул (7.21) или просто по свойствам центра масс мы имеем

$$m_0\xi_0' + m_1\xi_1' = 0, \quad m_0\eta_0' + m_1\eta_1' = 0, \quad m_0\zeta_0' + m_1\zeta_1' = 0,$$

откуда

$$\xi_0' = -\frac{m_1}{m_0}\xi_1', \quad \eta_0' = -\frac{m_1}{m_0}\eta_1', \quad \zeta_0' = -\frac{m_1}{m_0}\zeta_1'.$$

Кроме того, отсюда следует, что координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_0' &= -\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2}\frac{\xi_0'}{r_0'^3}, \\ \ddot{\eta}_0' &= -\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2}\frac{\eta_0'}{r_0'^3}, \\ \ddot{\zeta}_0' &= -\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2}\frac{\zeta_0'}{r_0'^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (9.4')$$

где

$$r_0' = \frac{m_1}{m_0}r_1' = \sqrt{\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2}.$$

Мы видим, что системы (9.4) и (9.4′) имеют совершенно одинаковый вид, отличаясь только зависящим от масс точек множителем в правых частях этих уравнений.

Отсюда можно заключить, что движения точек M_0 и M_1 в одной и той же барицентрической системе координат обладают одинаковыми свойствами и совершенно подобны друг другу.

Уравнения (9.4) являются точными уравнениями задачи двух тел-точек, но в некоторых случаях эти уравнения можно также рассматривать как уравнения первого приближения в общей задаче многих тел (рассматриваемых как материальные точки).

Действительно, вернемся опять к уравнениям (7.22) гл. VII, определяющим относительные движения n тел-точек в барицентрической системе координат.

Предположим, что массы тел-точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, как это часто бывает в конкретных астрономических задачах, весьма малы по сравнению с массой тела M_0.

Допустим также, что взаимные расстояния Δ_{ij} никогда не делаются слишком малыми. Тогда все члены в правых частях уравнений (7.22), кроме членов, имеющих множителем сумму масс m_0+m_i, будут весьма малыми, что дает основание пренебречь этими членами и получить, таким образом, уравнения, мало отличающиеся от точных уравнений рассматриваемой задачи.

Делая это, мы получим вместо точных уравнений (7.22) **приближенные уравнения**, которые напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}'_i &= -\frac{fm_0^3}{(m_0+m_i)^2}\frac{\xi'_i}{r_i'^3}, \\ \ddot{\eta}'_i &= -\frac{fm_0^3}{(m_0+m_i)^2}\frac{\eta'_i}{r_i'^3}, \\ \ddot{\zeta}'_i &= -\frac{fm_0^3}{(m_0+m_i)^2}\frac{\zeta'_i}{r_i'^3}, \end{aligned}\right\} \tag{9.4''}$$

где величины

$$r'_i = \sqrt{\xi_i'^2+\eta_i'^2+\zeta_i'^2} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

обозначают, так же как и выше, расстояния точек M_i от их общего центра масс G.

Так как правые части уравнений (9.4″) зависят от барицентрических координат только одной точки M_i, то система (9.4″) состоит из n отдельных независимых систем, каждая из которых описывает **в первом приближении** движение только одной из точек M_i.

Очевидно, что эти уравнения первого приближения (9.4″) имеют совершенно такой же вид, как и точные уравнения (9.4) задачи двух тел-точек. Поэтому и для решения точной задачи двух тел и для решения приближенной задачи многих тел нужно интегрировать одну и ту же систему дифференциальных уравнений типа (9.4).

2. Рассмотрим теперь уравнения (7.24) гл. VII, определяющие движения тел-точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ относительно точки M_0.

В простейшем случае, когда $n=1$, мы получим уравнения движения точки M_1 относительно точки M_0 в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + f(m_0+m_1)\frac{x_1}{r_1^3} &= 0, \\ \ddot{y}_1 + f(m_0+m_1)\frac{y_1}{r_1^3} &= 0, \\ \ddot{z}_1 + f(m_0+m_1)\frac{z_1}{r_1^3} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

где

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

есть расстояние точки M_1 от точки M_0, которое называется также радиусом-вектором движущейся точки.

Если $n \neq 1$, но все массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ весьма малы по сравнению с массой m_0, то, пренебрегая в первом приближении всеми членами в (7.24), имеющими множителем одну из малых масс, мы получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_i + f(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} &= 0, \\ \ddot{y}_i + f(m_0 + m_i)\frac{y_i}{r_i^3} &= 0, \\ \ddot{z}_i + f(m_0 + m_i)\frac{z_i}{r_i^3} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.5'}$$

где

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

суть радиусы-векторы движущихся точек.

Очевидно, что система (9.5′) распадается на n независимых систем, каждая из которых определяет движение одной из точек M_i относительно точки M_0 так, *как если бы все остальные точки не существовали*. По этой причине в астрономических задачах уравнения (9.5′) называются *дифференциальными уравнениями невозмущенного движения*, а точные уравнения относительного движения (7.24) в задаче многих тел-точек называются соответственно *дифференциальными уравнениями возмущенного движения*.

Мы видим, что уравнения (9.5) и (9.5′) имеют в точности такую же форму, что и уравнения (9.4) или (9.4′), отличаясь друг от друга только значением постоянного множителя, зависящего от масс. Таким образом, мы опять приходим к той же самой математической задаче, что и ранее.

К такой же форме уравнений мы придем, исходя из уравнений относительного движения в координатах Якоби. Действительно, рассмотрим уравнения (7.35) гл. VII, предполагая опять, что масса m_0 велика по сравнению со всеми остальными массами, и пренебрежем в правых частях (7.35) всеми членами, содержащими множителями одну из малых масс. В выражении для Δ_{0i} также пренебрежем такими же членами. В результате мы получим следующие уравнения первого приближения в рассматриваемой задаче:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}'_i &= -\frac{fm_0\sigma_i}{\sigma_{i-1}}\frac{x'_i}{r'^3_i},\\ \ddot{y}'_i &= -\frac{fm_0\sigma_i}{\sigma_{i-1}}\frac{y'_i}{r'^3_i},\\ \ddot{z}'_i &= -\frac{fm_0\sigma_i}{\sigma_{i-1}}\frac{z'_i}{r'^3_i},\end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

где

$$r'_i = \sqrt{x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и

$$\sigma_i = m_0 + m_1 + \ldots + m_i.$$

Мы видим, что уравнения (9.6) имеют такую же форму, как и все рассмотреиные выше уравнения, либо в задаче двух тел-точек, либо в первом приближении к задаче многих тел в барицентрических или относительных координатах.

Итак, все рассмотренные нами здесь задачи приводят к одной и той же математической задаче, которая заключается в интегрировании системы трех дифференциальных уравнеиий второго порядка с тремя неизвестными функциями, которую мы вообще будем записывать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3},\\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3},\\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3},\end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

где μ есть некоторая постоянная, зависящая от масс m_0 и m точек M_0 и M, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

есть расстояиие движущейся точки от начала координат.

В интегрировании и исследовании системы уравнений (9.7) и заключается **теория невозмущенного кеплеровского движения***).

*) Мы так называем движение, определяемое уравнениями (9.7), поскольку, как будет показано далее, это движение подчиняется законам Кеплера, известным, впрочем, и из курса общей астрономии. Согласно этим законам движение точки происходит в неизменной плоскости, причем орбита (или траектория) точки есть кривая второго порядка и площадь, описываемая радиусом-вектором, изменяется пропорционально времени.

3. В уравнениях невозмущенного движения (9.7) неизвестными функциями являются прямоугольные декартовы координаты движущейся точки M относительно системы координат $Oxyz$ (см. рис. 45) с неизменными направлениями осей.

Иногда оказывается более удобным, или выгодным, пользоваться какими-либо другими координатами, например, цилиндрическими или сферическими, или же относить изучаемое движение к прямоугольным осям, изменяющим свои направления в пространстве. Соответствующие дифференциальные уравнения легко получить из уравнений (9.7) посредством преобразования координат или вывести из общих уравнений Лагранжа, или, наконец, вывести из общих уравнений задачи многих тел в криволинейных координатах, приведенных в гл. VII.

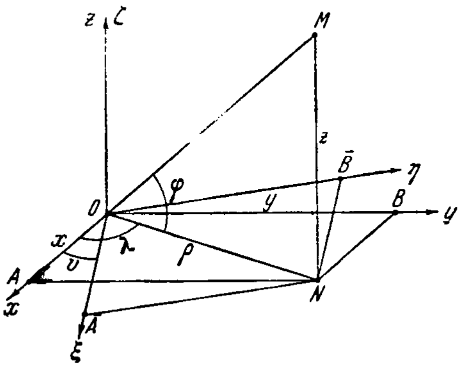

Рис. 46.

Чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа, нужно исходить из выражений живой силы и силовой функции в системе $Oxyz$, которые определяются формулами

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad U = \frac{\mu}{r}. \tag{9.8}$$

Переходя к цилиндрической системе координат (рис. 46), в которой долгота λ отсчитывается от оси Ox к оси Oy, а ρ есть проекция радиуса-вектора r на плоскость Oxy, мы имеем

$$x = \rho\cos\lambda, \quad y = \rho\sin\lambda, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

вследствие чего получаем

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2), \quad U = \frac{\mu}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \tag{9.8'}$$

Принимая теперь за обобщенные координаты Лагранжа величины ρ, λ, z, с помощью уравнений Лагранжа мы получим

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\lambda}^2 &= \frac{\partial U}{\partial \rho} = -\frac{\mu\rho}{r^3}, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\lambda}) &= \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\mu z}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Переходя теперь к сферическим координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = r\sin\varphi,$$

мы имеем соответственно

$$T = \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\cdot\dot\lambda^2), \quad U = \frac{\mu}{r}, \tag{9.8''}$$

откуда с помощью уравнений Лагранжа получим уравнения нашей задачи в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \ddot r - r\dot\varphi^2 - r\dot\lambda^2\cos^2\varphi &= \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2},\\ \frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) + r^2\dot\lambda^2\sin\varphi\cos\varphi &= \frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0,\\ \frac{d}{dt}(r^2\dot\lambda\cos^2\varphi) &= \frac{\partial U}{\partial\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.9'}$$

Отнесем затем движение точки M к прямоугольной системе координат, вращающейся равномерно вокруг оси Oz. Тогда

$$x = \xi\cos v - \eta\sin v, \quad y = \xi\sin v + \eta\cos v, \quad z = \zeta,$$

где (см. рис. 46)

$$v = \angle\, xO\xi = n(t - t_0), \quad n = \text{const},$$

и живая сила T определится формулой *)

$$T = \frac{1}{2}[\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2 + 2n(\xi\dot\eta - \eta\dot\xi) + n^2(\xi^2 + \eta^2)]. \tag{9.8'''}$$

Уравнения движения во вращающихся осях напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot\xi - 2n\dot\eta - n^2\xi &= \frac{\partial U}{\partial\xi} = -\frac{\mu\xi}{r^3},\\ \ddot\eta + 2n\dot\xi - n^2\eta &= \frac{\partial U}{\partial\eta} = -\frac{\mu\eta}{r^3},\\ \ddot\zeta &= \frac{\partial U}{\partial\zeta} = -\frac{\mu\zeta}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{9.9''}$$

Очень простой вид принимают уравнения невозмущенного движения в переменных Клеро — Лапласа. Эти уравнения можно вывести из общих уравнений Клеро — Лапласа (7.46) гл. VII либо получить непосредственно из уравнений (9.9), полагая

$$u = \frac{1}{\rho}, \quad s = \frac{z}{\rho}$$

*) Силовая функция, очевидно, не изменится, т. е. $U = \frac{\mu}{r}$ и $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Дополнительные члены в левых частях уравнений (9.9) суть составляющие ускорения Кориолиса и центробежного.

и принимая за независимую переменную долготу λ вместо времени.

Действительно, второе из уравнений (9.9) дает

$$\rho^2\dot{\lambda} = c = \text{const},$$

с помощью чего, обозначая дифференцирования по λ штрихами, находим

$$\ddot{\rho} = -c^2u^2u'', \quad \ddot{z} = c^2u^2(us'' - su''), \tag{9.10}$$

и уравнения (9.9) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} &u'' + u = \frac{\mu}{c^2}(1+s^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ &s'' + s = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.10'}$$

образуя систему двух уравнений с двумя неизвестными функциями u и s, после интегрирования которой определим квадратурой и время t в зависимости от λ.

4. Наконец, уравнения невозмущенного движения можно записать и в канонической форме, что позволит применить для интегрирования этих уравнений метод Гамильтона — Якоби.

Действительно, принимая за обобщенные координаты Лагранжа величины x, y, z, а за импульсы — производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, мы представим систему (9.7) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

где характеристическая функция определяется формулой

$$H = T - U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r}. \tag{9.12}$$

Если мы желаем воспользоваться сферическими координатами r, φ, λ, то, вводя обобщенные импульсы по формулам

$$R = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad \Phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}, \quad \Lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda}$$

где T определяется формулой (9.8″), мы получим уравнения невозмущенного движения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial R}, & \frac{dR}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Phi}, & \frac{d\Phi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Lambda}, & \frac{d\Lambda}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

где

$$H = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi}\right) - \frac{\mu}{r} \tag{9.14}$$

есть функция Гамильтона, выраженная в новых канонических переменных.

Примечание. Мы получили уравнения невозмущенного движения, рассматривая задачу двух тел (т. е. задачу о движении системы двух взаимно притягивающихся материальных точек), либо первое приближение общей задачи многих тел (т. е. задачи о движении системы любого числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона и не подверженных никаким другим силам). Однако те же уравнения невозмущенного движения можно получить, рассматривая первое приближение и в более общей задаче.

Действительно, пусть, например, поставлена задача о движении одной материальной точки, находящейся под действием некоторых заданных сил.

Обозначая проекции полного ускорения точки на некоторые неподвижные оси координат через X^*, Y^*, Z^*, мы будем иметь уравнения движения точки в следующем виде:

$$\ddot{x} = X^*, \quad \ddot{y} = Y^*, \quad \ddot{z} = Z^*. \tag{9.15}$$

Правые части этих уравнений надлежит рассматривать как заданные функции времени t, координат движущейся точки M, x, y, z и составляющих ее скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Допустим, что правые части (9.15) можно представить в виде

$$X^* = X_0 + X, \quad Y^* = Y_0 + Y, \quad Z^* = Z_0 + Z,$$

причем так, что уравнения

$$\ddot{x} = X_0, \quad \ddot{y} = Y_0, \quad \ddot{z} = Z_0 \tag{9.15'}$$

оказываются полностью интегрируемыми.

Тогда, производя это интегрирование, мы получаем некоторое *первое приближение* нашей задачи, которое может оказаться близким к точному решению уравнений (9.15). Поэтому уравнения (9.15′) называются обычно в механике уравнениями первого приближения, а в астрономии (в небесной механике) эти уравнения называются уравнениями невозмущенного движения, тогда как точные уравнения (9.15) называют уравнениями возмущенного движения.

Характер невозмущенного движения зависит, конечно, от выбора величин X_0, Y_0, Z_0, которые подчинены единственному условию, а именно, должны быть такими, чтобы уравнения (9.15′) можно было проинтегрировать.

Если величины X_0, Y_0, Z_0 можно определить формулами

$$X_0 = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y_0 = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad Z_0 = -\frac{\mu z}{r^3},$$

где μ есть некоторая постоянная, то уравнения (9.15′) делаются тождественными уравнениям (9.7), которые мы назвали уравнениями невозмущенного кеплеровского движения, так как далее будет показано, что движение, определяемое этими уравнениями, подчиняется законам Кеплера.

Для примера напишем уравнения движения точки в поле притяжения неизменяемого, неподвижного, твердого тела. Беря начало прямоугольных координат в центре масс тела, мы можем написать силовую функцию притяжения тела на точку единичной массы в виде (см. § 2 гл. V)

$$U = \frac{fm}{r} + f\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(x, y, z)}{r^{2n+1}} = U_0 + R.$$

Таким образом, полагая

$$X_0 = \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad Y_0 = \frac{\partial U_0}{\partial y}, \quad Z_0 = \frac{\partial U_0}{\partial z},$$

т. е. пренебрегая в первом приближении формой и структурой притягивающего тела, мы получим уравнения вида (9.7) ($\mu = fm$), определяющие невозмущенное кеплеровское движение точки.

Величины

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}$$

являются составляющими возмущающего ускорения, а поэтому функция

$$R = f\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}$$

является возмущающей функцией задачи.

Заметим в заключение, что невозмущенное движение, определяемое в общем случае уравнениями (9.15′), вообще не является кеплеровским движением, так как не подчиняется законам Кеплера.

§ 2. Первые интегралы дифференциальных уравнений невозмущенного движения

1. Переходим к задаче об интегрировании дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения.

Рассмотрим сначала уравнения (9.7), определяющие невозмущенное движение в прямоугольных декартовых координатах:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

где μ есть некоторая постоянная, а r — радиус-вектор движущейся точки, так что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Система (9.16) представляет собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка, которую можно также записать в виде системы уравнений первого порядка (9.11), т. е. в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\mu z}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{9.16′}$$

Таким образом, система уравнений невозмущенного кеплеровского движения представляет собой систему шестого порядка, а поэтому *общий интеграл* этой системы образует совокупность шести независимых между собой *первых интегралов*, к нахождению которых и сводится задача об интегрировании системы (9.16).

Так как уравнения (9.16) можно рассматривать как частный случай уравнений относительного движения задачи многих тел (при $n = 1$), то четыре из шести первых интегралов можно было бы написать сразу.

Однако из методических соображений мы предпочитаем вывести все интегралы уравнений (9.16) непосредственно.