Заметим в заключение, что невозмущенное движение, определяемое в общем случае уравнениями (9.15′), вообще не является кеплеровским движением, так как не подчиняется законам Кеплера.

§ 2. Первые интегралы дифференциальных уравнений невозмущенного движения

1. Переходим к задаче об интегрировании дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения.

Рассмотрим сначала уравнения (9.7), определяющие невозмущенное движение в прямоугольных декартовых координатах:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

где μ есть некоторая постоянная, а r — радиус-вектор движущейся точки, так что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Система (9.16) представляет собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка, которую можно также записать в виде системы уравнений первого порядка (9.11), т. е. в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\mu z}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{9.16′}$$

Таким образом, система уравнений невозмущенного кеплеровского движения представляет собой систему шестого порядка, а поэтому *общий интеграл* этой системы образует совокупность шести независимых между собой *первых интегралов*, к нахождению которых и сводится задача об интегрировании системы (9.16).

Так как уравнения (9.16) можно рассматривать как частный случай уравнений относительного движения задачи многих тел (при $n=1$), то четыре из шести первых интегралов можно было бы написать сразу.

Однако из методических соображений мы предпочитаем вывести все интегралы уравнений (9.16) непосредственно.

Выведем сначала интегралы площадей или момента количества движения.

Умножим для этого второе из уравнений (9.16) на $-z$, третье на $+y$ и сложим оба уравнения. Затем умножим первое из уравнений (9.16) на $+z$, третье на $-x$ и также сложим их. Наконец, умножим второе из уравнений (9.16) на $+x$, первое на $-y$ и опять сложим. В результате мы получим следующие три уравнения, являющиеся непосредственным следствием уравнений движения (9.16):

$$y\ddot{z}-z\ddot{y}=\frac{d}{dt}(y\dot{z}-z\dot{y})=0,$$

$$z\ddot{x}-x\ddot{z}=\frac{d}{dt}(z\dot{x}-x\dot{z})=0,$$

$$x\ddot{y}-y\ddot{x}=\frac{d}{dt}(x\dot{y}-y\dot{x})=0.$$

Интегрируя эти уравнения и обозначая через c_1, c_2, c_3 три произвольные постоянные, мы получим следующие три первые интеграла уравнений (9.16):

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z}-z\dot{y}&=c_1,\\ z\dot{x}-x\dot{z}&=c_2,\\ x\dot{y}-y\dot{x}&=c_3. \end{aligned}\right\} \qquad (9.17)$$

Эти уравнения и называются интегралами площадей или интегралами момента количества движения. Произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 называются обычно постоянными площадей.

Переходим к выводу интеграла живой силы или интеграла энергии. Для этого умножим уравнения (9.16) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и сложим все три равенства. Мы получим следующее уравнение, также являющееся следствием уравнений движения:

$$2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}+2\dot{z}\ddot{z}=-\frac{2\mu}{r^3}(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}).$$

Но, дифференцируя равенство $x^2+y^2+z^2=r^2$, мы найдем

$$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=r\dot{r},$$

вследствие чего предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=-\frac{2\mu}{r^2}\dot{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2\mu}{r}\right),$$

откуда интегрированием найдем

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{2\mu}{r}+h. \qquad (9.18)$$

Произвольная постоянная h называется постоянной энергии.

Обозначим теперь через V скорость движущейся точки. Тогда

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

и уравнение (9.18) может быть написано в виде

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \tag{9.18'}$$

Интегралы (9.17) и (9.18) являются, конечно, частными случаями интегралов задачи многих тел. Но уравнения (9.16) имеют еще другие интегралы, которые раньше нам не встречались и которые существуют только в задаче о невозмущенном кеплеровском движении. Эти интегралы, к выводу которых мы сейчас перейдем, впервые были получены Лапласом и называются по этой причине интегралами Лапласа.

Выведем предварительно некоторое вспомогательное соотношение между радиусом-вектором r и его производными.

Положим для этого

$$r' = r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}, \tag{9.19}$$

так что r' есть скалярное произведение векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{V}$. Дифференцируя равенство (9.19), мы получим

$$\dot{r}' = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Исключая отсюда вторые производные при помощи уравнений движения (9.16) и квадрат скорости при помощи (9.18), мы найдем

$$\dot{r}' = \frac{\mu}{r} + h. \tag{9.19'}$$

Дифференцируя теперь (9.19'), получим нужное нам соотношение

$$\ddot{r}' = -\frac{\mu r'}{r^3}. \tag{9.19''}$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и каждое из уравнений (9.16). Поэтому, комбинируя это уравнение с каждым из уравнений (9.16), мы получим соотношения, имеющие такую же форму, что и интегралы площадей.

Действительно, умножая первое из уравнений (9.16) на $-r'$, уравнение (9.19) на $+x$ и складывая оба полученные равенства, мы имеем

$$x\ddot{r}' - r'\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{r}' - r'\dot{x}),$$

и аналогично,

$$y\ddot{r}' - r'\ddot{y} = \frac{d}{dt}(y\dot{r}' - r'\dot{y}),$$

$$z\ddot{r}' - r'\ddot{z} = \frac{d}{dt}(z\dot{r}' - r'\dot{z}).$$

Интегрируя последние три уравнения и обозначая через f_1, f_2, f_3 три произвольные постоянные, мы получим следующие три соотношения:

$$\left.\begin{aligned} x\dot{r}' - r'\dot{x} &= f_1, \\ y\dot{r}' - r'\dot{y} &= f_2, \\ z\dot{r}' - r'\dot{z} &= f_3. \end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

Эти уравнения и называются интегралами Лапласа.

Интегралы Лапласа можно представить еще в другой форме, делая левые их части явными функциями от координат и составляющих скорости движущейся точки.

Исключим для этого h из равенства (9.19′) и из интеграла живой силы (9.18′) и напишем результат исключения в виде

$$\dot{r}' = -\frac{\mu}{r} + V^2.$$

Подставляя теперь в уравнения (9.20) вместо $\dot{r}'$ полученное его выражение и вместо r' величину $r\dot{r}$, мы напишем интегралы Лапласа в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} xV^2 - \frac{\mu x}{r} - r\dot{r}\dot{x} &= f_1, \\ yV^2 - \frac{\mu y}{r} - r\dot{r}\dot{y} &= f_2, \\ zV^2 - \frac{\mu z}{r} - r\dot{r}\dot{z} &= f_3. \end{aligned}\right\} \tag{9.20′}$$

Наконец, заменяя здесь V^2 и $r\dot{r}$ их выражениями, мы можем написать найденные интегралы еще в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu x}{r} + \dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \dot{z}(z\dot{x} - x\dot{z}) &= f_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + \dot{z}(y\dot{z} - z\dot{y}) - \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) &= f_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + \dot{x}(z\dot{x} - x\dot{z}) - \dot{y}(y\dot{z} - z\dot{y}) &= f_3, \end{aligned}\right\} \tag{9.20″}$$

или, еще, учитывая интегралы площадей (9.17), в виде

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu x}{r}+c_3\dot{y}-c_2\dot{z}&=f_1,\\ -\frac{\mu y}{r}+c_1\dot{z}-c_3\dot{x}&=f_2,\\ -\frac{\mu z}{r}+c_2\dot{x}-c_1\dot{y}&=f_3. \end{aligned}\right\} \tag{9.20'''}$$

2. Итак, мы нашли семь первых интегралов уравнений невозмущенного движения — три интеграла площадей, интеграл живой силы и три интеграла Лапласа, т. е. как будто даже больше чем нужно, так как общий интеграл системы (9.16) должен состоять из шести независимых первых интегралов.

Однако найденные семь интегралов не могут составить общего интеграла системы (9.16), во-первых, по той причине, что ни один из этих интегралов не содержит времени, а во-вторых, потому, что эти семь интегралов не являются независимыми. Действительно, мы сейчас покажем, что между найденными семью интегралами существуют два тождественных соотношения. Для этого умножим равенства (9.17) соответственно на равенства (9.20) и результаты сложим. Мы получим

$$(y\dot{z}-z\dot{y})(x\dot{r}'-r'\dot{x})+(z\dot{x}-x\dot{z})(y\dot{r}'-r'\dot{y})+\\ +(x\dot{y}-y\dot{x})(z\dot{r}'-r'\dot{z})=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3$$

что можно написать также следующим образом:

$$\dot{r}'[x(y\dot{z}-z\dot{y})+y(z\dot{x}-x\dot{z})+z(x\dot{y}-y\dot{x})]+\\ +r'[\dot{x}(z\dot{y}-y\dot{z})+\dot{y}(x\dot{z}-z\dot{x})+\dot{z}(y\dot{x}-x\dot{y})]=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3.$$

Легко видеть, что каждая из квадратных скобок в левой части последнего равенства равна тождественно нулю, а поэтому мы получаем следующее соотношение:

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0, \tag{9.21}$$

которое имеет простой геометрический смысл. Действительно, c_1, c_2, c_3 суть проекции на оси координат вектора момента количества движения (точнее говоря, момента скорости) движущейся точки.

Величины f_1, f_2, f_3 также можно рассматривать как проекции некоторого вектора, который назовем вектором Лапласа и обозначим через $\boldsymbol{f}$.

Тогда равенство (9.21) выражает условие перпендикулярности двух указанных векторов.

Выведем теперь второе соотношение между семью найденными интегралами. Для этого возведем каждое из равенств (9.17) в квадрат и сложим три получившихся равенства, что даст соотношение

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=(y\dot{z}-z\dot{y})^2+(z\dot{x}-x\dot{z})^2+(x\dot{y}-y\dot{x})^2,$$

которое с помощью тождества Лагранжа*) может быть написано в виде

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=(x^2+y^2+z^2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})^2.$$

откуда с помощью формул (9.18) и (9.19) имеем

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=r^2\left(\frac{2\mu}{r}+h\right)-r'^2. \tag{9.22}$$

Далее, из уравнений (9.20) получаем

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=r^2\dot{r}'^2-2r'^2\dot{r}'+r'^2V^2,$$

откуда при помощи (9.18') и (9.19') выводим

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=r^2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)^2-hr'^2. \tag{9.22'}$$

Исключая теперь r'^2 из (9.22) и (9.22'), мы получим после упрощений

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=\mu^2+h\,(c_1^2+c_2^2+c_3^2), \tag{9.23}$$

что представляет собой второе соотношение между семью первыми интегралами невозмущенного движения.

Из найденных соотношений (9.21) и (9.23) мы можем выразить какие-нибудь две из семи постоянных

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ h,\ f_1,\ f_2,\ f_3 \tag{9.24}$$

через пять остальных, которые остаются произвольными.

Это показывает, что из семи найденных нами интегралов уравнений (9.16) или (9.16') только пять являются независимыми, а поэтому эти семь интегралов не образуют общего интеграла системы уравнений невозмущенного движения. Но последний недостающий интеграл может быть найден теперь довольно легко простой квадратурой.

Действительно, из уравнений (9.17), (9.18) и (9.20) в силу соотношений (9.21) и (9.23) мы можем выразить какие-нибудь пять величин из

$$x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}$$

---

*) См. (7.14) гл. VII. В нашем случае нужно положить $k=3$, $a_1=x$, $a_2=y$, $a_3=z$, $b_1=\dot{x}$, $b_2=\dot{y}$, $b_3=\dot{z}$.

через шестую. Например, мы можем выразить величины y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ через x и, разумеется, через произвольные постоянные (9.24). Выполнив это, мы получим соотношения вида *)

$$\left.\begin{aligned} y&=\varphi_1(x;\ h\,|\,c\,|\,f),\\ z&=\varphi_2(x;\ h\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{x}&=\varphi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{y}&=\varphi_4(x;\ h\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{z}&=\varphi_5(x;\ h\,|\,c\,|\,f). \end{aligned}\right\} \tag{9.25}$$

Возьмем теперь какое-нибудь из уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x},\quad \frac{dy}{dt}=\dot{y},\quad \frac{dz}{dt}=\dot{z},$$

например, первое, и напишем его, используя (9.25), следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=\varphi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f).$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с переменными x и t, которое интегрируется разделением переменных.

Выполняя это интегрирование, мы получим соотношение

$$\int\frac{dx}{\varphi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f)}=t+g,$$

где g обозначает шестую произвольную постоянную.

Из последнего уравнения принципиально возможно определить координату x как функцию независимой переменной t, так что мы можем написать

$$x=\chi_1(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g).$$

Подставляя затем найденное выражение для x в формулы (9.25), мы определим также все остальные неизвестные, вследствие чего получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x&=\chi_1(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f),\\ y&=\chi_2(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f),\\ z&=\chi_3(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f), \end{aligned}\right\} \tag{9.26}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=\chi_4(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{y}&=\chi_5(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{z}&=\chi_6(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f). \end{aligned}\right\} \tag{9.26'}$$

*) Как было условлено в гл. VI, мы пишем здесь для сокращения $\varphi(x;\ h|c|f)$ вместо $\varphi(x;\ h, c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3)$.

Эти уравнения представляют собой шесть соотношений между неизвестными функциями, временем и шестью произвольными постоянными, а поэтому составляют общий интеграл уравнений движения (9.16). Так как, кроме того, уравнения (9.26) и (9.26′) дают явные выражения для неизвестных величин в зависимости от времени и надлежащего числа произвольных постоянных, то они представляют также общее решение уравнений движения.

При этом равенства (9.26) представляют параметрические уравнения траектории движущейся точки *) и дают возможность определить ее координаты для любого момента времени.

Формулы (9.26′) определяют составляющие скорости движущейся точки для любого момента времени, а следовательно, величину и направление скорости. Действительно, величину скорости получаем по формуле

$$V=\sqrt{\chi_4^2+\chi_5^2+\chi_6^2},$$

а направление скорости определяется ее направляющими косинусами, которые соответственно равны

$$\frac{\chi_4}{V},\quad \frac{\chi_5}{V},\quad \frac{\chi_6}{V}.$$

3. Произвольные постоянные, входящие в формулы общего интеграла или в общее решение (9.26), (9.26′), могут быть однозначно определены через начальные значения неизвестных функций (координат и проекций скорости), которые обычно являются данными задачи.

Выберем некоторый момент времени t_0, который условимся считать начальным моментом **), и обозначим соответствующие этому моменту значения координат и составляющих скорости через

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0. \tag{9.27}$$

Эти величины и называются начальными значениями или начальными данными рассматриваемой задачи и

---

*) Например, это будет траектория планеты в ее относительном движении вокруг Солнца, или траектория ИСЗ в его движении вокруг Земли. Заметим, что сама кривая, по которой движется точка, в астрономии обыкновенно называется орбитой. Латинское слово orbita означало «дорога», «колея».

**) Начальный момент t_0, называемый в астрономии также начальной эпохой (или просто эпохой), может быть выбран произвольно и подбирается обычно из различных практических соображений. Например, в задаче о движении ИСЗ за начальный момент принимают обычно момент «выхода на орбиту», в который перестает действовать выводная реактивная сила.

представляют шесть независимых чисел, которые могут быть заданы произвольно *).

По величинам (9.27), которые можно рассматривать как основные начальные данные, нетрудно определить также начальные значения и ряда других величин. Таким образом, начальное значение радиуса-вектора r_0 и величину начальной скорости V_0 определим при помощи формул

$$r_0 = +\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad V_0 = +\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2} \tag{9.27'}$$

и начальное значение r_0' скалярного произведения радиуса-вектора на скорость по формуле

$$r_0' = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0. \tag{9.27''}$$

Теперь формулы (9.17) дают

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0, \\ c_2 &= z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0, \\ c_3 &= x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.28}$$

Эти величины суть проекции вектора момента количества движения (точнее, момента скорости) точки M на оси координат. Величину, или модуль, этого вектора получим по формуле

$$c = +\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \tag{9.28'}$$

а его направляющие косинусы будут соответственно равны

$$\frac{c_1}{c}, \quad \frac{c_2}{c}, \quad \frac{c_3}{c}. \tag{9.28''}$$

Далее из (9.18′) получаем

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}, \tag{9.29}$$

т. е. величину полной энергии движущейся точки.

Остается определить постоянные Лапласа. Сначала из (9.19′) найдем начальное значение величины $\dot{r}'$ по формуле

$$\dot{r}_0' = \frac{\mu}{r_0} + h = V_0^2 - \frac{\mu}{r_0}, \tag{9.30}$$

*) В действительном движении начальные значения суть числа вещественные. Однако, вообще говоря, эти начальные значения могут быть какими угодно комплексными числами.

после чего формулы (9.20) дают

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= x_0\dot{r}'_0 - r'_0\dot{x}_0, \\ f_2 &= y_0\dot{r}'_0 - r'_0\dot{y}_0, \\ f_3 &= z_0\dot{r}'_0 - r'_0\dot{z}_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.30′}$$

Затем находим величину, или модуль, вектора Лапласа

$$f = +\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \tag{9.30″}$$

и его направляющие косинусы

$$\frac{f_1}{f}, \quad \frac{f_2}{f}, \quad \frac{f_3}{f}. \tag{9.30‴}$$

Постоянные Лапласа можно также получить из формул (9.20′) или (9.20″). Например, формулы (9.20″) дают

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\mu x_0}{r_0} + c_3\dot{y}_0 - c_2\dot{z}_0, \\ f_2 &= -\frac{\mu y_0}{r_0} + c_1\dot{z}_0 - c_3\dot{x}_0, \\ f_3 &= -\frac{\mu z_0}{r_0} + c_2\dot{x}_0 - c_1\dot{y}_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.30^{IV}}$$

Для контроля вычисления произвольных постоянных (9.24) можно применить выведенные выше соотношения между семью первыми интегралами. Действительно, мы должны иметь

$$\left.\begin{aligned} c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 &= 0, \\ f^2 &= \mu^2 + hc^2. \end{aligned}\right\} \tag{9.31}$$

Как уже было отмечено, первое из этих соотношений выражает условие перпендикулярности двух векторов (или двух направлений) с направляющими косинусами (9.28″) и (9.30‴). Второе из этих соотношений связывает модули векторов f и c с полной энергией движущейся точки.

Чтобы определить последнюю произвольную постоянную g, положим для сокращения

$$\Phi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f) = \int \frac{dx}{\varphi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f)}.$$

Тогда шестой независимый интеграл напишется в виде

$$\Phi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f) = t + g,$$

откуда находим

$$g = -t_0 + \Phi_3(x_0;\ h\,|\,c\,|\,f). \tag{9.32}$$

Примечание 1. Если все начальные значения (9.27) суть числа действительные, то такими же будут и все произвольные постоянные (9.24), каждая из которых может получиться положительной или отрицательной, или равной нулю. Может оказаться также, что все три постоянные площадей равны нулю, или что равны нулю все три постоянные Лапласа. Однако второе из соотношений (9.31) показывает, что не могут быть одновременно равны нулю и постоянные площадей и постоянные Лапласа. Точно так же не могут быть одновременно равны нулю постоянные Лапласа и постоянная энергии.

Примечание 2. Подставляя найденные выражения для произвольных постоянных в формулы (9.26) и (9.26′), мы получим другое представление общего решения уравнений невозмущенного движения, в котором все неизвестные функции задачи (координаты и их первые производные по времени) выражаются через время и начальные значения этих функций. Это решение может быть написано в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \chi_1(t;\ t_0 \mid r_0 \mid V_0), \\ y &= \chi_2(t;\ t_0 \mid r_0 \mid V_0), \\ z &= \chi_3(t;\ t_0 \mid r_0 \mid V_0), \end{aligned}\right\} \tag{9.33}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \chi_4(t;\ t_0 \mid r_0 \mid V_0), \\ \dot{y} &= \chi_5(t;\ t_0 \mid r_0 \mid V_0), \\ \dot{z} &= \chi_6(t;\ t_0 \mid r_0 \mid V_0). \end{aligned}\right\} \tag{9.33′}$$

§ 3. Общие формулы невозмущенного кеплеровского движения

1. Описанный в предыдущем параграфе способ получения общего решения уравнений невозмущенного движения не является эффективным и представляет собой скорее конструктивное доказательство существования этого общего решения.

Действительно, чтобы получить формулы (9.25), нужно разрешить уравнения (9.17), (9.18) и (9.20) относительно каких-нибудь пяти из шести неизвестных функций. Но эти уравнения являются уравнениями второй степени относительно всех шести неизвестных и содержат, кроме того, иррациональность, представляемую радиусом-вектором r. Поэтому решение этих уравнений представляет собой весьма сложную алгебраическую задачу, вообще в буквенном виде не разрешимую, и это обстоятельство заставляет нас искать другую форму общего решения, которая была бы пригодна для практических приложений.

Выведем прежде всего уравнения, содержащие только три координаты x, y, z движущейся точки и представляющие собой уравнения той пространственной кривой, которую описывает