Примечание 1. Если все начальные значения (9.27) суть числа действительные, то такими же будут и все произвольные постоянные (9.24), каждая из которых может получиться положительной или отрицательной, или равной нулю. Может оказаться также, что все три постоянные площадей равны нулю, или что равны нулю все три постоянные Лапласа. Однако второе из соотношений (9.31) показывает, что не могут быть одновременно равны нулю и постоянные площадей и постоянные Лапласа. Точно так же не могут быть одновременно равны нулю постоянные Лапласа и постоянная энергии.

Примечание 2. Подставляя найденные выражения для произвольных постоянных в формулы (9.26) и (9.26′), мы получим другое представление общего решения уравнений невозмущенного движения, в котором все неизвестные функции задачи (координаты и их первые производные по времени) выражаются через время и начальные значения этих функций. Это решение может быть написано в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \chi_1(t;\ t_0 \,|\, r_0 \,|\, V_0),\\ y &= \chi_2(t;\ t_0 \,|\, r_0 \,|\, V_0),\\ z &= \chi_3(t;\ t_0 \,|\, r_0 \,|\, V_0), \end{aligned}\right\} \tag{9.33}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \chi_4(t;\ t_0 \,|\, r_0 \,|\, V_0),\\ \dot{y} &= \chi_5(t;\ t_0 \,|\, r_0 \,|\, V_0),\\ \dot{z} &= \chi_6(t;\ t_0 \,|\, r_0 \,|\, V_0). \end{aligned}\right\} \tag{9.33′}$$

§ 3. Общие формулы невозмущенного кеплеровского движения

1. Описанный в предыдущем параграфе способ получения общего решения уравнений невозмущенного движения не является эффективным и представляет собой скорее конструктивное доказательство существования этого общего решения.

Действительно, чтобы получить формулы (9.25), нужно разрешить уравнения (9.17), (9.18) и (9.20) относительно каких-нибудь пяти из шести неизвестных функций. Но эти уравнения являются уравнениями второй степени относительно всех шести неизвестных и содержат, кроме того, иррациональность, представляемую радиусом-вектором r. Поэтому решение этих уравнений представляет собой весьма сложную алгебраическую задачу, вообще в буквенном виде не разрешимую, и это обстоятельство заставляет нас искать другую форму общего решения, которая была бы пригодна для практических приложений.

Выведем прежде всего уравнения, содержащие только три координаты x, y, z движущейся точки и представляющие собой уравнения той пространственной кривой, которую описывает точка M во время своего движения. Эти уравнения получаются как простые следствия найденных первых интегралов.

Рассмотрим сначала интегралы площадей (9.17). Умножая эти равенства соответственно на x, y, z и складывая, мы получим следующее уравнение, являющееся следствием первых интегралов, а поэтому справедливое для любого момента времени *):

$$c_1x+c_2y+c_3z=0. \tag{9.34}$$

Уравнение (9.34) есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат; оно показывает, что движение точки M происходит в неизменной плоскости, определяемой исключительно начальными условиями задачи, и что, следовательно, траектория, или орбита, точки M есть плоская кривая.

Так как плоскость (9.34) перпендикулярна, очевидно, к вектору момента количества движения, то она совпадает с неизменяемой плоскостью Лапласа в нашей задаче, так что орбита точки M лежит в неизменяемой плоскости.

Чтобы определить вид и расположение кривой, которую описывает движущаяся точка M, нужно иметь второе уравнение, связывающее ее координаты. Чтобы получить это второе уравнение, обратимся к интегралам Лапласа (9.20). Умножим эти уравнения на x, y, z и сложим. Мы получим следующее равенство, также являющееся первым интегралом уравнений (9.16):

$$(x^2+y^2+z^2)\dot{r}'-r'^2=f_1x+f_2y+f_3z.$$

Исключая отсюда $\dot{r}'$ и r'^2 с помощью формул (9.19′) и (9.22), мы найдем

$$\mu r=c^2-f_1x-f_2y-f_3z. \tag{9.35}$$

Это уравнение (также являющееся первым интегралом задачи) содержит только координаты точки M и представляет собой уравнение некоторой поверхности, на которой остается точка M во все время своего движения. Поэтому два уравнения, нами полученные, представляют собой общие уравнения кривой, по которой движется точка M. Эта кривая называется (как уже было замечено ранее) орбитой движущейся точки, и ее геометрические свойства вполне определяются ее общими уравнениями.

Действительно, пространственная кривая, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} c_1x+c_2y+c_3z&=0,\\ \mu r-c^2+f_1x+f_2y+f_3z&=0, \end{aligned}\right\} \tag{9.36}$$

---

*) Отметим, что всякая комбинация первых интегралов также является первым интегралом системы (9.16).

есть линия пересечения плоскости (9.34) с поверхностью (9.35). Но уравнение (9.35) есть, очевидно, уравнение второй степени относительно координат x, y, z, и поэтому оно изображает поверхность второго порядка. Линия пересечения плоскости с поверхностью второго порядка есть кривая второго порядка, а следовательно, орбита точки M в ее невозмущенном кеплеровском движении есть некоторое коническое сечение, т. е. окружность, эллипс, парабола, гипербола или (в вырожденном случае) пара прямых, различных или сливающихся.

Рассмотрим уравнение (9.35) более внимательно. Оно показывает, что радиус-вектор r текущей точки поверхности выражается рациональным образом через координаты этой точки. Так как радиус-вектор есть расстояние точки от начала координат, то отсюда следует, что начало координат является одним из фокусов поверхности *).

Покажем теперь, что поверхность (9.35) есть поверхность вращения вокруг оси, проходящей через начало координат.

Действительно, рассмотрим прямую, определяемую уравнениями

$$\frac{x}{f_1}=\frac{y}{f_2}=\frac{z}{f_3} \tag{9.37}$$

и определяющую, следовательно, направление вектора Лапласа.

Вообразим семейство плоскостей, определяемое уравнением

$$f_1x+f_2y+f_3z=d, \tag{9.37'}$$

где d — любая постоянная (параметр семейства).

Очевидно, что всякая плоскость семейства (9.37′) перпендикулярна к прямой (9.37), которая в силу соотношения

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0$$

лежит в плоскости (9.34), т. е. в плоскости орбиты.

Из уравнений (9.35) и (9.37′) находим

$$\mu r=c^2-d.$$

Отсюда видно, что сечение поверхности (9.35) любой плоскостью из семейства (9.37′) есть окружность, центр которой лежит на прямой (9.37). Следовательно, (9.35) есть действительно поверхность вращения вокруг оси (9.37),

---

*) В аналитической геометрии фокусом поверхности или плоской кривой называется такая точка пространства, расстояние которой от любой точки поверхности (соответственно линии) выражается рациональным образом через координаты этой точки. Фокусы кривой второго порядка имеют простые геометрические свойства.

один из фокусов которой совпадает с началом координат. Таким образом, поверхность (9.35) есть эллипсоид вращения либо параболоид вращения либо гиперболоид вращения (а в вырожденном случае — либо круглый конус либо круглый цилиндр).

Так как плоскость орбиты (9.34) проходит через ось вращения поверхности (9.37), то орбита имеет те же фокусы и те же вершины, что и эта поверхность. Отсюда заключаем, что невозмущенная орбита движущейся точки есть плоская кривая второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат (в центре силы притяжения) и главная, или фокальная ось, ось которой совпадает с направлением вектора Лапласа.

Эта ось орбиты называется в астрономии линией апсид; точки пересечения ее с кривой называются апсидами. Апсиды совпадают с вершинами кривой второго порядка, которая представляет орбиту, и имеют собственные названия, в зависимости от того, какое небесное тело рассматривается как центральное.

В общем случае точка орбиты, ближайшая к центру силы, называется перицентром, а наиболее удаленная — апоцентром.

Если орбита есть парабола, то вторая ее вершина лежит в бесконечности, а поэтому для параболической орбиты апоцентр не рассматривается. Если орбита есть гипербола (кривая, состоящая из двух ветвей), то движение может происходить, конечно, только по одной ее ветви, а именно по той, фокус которой находится в начале координат. Вторая вершина гиперболы лежит на другой ее ветви и по этой причине апоцентр для гиперболы также не рассматривается*).

В конкретных задачах астрономии апсиды орбиты имеют свои собственные названия. Так, если рассматривается движение планеты или кометы вокруг Солнца, то перицентр называется перигелием, а апоцентр — афелием; если рассматривается движение Луны или искусственного спутника вокруг Земли, то перицентр называется перигеем, а апоцентр — апогеем. Если рассматривается движение спутника (естественного или искусственного, безразлично) вокруг какой-нибудь из больших планет солнечной системы, то, в зависимости от названия планеты, перицентр называется перивенерием, перимарсием, перииовием, перисатурнием, периуранием, перинептунием, а апоцентр, соот-

---

*) Мы здесь имеем в виду случаи силы притяжения. Если действующая центральная сила есть сила отталкивания, обратно пропорциональная квадрату расстояния, то единственно возможной орбитой является гипербола, фокус которой (внешний) находится в центре силы. См. ниже.

ветственно, — аповенерием, апомарсием, апоиовием, апосатурнием, апоуранием, апонептунием. При рассмотрении движения искусственного спутника Луны перицентр называют перилунием или периселением, а апоцентр — аполунием или апоселением*).

2. Чтобы привести общие уравнения (9.36) к простейшему виду и получить возможность выразить каждую из координат в зависимости от времени, заметим, что в силу уравнения плоскости орбиты (9.34) три текущие координаты связаны одним соотношением, а поэтому независимыми из них являются какие-нибудь две. Иначе можно сказать, что все три координаты могут быть выражены в функции каких-нибудь двух независимых параметров, которые можно выбирать различными способами и которые будем называть координатами в плоскости орбиты или орбитальными координатами.

Мы будем рассматривать здесь две основные системы орбитальных координат, а именно прямоугольную декартову систему и связанную с ней систему полярных координат.

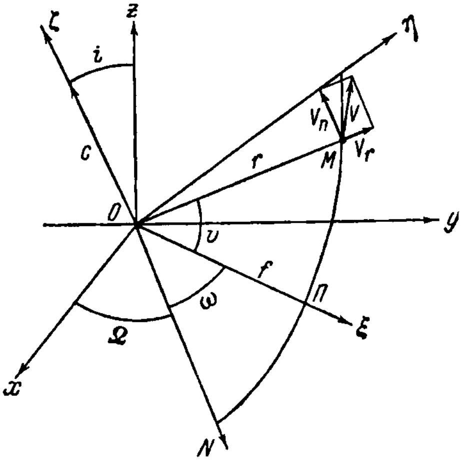

Рис. 47.

Чтобы выбрать из бесчисленного множества систем орбитальных координат наиболее удобную, рассмотрим сначала новую систему пространственных координат $O\xi\eta\zeta$, которую определим следующим образом: за плоскость $\xi O\eta$ примем плоскость орбиты (9.34); положительную ось $O\xi$ направим по оси орбиты, т. е. по прямой (9.37) в сторону ближайшей к началу координат вершины — к перицентру П; положительную ось $O\zeta$ направим по перпендикуляру к плоскости орбиты, т. е. по прямой, определяемой уравнениями

$$\frac{x}{c_1} = \frac{y}{c_2} = \frac{z}{c_3}.$$

Наконец, ось $O\eta$ выберем таким образом, чтобы систему координат $(\xi\eta\zeta)$ можно было совместить надлежащим вращением с первоначальной системой (xyz) (рис. 47).

---

*) Периовий и апоиовий — по латинскому произношению имени Юпитера (Jove), периселений и апоселений — по имени богини Луны в греческой мифологии — Селены.

Тогда направляющие косинусы новых осей относительно старых определятся следующей таблицей:

	ξ	η	ζ
x	$\frac{f_1}{f}$	$\frac{c_2f_3 - c_3f_2}{cf}$	$\frac{c_1}{c}$
y	$\frac{f_2}{f}$	$\frac{c_3f_1 - c_1f_3}{cf}$	$\frac{c_2}{c}$
z	$\frac{f_3}{f}$	$\frac{c_1f_2 - c_2f_1}{cf}$	$\frac{c_3}{c}$.

Поэтому новые координаты выразятся через старые посредством формул:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{f_1}{f}x + \frac{f_2}{f}y + \frac{f_2}{f}z, \\ \eta &= \frac{c_2f_3 - c_3f_2}{cf}x + \frac{c_3f_1 - c_1f_3}{cf}y + \frac{c_1f_2 - c_2f_1}{cf}z, \\ \zeta &= \frac{c_1}{c}x + \frac{c_2}{c}y + \frac{c_3}{c}z. \end{aligned}\right\} \tag{9.38}$$

Обратные формулы напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{f_1}{f}\xi + \frac{c_2f_3 - c_3f_2}{cf}\eta + \frac{c_1}{c}\zeta, \\ y &= \frac{f_2}{f}\xi + \frac{c_3f_1 - c_1f_3}{cf}\eta + \frac{c_2}{c}\zeta, \\ z &= \frac{f_3}{f}\xi + \frac{c_1f_2 - c_2f_1}{cf}\eta + \frac{c_3}{c}\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{9.38'}$$

Координаты ξ и η примем за наиболее удобные орбитальные координаты точки M, движущейся в плоскости $(\xi O\eta)$.

В системе координат $O\xi\eta\zeta$ общие уравнения орбиты (9.36) напишутся, очевидно, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= 0, \\ \mu r &= c^2 - f\xi, \end{aligned}\right\} \tag{9.39}$$

где вследствие ортогональности преобразования координат и в силу первого из уравнений (9.39) радиус-вектор r определяется формулой

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Так как плоскость орбиты перпендикулярна к вектору момента количества движения c, то интегралы площадей в новых координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned} \eta\dot{\zeta} - \zeta\dot{\eta} &= 0, \\ \zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta} &= 0, \\ \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} &= c. \end{aligned}$$

Но в новой системе координат $\zeta=0$ во все время движения и два первых из написанных уравнений удовлетворяются тождественно. Поэтому из трех интегралов площадей в орбитальной системе координат остается только один последний,

$$\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=c, \tag{9.40}$$

который носит название *интеграла площадей в плоскости орбиты*.

Введем теперь наряду с прямоугольными орбитальными координатами ξ и η полярные орбитальные координаты r и v формулами (рис. 48)

$$\xi=r\cos v, \qquad \eta=r\sin v, \tag{9.41}$$

где v есть угол, образуемый радиусом-вектором движущейся точки с положительным направлением оси $O\xi$, т. е. с направлением на перицентр орбиты. Этот угол называется в астрономии *истинной аномалией* и отсчитывается от перицентра в положительном направлении (против часовой стрелки) от нуля до 360° или до 180°, или даже до бесконечности.

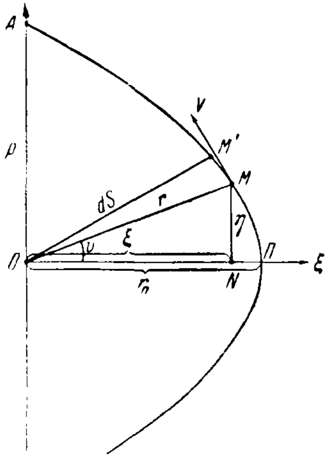

Рис. 48.

С учетом формул (9.41) второе из уравнений (9.39), или уравнение орбиты в плоскости движения (в неизменяемой плоскости), напишется следующим образом:

$$\mu\cdot r=c^2-fr\cos v$$

или

$$r=\frac{\dfrac{c^2}{\mu}}{1+\dfrac{f}{\mu}\cos v}, \tag{9.42}$$

что есть полярное уравнение кривой второго порядка, причем полюс находится в фокусе кривой и полярная ось направлена по фокальной оси кривой (см. рис. 48).

Обозначим, как обычно принято, через p параметр кривой и через e — ее эксцентриситет *). Тогда

$$p=\frac{c^2}{\mu}, \qquad e=\frac{f}{\mu}, \tag{9.43}$$

---

*) Параметр кривой есть половина фокальной хорды OA, перпендикулярной к фокальной оси; $e=\frac{p-r_п}{r_п}$, где $r_п$ есть расстояние перицентра до начала координат (см. рис. 48). Параметр орбиты связан с модулем вектора c, а эксцентриситет пропорционален модулю вектора Лапласа.

и уравнение (9.42) приведется к хорошо знакомому виду

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}. \tag{9.42'}$$

Это уравнение определяет радиус-вектор r как простую функцию истинной аномалии v. Подразумевая под r это его значение, мы получим по формулам (9.41) и орбитальные координаты ξ и η, так же как функции истинной аномалии, а тогда формулы (9.38′) дадут и пространственные координаты x, y, z в зависимости от истинной аномалии.

Действительно, так как во все время движения $\zeta=0$, то мы имеем из (9.38)

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{f_1}{f}\xi+\frac{c_2f_3-c_3f_2}{cf}\eta,\\ y&=\frac{f_2}{f}\xi+\frac{c_3f_1-c_1f_3}{cf}\eta,\\ z&=\frac{f_3}{f}\xi+\frac{c_1f_2-c_2f_1}{cf}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Таким образом, окончательное решение задачи приводится к нахождению истинной аномалии v как функции времени.

Подставим в уравнение (9.40) вместо ξ и η их выражения из формул преобразования (9.41). Тогда

$$\left.\begin{aligned} \dot\xi&=\dot r\cos v-r\dot v\sin v,\\ \dot\eta&=\dot r\sin v+r\dot v\cos v, \end{aligned}\right\} \tag{9.41'}$$

и уравнение (9.40) приведется к виду

$$r^2\dot v=c. \tag{9.40'}$$

Это соотношение называется интегралом площадей в плоскости орбиты в полярных координатах.

Уравнение (9.40′) устанавливает связь между v и t. Действительно, подставляя в (9.40′) вместо r его выражение (9.42′) из уравнения орбиты, мы напишем соотношение (9.40) в следующем виде:

$$\frac{p^2\,dv}{(1+e\cos v)^2}=c\,dt.$$

Обозначая через τ тот момент времени, когда движущаяся точка попадает в перицентр, т. е. когда истинная аномалия v обращается в нуль, и интегрируя последнее равенство, мы получим

$$c(t-\tau)=p^2\int\limits_0^v\frac{dv}{(1+e\cos v)^2}. \tag{9.45}$$

Это равенство определяет t как функцию v, а разрешая уравнение (9.45) относительно v, мы найдем формулу вида

$$v = v(t - \tau), \tag{9.45'}$$

откуда можно вычислить v для каждого значения t.

Определив v, мы найдем радиус-вектор r по формуле (9.42′) и, таким образом, определим положение точки M на ее орбите. Зная r и v, найдем орбитальные координаты ξ, η, а затем и пространственные координаты x, y, z по формулам (9.44).

Все найденные формулы, кроме формулы (9.45), весьма просты и содержат только элементарные функции. Интеграл (9.45) также вычисляется элементарно, но нахождение v в зависимости от времени в общем случае составляет трансцендентную задачу, которая в конечном виде не может быть решена. Далее мы специально займемся этой задачей.

3. Чтобы получить полное решение задачи, нужно вывести еще выражения для производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, определяющих величину и направление скорости движущейся точки в каждый момент времени.

Прежде всего отметим, что формула (9.40′) определяет секториальную скорость движущейся точки. Действительно, пусть dS есть элемент площади в полярных координатах, т. е. площадь бесконечно малого сектора с вершиной в начале координат O и с углом раствора dv (см. рис. 48). Тогда

$$dS = \frac{1}{2} r^2 dv,$$

или, по формуле (9.40′),

$$\frac{dS}{dt} = \frac{c}{2}, \tag{9.46}$$

т. е. секториальная скорость остается постоянной во все время движения.

Теперь из (9.40′) находим угловую скорость движущейся точки

$$\dot{v} = \frac{c}{r^2}, \tag{9.47}$$

которая уже не является вообще постояной величиной, как секториальная скорость, а изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния r от центра притяжения *).

Дифференцируя затем формулу (9.42′) по времени и заменяя в полученном выражении $\dot{v}$ ее выражением (9.47), мы найдем

---

*) Если орбита есть окружность, то $r = \text{const}$ и угловая скорость $\dot{v}$ также есть величина постоянная. Радиальная скорость в этом случае, очевидно, равна нулю.

величину $\dot{r}$, т. е. скорость изменения радиуса-вектора r, которая называется в астрономии радиальной скоростью:

$$\dot{r} = \frac{ce}{p} \sin v. \tag{9.47'}$$

Зная $\dot{v}$ и $\dot{r}$, найдем по формулам (9.41′) производные $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$, т. е. составляющие скорости V движущейся точки по осям орбитальной системы координат.

После необходимых упрощений эти формулы примут вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{c}{p}\sin v, \\ \dot{\eta} &= \frac{c}{p}(e + \cos v). \end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

Если обозначить теперь, как принято в механике, через V_r и V_n проекции скорости V на радиус-вектор и на перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости орбиты (см. рис. 48), то мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \dot{r} = \frac{ce}{p}\sin v, \\ V_n &= r\dot{v} = \frac{c}{p}(1 + e\cos v). \end{aligned}\right\} \tag{9.48'}$$

После этого из формул (9.48) или (9.48′) получим величину скорости

$$\begin{aligned} V &= +\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = +\sqrt{V_r^2 + V_n^2} = \\ &= +\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2} = +\frac{c}{p}\sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}. \end{aligned} \tag{9.49}$$

Наконец, при помощи (9.48) из (9.44) найдем проекции скорости на оси пространственной системы координат

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{c}{p}\left[-\frac{f_1}{f}\sin v + \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf}(e + \cos v)\right], \\ \dot{y} &= \frac{c}{p}\left[-\frac{f_2}{f}\sin v + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf}(e + \cos v)\right], \\ \dot{z} &= \frac{c}{p}\left[-\frac{f_3}{f}\sin v + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf}(e + \cos v)\right], \end{aligned}\right\} \tag{9.50}$$

откуда опять найдем

$$V = +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = +\frac{c}{p}\sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}.$$

Кроме того, величину скорости можно определить еще из интеграла живой силы (9.18′), что дает

$$V = +\sqrt{\frac{2\mu}{r} + h}. \tag{9.49'}$$

Если из этой формулы исключить h при помощи соотношения $f^2=\mu^2+hc^2$ и использовать формулы (9.42′) и (9.43), то получим опять (9.49).

Заметим еще, что из уравнения плоскости орбиты (9.34) мы имеем соотношение

$$c_1\dot{x}+c_2\dot{y}+c_3\dot{z}=0,$$

которое показывает, что вектор скорости лежит в плоскости орбиты, что, впрочем, следует также из того, что орбита есть плоская кривая, а вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения (см. рис. 47).

Общее решение задачи представляют формулы (9.44), (9.41), (9.42′) и (9.50), дающие координаты x, y, z и их первые производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ как функции истинной аномалии v и произвольных постоянных, за которые здесь можно принять: параметр орбиты p, эксцентриситет e и шесть направляющих косинусов осей $O\xi$ и $O\eta$ в системе $(Oxyz)$. Но шесть направляющих косинусов связаны тремя соотношениями (сумма квадратов направляющих косинусов каждой оси равна единице, а сумма произведений направляющих косинусов обеих осей равна нулю), а поэтому независимыми из них являются только три. Таким образом, формулы (9.44) и (9.50) дают координаты и составляющие скорости как функции угла v и пяти произвольных постоянных. Шестая произвольная постоянная входит через выражение v как функции времени и, следовательно, общее решение содержит нужное число произвольных постоянных.

4. Вместо направляющих косинусов орбитальных осей в системе $(Oxyz)$ можно ввести другие постоянные, более удобные и более употребительные в астрономии.

Для этого заметим, что направляющие косинусы определяют ориентацию системы координат $(O\xi\eta\zeta)$ относительно системы $(Oxyz)$. Но ориентация одной системы координат относительно другой может быть определена также, как мы знаем, тремя эйлеровыми углами, которые являются независимыми между собой. Эти углы в интересующем нас случае имеют собственные названия и обозначения, издавна укоренившиеся в астрономии.

Рассмотрим линию пересечения плоскости $(\xi\eta)$, т. е. плоскости орбиты, с основной плоскостью (xy) (см. рис. 47). Эта линия называется в астрономии линией узлов, а точки ее пересечения с орбитой*) называются узлами орбиты. Тот узел орбиты, который движущаяся точка проходит, переходя из области отрицательных аппликат в область положительных,

---

*) Вообразим сферу произвольного радиуса с центром в O. Плоскости (xy) и $(\xi\eta)$ пересекают эту сферу по большим кругам. Точки пересечения этих кругов, т. е. проекции узлов орбиты на сферу, также называются узлами (см. рис. 49).

называется восходящим узлом, а противоположный — нисходящим узлом. Угол прецессии триэдра ($O\xi\eta\zeta$) есть угол между направлением на восходящий узел (направление $\overrightarrow{ON}$) и положительным направлением оси Ox. В астрономии этот угол называется долготой восходящего узла (или просто долготой узла) и обозначается буквой Ω. Угол собственного вращения триэдра ($O\xi\eta\zeta$) есть угол между направлением $\overrightarrow{ON}$ на восходящий узел и направлением положительной оси $O\xi$, или угол между направлением $\overrightarrow{ON}$ и направлением $\overrightarrow{O\Pi}$ на перицентр.

Этот угол обозначается обычно буквой ω и называется угловым расстоянием перицентра от узла*). Наконец, угол нутации триэдра ($O\xi\eta\zeta$) есть угол между положительными направлениями осей $O\zeta$ и Oz. Этот угол равен также углу, который плоскость орбиты образует с основной плоскостью (xy) и называется поэтому наклонением или наклонностью орбиты и обозначается обыкновенно буквой i**).

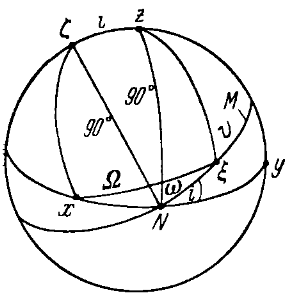

Рис. 49.

Эти три угла определяют положение плоскости орбиты в пространстве и положение линии апсид на этой плоскости, т. е. определяют расположение, или ориентацию, орбиты. Каждый из них измеряется обычным образом в радианах, или в градусах, минутах и секундах дуги.

Долгота восходящего узла Ω отсчитывается от оси Ox в сторону движения точки M от 0° до 360°. Угловое расстояние перицентра от восходящего узла отсчитывается в плоскости орбиты также в сторону движения точки M от 0° до 360°. Наконец, наклонение i отсчитывается от 0° до 180°. При этом если $0°<i<90°$, то движение точки называется прямым, а если $90°<i<180°$, то движение точки называется обратным.

В подавляющем большинстве случаев движения небесных тел суть прямые движения, но имеются некоторые случаи и обратных движений.

Направляющие косинусы осей триэдра ($O\xi\eta\zeta$) легко выразить через три независимых угла Ω, ω и i. Для этого нужно рассмотреть (рис. 49) соответствующие сферические треуголь-

---

*) На рис. 49 $\omega=\overset{\frown}{N\xi}$. Название угла, конечно, изменяется в зависимости от задачи. Так, в теории движения Луны угол ω называется угловым расстоянием перигея от узла и т. п.

**) На рис. 49 i есть сферический угол $\angle \xi N y$, или также дуга большого круга $\overset{\frown}{\zeta z}$.

ники и применить основную теорему сферической тригонометрии. Так, например, из треугольников $(xN\zeta)$, $(yN\zeta)$, $(zN\zeta)$ немедленно выводим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_1}{c} &= \sin i \sin \Omega, \\ \frac{c_2}{c} &= -\sin i \cos \Omega, \\ \frac{c_3}{c} &= \cos i. \end{aligned}\right\} . \qquad (9.51)$$

Далее, из треугольников $(xN\xi)$, $(yN\xi)$, $(zN\xi)$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f_1}{f} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ \frac{f_2}{f} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ \frac{f_3}{f} &= \sin \omega \sin i. \end{aligned}\right\} \qquad (9.51')$$

Наконец, из соответствующих треугольников (не показанных на рис. 49) или из формул (9.51), (9.51′), или заменяя просто ω на $\omega + 90°$ в (9.51′), найдем

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} &= \cos \omega \sin i. \end{aligned}\right\} \qquad (9.51'')$$

Заменяя теперь в формулах (9.44) направляющие косинусы их выражениями (9.51′) и (9.51″), а орбитальные координаты ξ и η их выражениями (9.41), мы получим для координат x, y, z еще следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned}\right\} \qquad (9.52)$$

где

$$u = v + \omega. \qquad (9.53)$$

Нетрудно видеть, что u есть угол, образуемый радиусом-вектором r с направлением на восходящий узел орбиты *) (см. рис. 47 или 49). Этот угол называется **аргументом широты** и играет такую же роль, как и истинная аномалия v.

---

*) Хотя этот угол обозначен той же буквой u, которой обозначено обратное расстояние $1/\rho$ в § 1, путаницы не произойдет, если остерегаться употреблять оба обозначения одновременно.

Формулы (9.52) легко также вывести непосредственно из чертежа. Для этого нужно соединить на рис. 49 дугами больших кругов точки x, y, z с точкой M и применить основную формулу сферической тригонометрии к сферическим треугольникам (xMN), (yMN) и (zMN).

Ввиду (9.53) формулы (9.52) дают явные выражения для прямоугольных пространственных координат в зависимости от истинной аномалии v и пяти постоянных: Ω, i, ω, p, e. Шестая постоянная τ и время t входят в эти формулы через переменную v.

Заметим, что выражение для v, определяемое из соотношения (9.45), содержит еще постоянные p и e. В результате координаты x, y, z представляются формулами (9.52) как функции времени t и шести произвольных постоянных

$$\Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau. \tag{9.54}$$

Эти постоянные называются элементами кеплеровской орбиты, кеплеровскими элементами невозмущенной орбиты или, когда это не может вызвать недоразумения, просто элементами орбиты.

Элементы орбиты можно разделить на три группы. К первой группе отнесем элементы

$$\Omega, \quad i, \quad \omega,$$

определяющие положение плоскости орбиты в пространстве и положение орбиты в ее плоскости. Во вторую группу включим элементы

$$p,\ e,$$

определяющие размеры орбиты и ее форму. Наконец, к третьей группе отнесем единственный элемент

$$\tau,$$

определяющий положение планеты на ее орбите в начальный момент *).

Элементы первой и второй групп суть чисто геометрические величины, связанные с двумя основными векторами — вектором момента количества движения и вектором Лапласа. При этом элементы первой группы определяют направления этих векторов, а элементы второй группы связаны с их модулями.

Так как элемент третьей группы τ связан с движением по орбите, т. е. с динамикой движения, то он называется также иногда динамическим элементом.

---

*) Положим в формуле (9.45) $t=t_0$ и обозначим начальное значение истинной аномалии v через v_0. Тогда получим соотношение вида $v_0=v(t_0-\tau)$, связывающее две постоянные — v_0 и τ.

Вместо τ можно взять какую-нибудь другую зависящую от него величину, например, истинную аномалию v_0 в начальный момент, или, как говорят астрономы, истинную аномалию эпохи.

5. Дифференцируя теперь формулы (9.52) по времени t, которое входит в координаты через посредство r и u, и заменяя в полученных выражениях $\dot{v}$ и $\dot{r}$ их значениями (9.47) и (9.47′), мы получим проекции скорости движущейся точки в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{c}{p}[e\sin v(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i)+\\&\qquad+(1+e\cos v)(-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i)],\\\dot{y}&=\frac{c}{p}[e\sin v(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i)+\\&\qquad+(1+e\cos v)(-\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i)],\\\dot{z}&=\frac{c}{p}[e\sin v\sin u\sin i+(1+e\cos v)\cos u\sin i],\end{aligned}\right\}\tag{9.55}$$

т. е. как функции истинной аномалии v и пяти произвольных постоянных, а значит, как функции времени и шести элементов орбиты (9.54) *).

Полученные формулы удобно также представить в несколько ином виде. Обозначим направляющие косинусы радиуса-вектора r через α, β, γ и направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к радиусу-вектору и лежащей в плоскости орбиты, через α', β', γ' **). Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{x}{r}=\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i,\\\beta&=\frac{y}{r}=\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i,\\\gamma&=\frac{z}{r}=\sin u\sin i,\end{aligned}\right\}\tag{9.56}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\frac{d\alpha}{du}=-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i,\\\beta'&=\frac{d\beta}{du}=-\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i,\\\gamma'&=\frac{d\gamma}{du}=\cos u\sin i,\end{aligned}\right\}\tag{9.56′}$$

---

*) Формулы (9.55) можно также вывести из формул (9.50), заменяя в последних направляющие косинусы их выражениями (9.51′) и (9.51″) и делая некоторые элементарные преобразования. Формулы (9.55) можно также получить и геометрическим путем.

**) Чтобы получить второе направление, нужно повернуть радиус-вектор в плоскости орбиты по направлению возрастания v на 90°.

и общее решение уравнений невозмушенного движения представится в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha r, & \dot{x} &= \frac{c}{p}[\alpha e \sin v + \alpha'(1 + e\cos v)], \\ y &= \beta r, & \dot{y} &= \frac{c}{p}[\beta e \sin v + \beta'(1 + e\cos v)], \\ z &= \gamma r, & \dot{z} &= \frac{c}{p}[\gamma e \sin v + \gamma'(1 + e\cos v)]. \end{aligned}\right\} \qquad (9.57)$$

Далее, если в формулах (9.56) и (9.56′) положить $t=\tau$, то $v=0$ и формулы (9.56) дадут направляющие косинусы линии апсид, или оси $O\xi$, а формулы (9.56′) дадут направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к линии апсид, т. е. оси $O\eta$. Обозначая эти направляющие косинусы соответственно через α_τ, β_τ, γ_τ и α'_τ, β'_τ, γ'_τ, мы имеем, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\tau &= \frac{f_1}{f} = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i, \\ \beta_\tau &= \frac{f_2}{f} = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i, \\ \gamma_\tau &= \frac{f_3}{f} = \sin\omega\sin i, \end{aligned}\right\} \qquad (9.58)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_\tau &= \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i, \\ \beta'_\tau &= \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} = -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i, \\ \gamma'_\tau &= \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} = \cos\omega\sin i. \end{aligned}\right\} \qquad (9.58')$$

С этими обозначениями общее решение уравнений невозмущенного движения представится следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_\tau\xi + \alpha'_\tau\eta, & \dot{x} &= \alpha_\tau\dot{\xi} + \alpha'_\tau\dot{\eta}, \\ y &= \beta_\tau\xi + \beta'_\tau\eta, & \dot{y} &= \beta_\tau\dot{\xi} + \beta'_\tau\dot{\eta}, \\ z &= \gamma_\tau\xi + \gamma'_\tau\eta, & \dot{z} &= \gamma_\tau\dot{\xi} + \gamma'_\tau\dot{\eta}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.59)$$

§ 4. Другие способы интегрирования дифференциальных уравнений невозмущенного движения

Мы вывели общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного движения из общего интеграла системы (9.16), т. е. из совокупности независимых между собой первых интегралов, легко получающихся составлением интегрируемых комбинаций из уравнений движения.