и общее решение уравнений невозмушенного движения представится в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha r, & \dot{x}&=\frac{c}{p}[\alpha e\sin v+\alpha'(1+e\cos v)],\\ y&=\beta r, & \dot{y}&=\frac{c}{p}[\beta e\sin v+\beta'(1+e\cos v)],\\ z&=\gamma r, & \dot{z}&=\frac{c}{p}[\gamma e\sin v+\gamma'(1+e\cos v)]. \end{aligned}\right\}\tag{9.57}$$

Далее, если в формулах (9.56) и (9.56′) положить $t=\tau$, то $v=0$ и формулы (9.56) дадут направляющие косинусы линии апсид, или оси $O\xi$, а формулы (9.56′) дадут направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к линии апсид, т. е. оси $O\eta$. Обозначая эти направляющие косинусы соответственно через α_τ, β_τ, γ_τ и α'_τ, β'_τ, γ'_τ, мы имеем, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\tau&=\frac{f_1}{f}=\cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos i,\\ \beta_\tau&=\frac{f_2}{f}=\cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos i,\\ \gamma_\tau&=\frac{f_3}{f}=\sin\omega\sin i, \end{aligned}\right\}\tag{9.58}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_\tau&=\frac{c_2f_3-c_3f_2}{cf}=-\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\sin\Omega\cos i,\\ \beta'_\tau&=\frac{c_3f_1-c_1f_3}{cf}=-\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i,\\ \gamma'_\tau&=\frac{c_1f_2-c_2f_1}{cf}=\cos\omega\sin i. \end{aligned}\right\}\tag{9.58′}$$

С этими обозначениями общее решение уравнений невозмущенного движения представится следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_\tau\xi+\alpha'_\tau\eta, & \dot{x}&=\alpha_\tau\dot{\xi}+\alpha'_\tau\dot{\eta},\\ y&=\beta_\tau\xi+\beta'_\tau\eta, & \dot{y}&=\beta_\tau\dot{\xi}+\beta'_\tau\dot{\eta},\\ z&=\gamma_\tau\xi+\gamma'_\tau\eta, & \dot{z}&=\gamma_\tau\dot{\xi}+\gamma'_\tau\dot{\eta}. \end{aligned}\right\}\tag{9.59}$$

§ 4. Другие способы интегрирования дифференциальных уравнений невозмущенного движения

Мы вывели общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного движения из общего интеграла системы (9.16), т. е. из совокупности независимых между собой первых интегралов, легко получающихся составлением интегрируемых комбинаций из уравнений движения.

Это же общее решение можно получить и многими другими способами. Некоторые из них полезно и поучительно здесь рассмотреть.

1. Прежде всего мы рассмотрим более общую задачу о движении материальной точки под действием центральной силы. Частным случаем этой задачи является и наша задача о невозмущенном кеплеровском движении.

Пусть материальная точка M находится под действием некоторой силы, направление которой постоянно проходит через неподвижную точку O — центр силы.

Возьмем центр силы за начало прямоугольной системы координат, с неизменными направлениями осей $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$. Примем массу движущейся точки за единицу массы и обозначим через $1 \cdot G$ величину силы, действующей на эту точку. Тогда проекции ускорения, вызываемого действием этой силы, будут равны соответственно

$$X = \mp G \frac{x}{r}, \quad Y = \mp G \frac{y}{r}, \quad Z = \mp G \frac{z}{r},$$

где знак минус относится к тому случаю, когда сила направлена к началу координат (центральная сила есть сила притяжения), а знак плюс соответствует случаю, когда сила направлена от начала координат (случай силы отталкивания).

Положим для упрощения

$$\mp G = F.$$

Тогда дифференциальные уравнения движения материальной точки, находящейся под действием центральной силы, напишутся следующим образом:

$$\ddot{x} = F \frac{x}{r}, \quad \ddot{y} = F \frac{y}{r}, \quad \ddot{z} = F \frac{z}{r}. \tag{9.60}$$

Мы можем рассматривать F как величину силы, действующей на материальную точку единичной массы, считая силу притяжения отрицательной, а силу отталкивания — положительной.

Уравнения задачи о невозмущенном движении получатся из уравнений (9.60), если положить

$$F = -\frac{\mu}{r^2}.$$

Таким образом, мы можем рассматривать уравнения (9.16) как уравнения движения материальной точки единичной массы, притягиваемой к неподвижному центру O с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от центра силы, В общем случае, сила F может зависеть произвольным образом от расстояния r до центра силы, от радиальной скорости $\dot{r}$ и от времени t. Если (в частном случае) F зависит только от радиуса-вектора r, то ее можно рассматривать как производную по r от некоторой функции U, называемой силовой функцией или функцией сил*). Действительно, положим

$$U(r)=\int F(r)\,dr,$$

$$dU(r)=F(r)\,dr.$$

Тогда

$$F(r)=\frac{dU}{dr},$$

и так как $r^2=x^2+y^2+z^2$, то

$$F(r)\frac{x}{r}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad F(r)\frac{y}{r}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad F(r)\frac{z}{r}=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае уравнения движения можно написать также в виде

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad \ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{9.61}$$

Уравнения невозмущенного движения (9.16) получаются из уравнений (9.61) при

$$U=\frac{\mu}{r}.$$

При произвольной функции F уравнения (9.60) или даже уравнения (9.61) не могут быть проинтегрированы до конца, хотя бы в квадратурах, но задачу интегрирования можно значительно упростить, используя существующие здесь первые интегралы. Действительно, какова бы ни была величина F, уравнения (9.60) всегда имеют три интеграла, аналогичные интегралам площадей уравнений невозмущенного движения (9.16) и являющиеся следствием центральности действующей силы.

В самом деле, умножим второе из уравнений (9.60) на $-z$, третье на $+y$ и сложим их, что дает

$$y\ddot{z}-z\ddot{y}=0,$$

*) В теории притяжения (часть первая) мы рассматривали силовую функцию ньютонианского притяжения. Теперь мы видим, что понятие силовой функции может иметь и более общий характер.

откуда интегрированием получаем интеграл и еще два других, выводимых таким же образом:

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3. \end{aligned}\right\} \tag{9.62}$$

Уравнения (9.62), которые мы будем называть **интегралами площадей**, показывают, что движение под действием **любой** центральной силы происходит в неизменной плоскости, проходящей через начало координат (центр силы). Действительно, умножая уравнения (9.62) соответственно на x, y, z и складывая, мы получим

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0, \tag{9.63}$$

т. е. уравнение плоскости, проходящей через начало координат. В силу уравнения (9.63) координаты x, y, z можно выразить через какие-нибудь две независимые переменные, которые опять будем называть **орбитальными координатами** (или координатами в плоскости орбиты).

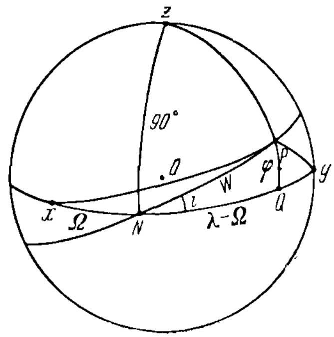

Рис. 50.

Примем за эти две независимые переменные радиус-вектор r движущейся точки и угол w, образованный радиусом-вектором с линией пересечения плоскости движения с плоскостью (xOy) (линия узлов). Тогда, как было указано выше (см. сноску на стр. 447), формулы, выражающие три пространственные координаты через две орбитальные, можно получить чисто геометрическим путем.

Вообразим опять сферу произвольного радиуса с центром в начале координат и обозначим, так же как и выше, буквами x, y, z, P точки пересечения координатных осей и радиуса-вектора точки M с этой сферой (рис. 50). Далее, пусть N есть восходящий узел на сфере, т. е. точка пересечения линии узлов плоскости (9.63) со сферой. Соединяя отмеченные точки на сфере дугами больших кругов, получим три сферических треугольника: (xNP), (yNP), (zNP), в которых стороны $\widehat{Px}$, $\widehat{Py}$, $\widehat{Pz}$ измеряют углы между радиусом-вектором r и положительными направлениями осей координат. Косинусы этих углов суть

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r}.$$

Далее, сторона $\widehat{xN}$ есть долгота восходящего узла Ω, а сторона $\widehat{NP}$ измеряет угол w. Наконец, сферический угол $\angle PNy$ равен наклонности плоскости орбиты i, а угол $\angle xNP$ дополняет угол i до $180°$.

Применяя основную формулу сферической тригонометрии к каждому из трех указанных сферических треугольников, мы получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos w\cos\Omega - \sin w\sin\Omega\cos i),\\ y &= r(\cos w\sin\Omega + \sin w\cos\Omega\cos i),\\ z &= r\sin w\sin i, \end{aligned}\right\} \tag{9.64}$$

выражающие пространственные координаты через две орбитальные и через две постоянные, Ω и i, определяющие положение плоскости движения в системе $(Oxyz)$.

Итак, задача сводится к нахождению двух неизвестных r и w. Нетрудно получить дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять эти орбитальные координаты.

Дифференцируя формулы (9.64) по времени, имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\frac{x}{r} + r\dot{w}(-\sin w\cos\Omega - \cos w\sin\Omega\cos i),\\ \dot{y} &= \dot{r}\frac{y}{r} + r\dot{w}(-\sin w\sin\Omega + \cos w\cos\Omega\cos i),\\ \dot{z} &= \dot{r}\frac{z}{r} + r\dot{w}\cos w\sin i, \end{aligned}\right\} \tag{9.65}$$

что можно также написать короче, используя обозначения (9.56) и (9.56′), в виде *)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\alpha + r\dot{w}\alpha',\\ \dot{y} &= \dot{r}\beta + r\dot{w}\beta',\\ \dot{z} &= \dot{r}\gamma + r\dot{w}\gamma'. \end{aligned}\right\} \tag{9.65′}$$

Дифференцируя затем формулы (9.65′), получим

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{w}^2)\alpha + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\alpha',\\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{w}^2)\beta + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\beta',\\ \ddot{z} &= (\ddot{r} - r\dot{w}^2)\gamma + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\gamma'. \end{aligned}\right\} \tag{9.65″}$$

*) Нужно отметить, что в рассматриваемом случае угол, образованный радиусом-вектором точки M с линией узлов (аргумент широты), обозначен буквой w, так как u будет обозначать в этом параграфе другую величину.

Подставляя теперь выражения (9.65″) и (9.64) в уравнения (9.60), мы получим следующие равенства:

$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\,\alpha + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\,\alpha' = 0,$$
$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\,\beta + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\,\beta' = 0,$$
$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\,\gamma + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\,\gamma' = 0,$$

помножая которые соответственно на α, β, γ и затем на α', β', γ' и каждый раз складывая, выводим

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 - F &= 0, \\ r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.66)$$

Заметим, что второе из этих уравнений можно непосредственно интегрировать один раз, что дает первый интеграл системы (9.66) в виде *)

$$r^2\dot{w} = \text{const.} \qquad (9.67)$$

Таким образом, система (9.66) приведется к виду

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 - F &= 0, \\ r^2\dot{w} &= c, \end{aligned}\right\} \qquad (9.66')$$

а эта система распадается на два отдельных уравнения.

Действительно, исключая из уравнений (9.66′) угловую скорость $\dot{w}$, мы получим одно уравнение

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} - F(t,\ r,\ \dot{r}) = 0 \qquad (9.66'')$$

с одной неизвестной функцией r. Если это уравнение второго порядка возможно проинтегрировать, то мы получим радиус-вектор как функцию времени и трех произвольных постоянных (одна из них есть постоянная площадей c). После этого из уравнения

$$r^2\dot{w} = c \qquad (9.66''')$$

квадратурой найдем

$$w = w_0 + c\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^2},$$

где w_0 — четвертая произвольная постоянная.

---

*) Этот же интеграл можно вывести также из интегралов площадей (9.62), подставляя в них вместо координат и их производных выражения (9.64) и (9.65). Легко убедиться, что каждое из трех уравнений (9.62) приводится к одному-единственному уравнению (9.67), в котором константа интегрирования в силу формул (9.51) равна c.

Наконец, формулы (9.64) дадут x, y, z как функции времени и шести произвольных постоянных.

2. Таким образом, задача сводится к интегрированию единственного дифференциального уравнения второго порядка с одной неизвестной функцией. Однако, вообще говоря, это уравнение не может быть проинтегрировано в квадратурах, так что решение задачи нельзя довести до конца, по крайней мере аналитическим путем.

Рассмотрим частный случай задачи о движении под действием центральной силы, предполагая, что величина F не зависит явно от t и является некоторой функцией только радиуса-вектора r и радиальной производной $\dot{r}$.

Тогда уравнение (9.66″) можно несколько упростить, исключая из него dt при помощи равенства (9.66‴), т. е. вводя вместо t угол w, как новую независимую переменную.

Принимая еще за неизвестную функцию обратное значение радиуса-вектора

$$u = \frac{1}{r},$$

мы найдем

$$\dot{r} = -c\frac{du}{dw},$$

$$\ddot{r} = -c^2u^2\frac{d^2u}{dw^2},$$

вследствие чего равенство (9.66″) приведется к виду

$$\frac{d^2u}{dw^2} + u = -\frac{1}{c^2u^2}F\left(\frac{1}{u},\ -c\frac{du}{dw}\right), \tag{9.67′}$$

называемое в теоретической механике *уравнением Бине*.

Это уравнение, вообще говоря, также не может быть проинтегрировано, но если величина F зависит только от r, то нахождение решения (9.67′) сводится к квадратурам.

Положим, как обычно делают в этом случае,

$$p = \frac{du}{dw},$$

и примем u за независимую переменную. Тогда уравнение Бине напишется в форме

$$p\frac{dp}{du} + u = -\frac{1}{c^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) = \Phi(u).$$

и легко интегрируется в квадратурах, что дает

$$p^2 = c_1^2 - u^2 + \int \Phi(u)\,du. \tag{9.67″}$$

Найдя p как функцию u, получим теперь и w как функцию u по формуле

$$w = c_2 + \int \frac{du}{p},$$

что и дает общий интеграл нашего дифференциального уравнения.

Случай, когда сила зависит только от радиуса-вектора движущейся точки, можно рассмотреть еще иначе.

В самом деле, в этом случае, как мы видели выше, существует силовая функция U, и уравнения движения имеют вид (9.61). Эти уравнения, кроме трех интегралов площадей, имеют еще один интеграл — интеграл живой силы, который получим, умножая (9.61) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$, складывая результаты и интегрируя, что дает

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U + h, \tag{9.68}$$

что можно также написать в виде

$$V^2 = 2U + h \tag{9.68'}$$

(постоянная интегрирования h есть постоянная живой силы).

Переходя к орбитальным координатам r и w, мы напишем предыдущее уравнение в следующем виде:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{w}^2 = 2U + h. \tag{9.69}$$

Исключая отсюда dt с помощью интеграла площадей (9.66‴) и беря за искомую функцию u вместо r, мы получим

$$c^2\left(\frac{du}{dw}\right)^2 + c^2u^2 = 2U + h, \tag{9.69'}$$

что совпадает с (9.67″), если в последнем положить $F = -u^2\dfrac{dU}{du}$.

Разделяя переменные в (9.69′) и интегрируя, мы получим соотношение между u и w, т. е. уравнение орбиты в полярных орбитальных координатах:

$$c\int \frac{du}{\sqrt{2U + h - c^2u^2}} = w + C. \tag{9.70}$$

Рассмотрим теперь, как частный случай задачи о движении под действием центральной силы, задачу о невозмущенном движении. Тогда, как уже отмечено,

$$F = -\mu u^2,$$

и уравнение Бине примет вид

$$\frac{d^2u}{dw^2} + u = \frac{\mu}{c^2}. \tag{9.71}$$

Мы получили линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого составляется по общим правилам без всякого труда. Действительно, частное решение уравнения (9.71), есть, очевидно, μ/c^2, а независимыми частными решениями уравнения без правой части будут $\cos w$ и $\sin w$.

Поэтому общее решение (9.71) напишется в следующем виде:

$$u = \frac{\mu}{c^2} + C_1 \cos w + C_2 \sin w, \tag{9.72}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Положим для сокращения $p = \frac{c^2}{\mu}$ и введем вместо C_1 и C_2 две другие постоянные, e и ω, при помощи формул

$$C_1 = \frac{e}{p} \cos \omega, \quad C_2 = \frac{e}{p} \sin \omega.$$

Тогда уравнение орбиты примет вид

$$pu = 1 + e \cos (w - \omega), \tag{9.72'}$$

а если положить

$$v = w - \omega$$

и разрешить предыдущее уравнение относительно радиуса-вектора r, то получим

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \tag{9.72''}$$

т. е. уже знакомое нам уравнение невозмущенной орбиты в полярных координатах.

Это же уравнение можно вывести и из (9.70). Действительно, для невозмущенного движения $U = \mu u$ и (9.70) примет вид

$$c \int \frac{du}{\sqrt{2\mu u + h - c^2 u^2}} = w + C,$$

откуда получим

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 + hc^2}}{c^2} \sin (w + C).$$

Полагая здесь

$$\frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\sqrt{\mu^2 + hc^2}}{\mu} = e, \quad C = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad v = w - \omega,$$

получим опять хорошо знакомое уравнение кривой второго порядка в полярных координатах

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v,$$

фокус которой находится в начале координат, т. е. в притягивающем центре.

Входящие сюда постоянные имеют обычные значения. Величина p есть параметр кривой второго порядка или половина фокальной хорды, перпендикулярной к фокальной оси. Величина e есть эксцентриситет кривой, а если положить

$$f=\sqrt{\mu^2+hc^2},$$

то будем иметь, как и ранее,

$$e=\frac{f}{\mu}.$$

Угол v есть, очевидно, угол между радиусом-вектором и фокальной осью кривой, т. е. истинная аномалия, а ω есть угол между фокальной осью и линией узлов, т. е. угловое расстояние перицентра от узла.

Зная r как функцию v, мы получим пространственные координаты x, y, z по формулам (9.64), а их первые производные (проекции скорости V на оси координат) по формулам (9.65).

Окончательное решение задачи опять приводится к нахождению истинной аномалии v в зависимости от времени. Так как, очевидно, $\dot{v}=\dot{w}$, то из (9.66‴) имеем

$$r^2\dot{v}=c.$$

Это есть интеграл площадей в плоскости орбиты в полярных координатах. Отсюда по формуле (9.45) найдем соотношение между v и t так же, как это было описано выше, и решение задачи приведется к вычислению интеграла в уравнении (9.45) и к последующему затем решению полученного уравнения относительно истинной аномалии v.

В заключение этого раздела рассмотрим еще случай силы отталкивания, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Тогда в уравнении Бине (9.67) нужно положить

$$F=+\mu u^2,$$

так что это уравнение напишется в виде

$$\frac{d^2u}{dw^2}+u=-\frac{\mu}{c^2}.$$

Общее решение этого уравнения найдется по формуле

$$u=-\frac{\mu}{c^2}+C_1\cos w+C_2\sin w.$$

Полагая опять

$$\frac{\mu}{c^2}=\frac{1}{p},\quad C_1=\frac{e}{p}\cos\omega,\quad C_2=\frac{e}{p}\sin\omega,$$

мы получим уравнение орбиты в виде

$$pu = -1 + e\cos(w - \omega),$$

или, полагая $v = w - \omega$ и разрешая относительно r,

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos v}.$$

Это уравнение представляет собой вторую ветвь гиперболы, фокус которой находится вне кривой (рис. 51).

3. Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения невозмущенного кеплеровского движения в форме Клеро — Лапласа

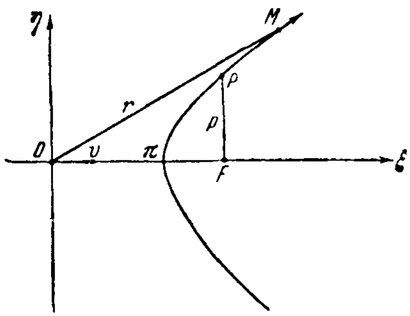

Рис. 51.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{d\lambda^2} + u = \frac{\mu}{\sigma^2}(1 + s^2)^{-\frac{3}{2}},\\ &\frac{d^2s}{d\lambda^2} + s = 0,\\ &\frac{d\lambda}{dt} = \sigma u^2, \end{aligned}\right\} \qquad (9.73)$$

где σ — произвольная постоянная.

Второе из этих уравнений есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка простейшего вида, общее решение которого можно написать сразу:

$$s = C_1' \cos\lambda + C_2' \sin\lambda,$$

где C_1' и C_2' — произвольные постоянные.

Полагая теперь

$$C_1' = -\nu\sin\theta, \quad C_2' = \nu\cos\theta,$$

где ν и θ — две новые постоянные, мы представим предыдущее равенство в виде

$$s = \nu\sin(\lambda - \theta). \qquad (9.74)$$

Подставляя найденное выражение для s как функции независимой переменной λ в первое из уравнений (9.72), мы получим для определения второй неизвестной u следующее уравнение*):

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} + u = \frac{\mu}{\sigma^2}\left[1 + \nu^2\sin^2(\lambda - \theta)\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

*) В этом разделе буква u обозначает обратное значение проекции радиуса-вектора r на плоскость (xOy), т. е. $u = 1/\rho$.

Нетрудно проверить, что функция

$$u^0 = \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{\sqrt{1 + \nu^2 \sin^2 (\lambda - \theta)}}{1 + \nu^2}$$

удовлетворяет этому уравнению, а поэтому общее его решение напишется следующим образом *):

$$u = u^0 + C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda,$$

где C_1 и C_2 — новые произвольные постоянные.

Полагая теперь

$$C_1 = \frac{\mu\varepsilon \cos \gamma}{\sigma^2 (1 + \nu^2)}, \quad C_2 = \frac{\mu\varepsilon \sin \gamma}{\sigma^2 (1 + \nu^2)},$$

мы представим функцию u в форме

$$u = \frac{\mu}{\sigma^2 (1 + \nu^2)} \left[\varepsilon \cos (\lambda - \gamma) + \sqrt{1 + \nu^2 \sin^2 (\lambda - \theta)}\right]. \tag{9.75}$$

Таким образом, величины u и s представлены как функции долготы λ и пяти произвольных постоянных

$$\sigma, \ \nu, \ \theta, \ \varepsilon, \ \gamma.$$

Последнее из уравнений (9.73) после интегрирования даст соотношение между долготой λ и временем t, содержащее еще одну, шестую, произвольную постоянную, которую обозначим через λ_0.

Наконец, по формулам

$$x = \frac{\cos \lambda}{u}, \quad y = \frac{\sin \lambda}{u}, \quad z = \frac{s}{u} \tag{9.76}$$

найдем прямоугольные пространственные координаты, а по формуле

$$r = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{u} \tag{9.76$'$}$$

радиус-вектор движущейся точки.

Установим геометрическое значение постоянных, входящих в полученные нами формулы.

Для этого подставим сначала в уравнение плоскости орбиты

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

вместо прямоугольных координат их выражения (9.76), а вместо постоянных площадей их выражения (9.62′).

---

*) Это решение можно вычислить рациональным образом, применяя метод вариации произвольных постоянных к уравнению $u'' + u = R$. Тогда частное решение нашего уравнения определится формулой

$$u^0 = -\cos \lambda \int R \sin \lambda \, d\lambda + \sin \lambda \int R \cos \lambda \, d\lambda.$$

Результат подстановки представим в виде

$$s = \operatorname{tg} i \sin(\lambda - \Omega) \tag{9.74'}$$

и сравним полученное выражение для s с (9.74).

Сравнение дает

$$\nu = \operatorname{tg} i, \quad \theta = \Omega, \tag{9.77}$$

т. е. постоянная ν есть тангенс наклонности орбиты к основной плоскости (xOy), а θ — долгота восходящего узла.

Таким образом, постоянные ν и θ определяют положение плоскости орбиты, а уравнение (9.74) или (9.74′) есть уравнение плоскости орбиты в переменных Клеро — Лапласа. Чтобы получить значения остальных постоянных, приведем уравнение орбиты (9.75) к обычному виду уравнения кривой второго порядка в полярных координатах.

Для этого заменим сначала в первых двух формулах (9.76) координаты x и y их выражениями из формул (9.64).

Имея еще в виду формулу (9.76′), мы получим соотношения

$$\frac{\cos\lambda}{\sqrt{1+s^2}} = \cos w \cos\Omega - \sin w \sin\Omega \cos i,$$

$$\frac{\sin\lambda}{\sqrt{1+s^2}} = \cos w \sin\Omega + \sin w \cos\Omega \cos i,$$

из которых выведем следующие формулы:

$$\frac{\cos(\lambda-\Omega)}{\sqrt{1+s^2}} = \cos w, \quad \frac{\sin(\lambda-\Omega)}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\sin w}{\sqrt{1+\nu^2}}. \tag{9.78}$$

Теперь из формулы (9.75) находим

$$r = \frac{\dfrac{\sigma^2(1+\nu^2)}{\mu}}{1+\varepsilon\dfrac{\cos(\lambda-\theta)\cos(\gamma-\theta)+\sin(\lambda-\theta)\sin(\gamma-\theta)}{\sqrt{1+s^2}}},$$

откуда с помощью (9.78) получим

$$r = \frac{\dfrac{\sigma^2(1+\nu^2)}{\mu}}{1+\varepsilon\left[\cos w\cos(\gamma-\theta)+\dfrac{\sin w \sin(\gamma-\theta)}{\sqrt{1+\nu^2}}\right]}. \tag{9.79}$$

Сравним это выражение для радиуса-вектора с (9.72″), которое можно написать в виде

$$r = \frac{p}{1+e\,[\cos w \cos\omega + \sin w \sin\omega]}.$$

Так как оба эти выражения для r должны быть тождественны, то мы имеем

$$p=\frac{\sigma^2(1+\nu^2)}{\mu},$$
$$e\cos\omega=\varepsilon\cos(\gamma-\theta),$$
$$e\sin\omega=\frac{\varepsilon\sin(\gamma-\theta)}{\sqrt{1+\nu^2}},$$

откуда выводим

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=c\cdot\cos i=\sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i,\\ \varepsilon&=e\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i\cdot\sin^2\omega},\\ \operatorname{tg}(\gamma-\theta)&=\operatorname{tg}\omega\sec i,\end{aligned}\right\}\qquad(9.80)$$

и наоборот,

$$\left.\begin{aligned}c&=\sigma\sqrt{1+\nu^2},\\ e&=\varepsilon\sqrt{1+\nu^2\cos^2(\gamma-\theta)},\\ \operatorname{tg}\omega&=\frac{\operatorname{tg}(\gamma-\omega)}{\sqrt{1+\nu^2}}.\end{aligned}\right\}\qquad(9.80')$$

Таким образом, постоянная σ есть величина проекции вектора момента количества движения на ось Oz системы (xyz). Величина ε пропорциональна эксцентриситету орбиты и самостоятельного геометрического значения не имеет. Однако можно ввести в рассмотрение некоторый вектор, лежащий в плоскости (xOy), величина и направление которого определяют постоянные ε и γ и с которым связан вектор Лапласа.

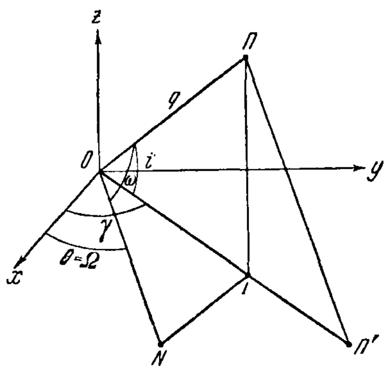

Рис. 52.

Действительно, пусть $П$ есть перицентр орбиты, а L его проекция на плоскость (xOy) (рис. 52). Рассмотрим вектор, лежащий в плоскости xOy, направление которого совпадает с направлением от начала координат к точке L. Величину этого вектора g определим формулой

$$g=f\cdot\sec i,$$

где f — величина вектора Лапласа.

Тогда будем иметь

$$\varepsilon=\frac{g}{\mu},\quad \gamma=\angle\, xOL.\qquad(9.81)$$

В самом деле, проведем через перицентр Π прямую, лежащую в плоскости $O\Pi L$ и перпендикулярную к линии апсид, т. е. к прямой $O\Pi$, и обозначим через Π' точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью xOy.

В образовавшихся треугольниках сторона $\overline{O\Pi}$ есть расстояние от фокуса орбиты до перицентра, которое обозначим буквой q. Сторона $\overline{\Pi L}$ есть аппликата перицентра, которую можно определить из третьей формулы (9.64), полагая в ней $v=0$, а следовательно, $r=q$ и $w=\omega$. Таким образом, $\overline{\Pi L}=q\sin\omega\sin i$. Теперь из треугольника $\Pi L\Pi'$ находим $\overline{\Pi\Pi'}=q\operatorname{tg} i\sin\omega$, а из треугольника $O\Pi\Pi'$ имеем

$$\overline{O\Pi'}=q\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i\sin^2\omega}=q\sec i.$$

Отсюда с помощью второй из формул (9.80) находим

$$\varepsilon=e\cdot\sec i=\frac{f}{\mu}\sec i=\frac{g}{\mu}.$$

Далее, опустим перпендикуляр из точки Π на линию узлов орбиты, а основание перпендикуляра N соединим с L (см. рис. 52). Тогда из образовавшихся треугольников $N\Pi L$, ONL и $ON\Pi$ имеем

$$\overline{NL}=\overline{N\Pi}\cdot\cos i,\quad \overline{N\Pi}=\overline{ON}\cdot\operatorname{tg}\omega$$

$$\overline{NL}=\overline{ON}\operatorname{tg}\omega\cos i=\overline{ON}\operatorname{tg}(\angle NOL).$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\angle NOL)=\operatorname{tg}\omega\cos i,$$

а сравнивая это выражение с третьей формулой (9.80), найдем, что $\angle NOL=\gamma-\theta$, а поэтому

$$\gamma=\angle NOL+\angle NOx=\angle xOL,$$

и справедливость формул (9.81) установлена (см. рис. 52).

В результате проведенного интегрирования уравнений (9.73) общее решение уравнений невозмущенного движения будет содержать шесть постоянных:

$$\nu,\ \theta,\ \gamma,\ \sigma,\ \varepsilon,\ \lambda_0, \tag{9.82}$$

которые полностью определяют невозмущенное движение, а поэтому могут быть названы также *элементами орбиты*. Естественно назвать величины (9.82) *лапласовскими элементами невозмущенного движения* или просто *элементами Лапласа*.

Примечание. Заметим, что вектор Лапласа является проекцией вектора g на плоскость орбиты.

4. Рассмотрим в заключение этого параграфа интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного движения по способу Гамильтона — Якоби.

Если взять за канонические переменные прямоугольные координаты и составляющие скорости, то уравнения движения будут иметь вид (9.11), где функция Гамильтона определяется формулой (9.12). Так как функция H не зависит от времени, то соответствующее системе (9.11) уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+2\alpha_1, \tag{9.83}$$

где W обозначает неизвестную функцию. Найдя решение уравнения (9.83), зависящее, кроме α_1, еще от двух произвольных постоянных, мы найдем затем общий интеграл уравнений невозмущенного кеплеровского движения по формулам, аналогичным формулам (6.54) и (6.54′) гл. VI.

Однако уравнение (9.83) не удается решить непосредственно, вследствие чего применить метод Гамильтона — Якоби к системе (9.11) прямо оказывается невозможным. Причина этого обстоятельства заключается в том, что единственным эффективным способом решения уравнений типа (9.83) является метод *разделения переменных*, который здесь неприменим, так как функцию

$$\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

невозможно разложить на сумму функций, каждая из которых содержала бы только одну переменную.

Но достаточно перейти от прямоугольных координат к сферическим, чтобы метод Гамильтона — Якоби оказался применимым без всяких затруднений. Действительно, введем вместо прямоугольных координат x, y, z полярные сферические координаты r, φ, λ:

$$x=r\cos\varphi\cos\lambda,\quad y=r\cos\varphi\sin\lambda,\quad y=r\sin\varphi \tag{9.84}$$

и сопряженные им канонические импульсы. Тогда уравнения невозмущенного движения запишутся в виде (9.13) с функцией Гамильтона (9.14) и соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби примет вид

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2-\frac{2\mu}{r}=2\alpha_1, \tag{9.85}$$

и нахождение полного интеграла этого уравнения не представляет затруднений *).

В самом деле, здесь можно применить способ разделения переменных, т. е. искать неизвестную функцию W в виде

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda), \tag{9.85'}$$

где каждое слагаемое зависит только от одной координаты.

Подставляя (9.85′) в уравнение (9.85), мы представим последнее в следующем виде:

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{dW_3}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \tag{9.85''}$$

Мы удовлетворим уравнению (9.85″), полагая

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dW_3}{d\lambda} = \alpha_3, \\ &\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi} = \alpha_2^2, \\ &\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1, \end{aligned}\right\} \tag{9.85'''}$$

где α_2 и α_3 суть две новые произвольные постоянные. Определяя из (9.85‴) функции W_3, W_2, W_1 и подставляя найденные выражения в (9.85′), мы найдем решение уравнения (9.85), содержащее три необходимые произвольные постоянные (полный интеграл!), в следующем виде:

$$W = \alpha_3\lambda + \int\limits_0^\varphi \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi + \int\limits_{r_1}^r \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr, \tag{9.86}$$

где нижний предел r_1 последнего интеграла обозначает какую угодно постоянную. Мы не нарушим общности (так как нам нужно иметь решение, содержащее т о л ь к о т р и произвольные постоянные), принимая за r_1 меньший корень трехчлена, стоящего под знаком квадратного корня в третьем интеграле, т. е. считая, что

$$2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r_1} - \frac{\alpha_2^2}{r_1^2} = 0. \tag{9.86'}$$

*) Постоянная энергии h здесь обозначена для симметрии буквой α_1. Заметим, что мы могли бы сразу написать нужное решение по формулам § 6 гл. VI, где было дано решение уравнения Гамильтона—Якоби для более общего случая. Однако из методических соображений мы предпочли применить здесь более простой прием.

Теперь общий интеграл системы (9.13) определится следующими формулами *):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \beta_1, \\
\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \alpha_2 \int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}} - \alpha_2 \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \\
\frac{\partial W}{\partial \alpha_3} &= \lambda - \alpha_3 \int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}} = \beta_3,
\end{aligned}\right\} \tag{9.87}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial r} &= \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} = \dot{r}, \\
\frac{\partial W}{\partial \varphi} &= \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}} = r^2\dot{\varphi}, \\
\frac{\partial W}{\partial \lambda} &= \alpha_3 = r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda}.
\end{aligned}\right\} \tag{9.87'}$$

Равенства (9.87) и (9.87′) содержат шесть необходимых для общего интеграла уравнений невозмущенного кеплеровского движения произвольных постоянных

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3, \tag{9.87''}$$

которые называются *канонически ми элементами Якоби* или просто *элементами Якоби*.

Так как формулы (9.87) и (9.87′) представляют общий интеграл системы (9.13), а значит, и системы (9.11) или (9.7), то эти формулы эквивалентны формулам (9.52), (9.55), и элементы Якоби могут быть выражены через обычные кеплеровские элементы орбиты, а следовательно, и через начальные значения координат и составляющих скорости.

Чтобы получить упомянутые соотношения между элементами (9.87) и (9.54), рассмотрим выведенные нами первые интегралы (9.87) и (9.87′). Так как в действительном движении выражения, стоящие под знаками квадратных корней в этих формулах, не

*) r_1 в силу (9.86′) зависит от α_1 и α_2. Но при дифференцировании по α_1 и α_2, входящим через посредство r_1, соответствующие члены исчезают, опять-таки в силу соотношения (9.86′).

могут принимать отрицательных значений, то, в частности, изменение угла φ должно быть ограничено неравенством

$$\cos^2\varphi \geqslant \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}.$$

Поэтому должно быть

$$\left|\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right| \leqslant 1,$$

и мы можем положить

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cos i, \tag{9.88}$$

где i — некоторая новая постоянная.

Вычисляя теперь интеграл в третьей из формул (9.87), мы получим, имея в виду (9.88), следующее соотношение между координатами φ и λ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} i \cdot \sin(\lambda - \beta_3), \tag{9.89}$$

которое, как нетрудно убедиться, представляет собой уравнение плоскости, проходящей через начало координат.

Действительно, переходя от полярных координат к прямоугольным по формулам (9.84), мы получим из (9.89)

$$\sin\beta_3 \sin i \cdot x - \cos\beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0.$$

Так как последнее уравнение должно быть тождественно с уравнением плоскости орбиты (9.63), то мы имеем

$$\sin\beta_3 \sin i = \frac{c_1}{c}, \quad -\cos\beta_3 \sin i = \frac{c_2}{c}, \quad \cos i = \frac{c_3}{c}, \tag{9.89'}$$

т. е. постоянная i есть наклонность плоскости орбиты к основной плоскости (xOy), а постоянная β_3 есть долгота восходящего узла *).

Рассмотрим далее второе из уравнений (9.87). Введем вместо широты φ новую переменную u подстановкой

$$\sin\varphi = \sin i \sin u. \tag{9.90}$$

Тогда это уравнение может быть переписано, как легко видеть, следующим образом:

$$\alpha_2 \int\limits_{r_1}^{r} \frac{\dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\alpha_1 + \dfrac{2\mu}{r} - \dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2 - u, \tag{9.91}$$

*) Уравнение (9.89) можно вывести также непосредственно из чертежа, рассматривая прямоугольный сферический треугольник NPQ (см. рис. 50), в котором сторона PQ есть широта φ, а сторона NQ равна $\lambda - \Omega$.

откуда (используя (9.86′)) имеем

$$r=\frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1+\sqrt{1+\frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}\cos(u-\beta_2)}}. \tag{9.91′}$$

Мы пришли, таким образом, к хорошо знакомому уравнению кривой второго порядка в полярных координатах с началом в фокусе кривой. Это уравнение должно быть поэтому тождественно уравнению (9.42′), а следовательно, мы должны иметь

$$u-\beta_2=v, \quad \beta_2=\omega,$$

т. е. u есть аргумент широты, а ω — угловое расстояние перицентра от узла. Далее,

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu}=p, \quad \alpha_2=c=\sqrt{\mu}\sqrt{p},$$

и по формуле (9.88)

$$\alpha_3=c\cdot\cos i=\sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i,$$

т. е. α_2 есть модуль вектора момента количества движения, а α_3 есть проекция этого вектора на ось Oz. Наконец,

$$\sqrt{1+\frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}=e,$$

где e — эксцентриситет кривой, откуда

$$\alpha_1=\frac{\mu}{2p}(e^2-1).$$

Заметим теперь, что интеграл в первой из формул (9.87) обращается в нуль одновременно с интегралом (9.91), т. е. при $r=r_1$. Но (9.91) исчезает при $u=\beta_2=\omega$, т. е. при $v=0$, что соответствует моменту прохождения через перицентр. Поэтому r_1 есть радиус-вектор перицентра, т. е. наименьшее из всех возможных значений r (что видно непосредственно из (9.42′)), а $\beta_1=-\tau$.

Таким образом, мы имеем следующие выражения элементов Якоби через кеплеровские:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1=\frac{\mu}{2p}(e^2-1), & \alpha_2=\sqrt{\mu}\sqrt{p}, & \alpha_3=\sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i, \\ \beta_1=-\tau, & \beta_2=\omega, & \beta_3=\Omega. \end{array}\right\} \tag{9.92}$$

Из формул (9.87) можно вывести также знакомые нам уже выражения для прямоугольных координат. Для этого выведем предварительно еще одно соотношение. Дифференцируя равенство (9.89) по t, мы имеем

$$\dot{\varphi}\cdot\sec^2\varphi=\dot{\lambda}\operatorname{tg} i\cos(\lambda-\beta_3).$$

Исключая из этого равенства $\dot{\varphi}$ и $\dot{\lambda}$ при помощи формул (9.87′) и имея в виду подстановку (9.90), находим

$$\cos u=\cos\varphi\cos(\lambda-\beta_3). \tag{9.93}$$

Перепишем теперь формулы (9.89) и (9.93), заменяя β_3 на Ω, в следующем виде:

$$\cos\varphi\sin\lambda\cdot\cos\Omega-\cos\varphi\cos\lambda\cdot\sin\Omega=\sin u\cos i,$$
$$\cos\varphi\sin\lambda\cdot\sin\Omega+\cos\varphi\cos\lambda\cdot\cos\Omega=\cos u,$$

откуда находим

$$\cos\varphi\sin\lambda=\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i,$$
$$\cos\varphi\cos\lambda=\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i.$$

Теперь формулы (9.84) дают

$$x=r\cos\varphi\cos\lambda=r(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i),$$
$$y=r\cos\varphi\sin\lambda=r(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i),$$
$$z=r\sin\varphi=r\sin u\sin i.$$

Из этих формул простым дифференцированием по t выведем выражения для составляющих скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в виде (9.65) *).

Остается получить выражения для $\dot{r}$ и $\dot{u}$. Но формулы (9.87′) дают непосредственно

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sqrt{e^2-\left(\frac{p}{r}-1\right)^2},$$

и

$$r^2\dot{\varphi}\cos\varphi=\sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos u\sin i.$$

С другой стороны,

$$\frac{p}{r}=1+e\cos v,$$

а из формулы (9.90) найдем

$$\dot{\varphi}\cos\varphi=\dot{u}\cos u\sin i.$$

Поэтому предыдущие формулы дают

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin v,\quad \dot{u}=\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2}$$

в согласии с ранее полученными результатами.

---

*) Нужно иметь в виду, что в формулах (9.65) w следует заменить на u и что буква u обозначает здесь не обратное значение радиуса-вектора, а аргумент широты.

Таким образом, метод Гамильтона — Якоби позволяет не только провести полное интегрирование уравнений невозмущенного движения, но и получить независимым путем все общие формулы, выведенные ранее другими способами.

В заключение приведем выражения для прямоугольных координат в элементах Якоби:

$$x = r\left[\cos(v+\beta_2)\cos\beta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sin(v+\beta_2)\sin\beta_3\right],$$

$$y = r\left[\cos(v+\beta_2)\sin\beta_3 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sin(v+\beta_2)\cos\beta_3\right],$$

$$z = r\sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(v+\beta_2),$$

где r определяется формулой (9.91′) и

$$u = v + \beta_2.$$