ГЛАВА X

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

В предыдущей главе были выведены все необходимые формулы, дающие общее решение (или общий интеграл) системы дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения. В этом общем решении содержится необходимое число (именно — шесть!) произвольных постоянных, которые могут иметь какие угодно вещественные значения, определяемые произвольно задаваемыми начальными значениями координат и составляющих скорости движущейся точки (звезды, планеты или ее спутника, естественного или искусственного). Однако при различных начальных условиях одно и то же невозмущенное движение обладает, вообще говоря, различными свойствами. Так, например, вид и геометрические свойства орбит существенно зависят от начальных условий, а от вида орбиты зависит функциональная связь между истинной аномалией и временем. С другой стороны, от характера этой функциональной связи зависит последовательность формул, служащих для вычисления эфемерид, т. е. для определения места небесного тела в пространстве.

Эта глава и посвящается рассмотрению ряда вопросов, связанных с исследованием свойств орбит и свойств движений в задаче о невозмущенном движении в зависимости от начальных условий.

§ 1. Общие свойства невозмущенного кеплеровского движения

1. В предыдущей главе было установлено, что невозмущенное движение (кеплеровское!) происходит в некоторой неизменной плоскости, проходящей через начало координат (центр силы притяжения) и что траектория или орбита движущейся точки есть кривая второго порядка, один из фокусов которой совпадает с началом координат.

Это свойство напоминает нам известный из курса общей астрономии первый закон Кеплера, выведенный знаменитым астрономом для больших планет солнечной системы и устанавливающий, что орбита планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Но эллипс есть частный случай кривой второго порядка, а поэтому выведенное в этой книге свойство является несколько более общим, чем закон Кеплера, и может быть названо обобщенным законом Кеплера, который мы сформулируем теперь следующим образом:

Первый (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном движении орбита движущейся точки есть кривая второго порядка, в одном из фокусов которой находится центр силы притяжения*).

Второй закон Кеплера, устанавливающий неизменность секториальной скорости, также был выведен для случая эллиптической орбиты планеты в ее движении вокруг Солнца, но тоже распространяется на случай любой кеплеровской орбиты (эллипса, параболы, гиперболы).

Действительно, секториальная скорость движущейся точки определяется формулой (9.46) главы девятой, где c есть величина вектора момента скорости. Из этой формулы, предполагая, что величина $c=0$ **), сразу получаем

$$S=\frac{c}{2}t+c', \tag{10.1}$$

где c' обозначает новую произвольную постоянную, что приводит нас ко второму закону Кеплера в следующей формулировке:

Второй (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном движении площадь, описываемая радиусом-вектором движущейся точки, изменяется пропорционально времени.

Из общей астрономии нам известен еще третий закон Кеплера, устанавливающий связь между средним расстоянием планеты от Солнца и временем ее обращения вокруг Солнца. Очевидно, этот закон имеет место только для случая эллиптического движения, а поэтому не имеет такого общего значения, как два первых. Мы рассмотрим этот третий закон в несколько обобщенном виде в следующем параграфе.

Первые два закона Кеплера в их полной формулировке имеют место только для невозмущенного движения, происходящего под действием силы притяжения, обратно пропорциональной

---

*) Для планеты или кометы солнечной системы фокус орбиты находится в центре Солнца. Для Луны или для искусственного спутника Земли фокус находится в центре Земли и т. д.

**) В случае $c=0$, который будет рассмотрен ниже, закон площадей, очевидно, не имеет смысла. В этом случае секториальная скорость равна нулю и S остается постоянной.

квадрату расстояния до центра силы. Поэтому невозмущенное движение в этом случае и называется часто *кеплеровским движением* *).

Положение плоскости орбиты в невозмущенном движении зависит от постоянных площадей c_1, c_2, c_3, т. е. от направления вектора момента скорости. Положение орбиты в ее плоскости определяется направлением линии апсид, т. е. направлением вектора Лапласа. Наконец, вид орбиты зависит от величины вектора Лапласа, а ее размеры — от величины вектора момента скорости.

Действительно, уравнение орбиты в полярных координатах было выведено в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{10.2}$$

где p — параметр кривой, определяющий ее размеры, а e — ее эксцентриситет, характеризующий форму.

Мы имели

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{f}{\mu}. \tag{10.3}$$

Если $0 \leqslant e < 1$, то орбита есть эллипс, и движение точки называется в этом случае *эллиптическим кеплеровским движением* или просто *эллиптическим движением*. В частности, если $e = 0$, то эллипс превращается в окружность с центром в начале и соответствующее движение называется *круговым движением*.

Если $1 < e < \infty$, то орбита есть гипербола (точнее, та ветвь гиперболы, внутри которой находится центр силы), и движение точки называется *гиперболическим кеплеровским движением* или просто *гиперболическим движением*.

В предельном случае может быть $e = 1$, и тогда орбита точки есть парабола; в этом случае движение точки называется *параболическим кеплеровским движением* или *параболическим движением*.

Таким образом, тип движения полностью характеризуется величиной f вектора Лапласа:

если	$f = 0$,	то	орбита	есть	окружность,
»	$f < \mu$,	»	»	»	эллипс,
»	$f = \mu$,	»	»	»	парабола,
»	$f > \mu$,	»	»	»	гипербола.

*) В задаче о движении под действием произвольной центральной силы также существуют интегралы площадей, следствием которых являются неизменность плоскости орбиты и закон площадей. Таким образом, в этой задаче второй закон Кеплера выполняется полностью, а первый — частично, так как орбита есть плоская кривая.

Общими случаями являются случаи эллиптического и гиперболического движения. Случаи кругового и параболического движения, для осуществления которых постоянная f должна быть строго равна нулю или μ, должны рассматриваться как предельные.

При установлении типа кеплеровского движения мы предполагали неявно, что постоянная $c \neq 0$, т. е. что также $p \neq 0$, и орбита имеет определенные размеры.

Если же $c=0$, то и $p=0$, и уравнение орбиты (10.2) теряет смысл. Обращаясь тогда к общему уравнению (9.35) поверхности второго порядка, мы увидим, что в случае, когда $c=0$, эта поверхность превращается в конус с вершиной в начале координат. Поэтому траектория движения (которая есть линия пересечения поверхности (9.35) и плоскости (9.34)) есть в этом случае прямая линия, проходящая через начало координат, и движение, происходящее по этой прямой, называется *прямолинейным кеплеровским движением* или просто *прямолинейным движением*.

2. Как мы только что видели, тип кеплеровского движения характеризуется величиной вектора Лапласа, направление которого определяет положение орбиты в ее плоскости. Таким образом, два вектора, c и f (которые не могут быть одновременно нулями), полностью характеризуют вид и расположение орбиты, т. е. геометрические свойства невозмущенного движения.

Так как f и c связаны с постоянной энергии h, т. е. с начальной скоростью V_0 движущейся точки, то тип орбиты можно также определить постоянной h или V_0.

Рассмотрим для этого соотношение (9.23) между произвольными постоянными первых интегралов невозмущенного движения, которое напишем в виде

$$f^2 = \mu^2 + hc^2, \tag{10.4}$$

откуда имеем

$$\mu^2 (e^2 - 1) = hc^2. \tag{10.4'}$$

Предположим сначала, что $c \neq 0$. Тогда из соотношения (10.4′) следует:

если $h<0$, то $e<1$ и орбита есть эллипс *),

если $h=0$, то $e=1$ и орбита есть парабола,

» $h>0$, » $e>1$ » » » гипербола.

Если $c=0$, то при любом значении h мы имеем $f=\mu$, и если сохранить обозначение $e=\frac{f}{\mu}$ и для этого случая, то мы должны

*) Окружность можно рассматривать как эллипс с нулевым эксцентриситетом.

считать эксцентриситет прямолинейной орбиты равным единице. Ниже мы увидим, какой смысл имеет это утверждение.

Постоянная живой силы (или постоянная энергии) h зависит от начального радиуса-вектора и величины начальной скорости, так что

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}. \tag{10.5}$$

Отсюда и из предыдущего следует, что если начальная скорость удовлетворяет условию

$$V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0} \qquad \left(V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}\right), \tag{10.6}$$

то мы имеем эллиптическое движение; если начальная скорость удовлетворяет равенству

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} \qquad \left(V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}\right), \tag{10.6'}$$

то движение будет происходить по параболе, а если начальная скорость удовлетворяет неравенству

$$V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0} \qquad \left(V_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}\right), \tag{10.6''}$$

то движение будет гиперболическим.

В соответствии с этим начальная скорость V_0 называется *эллиптической*, *параболической* или *гиперболической*.

Отметим еще, что при $e=0$ формула (10.4′) дает

$$-\mu^2 = hc^2,$$

откуда ввиду (10.3) имеем

$$-\mu = hp.$$

Но из уравнения орбиты (10.2) при $e=0$ имеем просто

$$r = p = \text{const},$$

что должно также совпадать с начальным значением радиуса-вектора.

Таким образом, в случае кругового движения мы имеем

$$h = -\frac{\mu}{r_0},$$

и, следовательно,

$$V_0^2 = \frac{\mu}{r_0} \qquad \left(V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}\right). \tag{10.6'''}$$

Начальная скорость, определяемая последним равенством, называется круговой начальной скоростью*).

Итак, тип орбиты зависит от величины начальной скорости и величины начального радиуса-вектора. Так как скорость всегда направлена по касательной к траектории движения, то вектор скорости в невозмущенном кеплеровском движении всегда лежит в плоскости орбиты, также, конечно, как и радиус-вектор. Поэтому плоскость орбиты определяется направлениями двух векторов и, следовательно, вся геометрическая картина движения в пространстве характеризуется также двумя векторами — вектором начальной скорости V_0, проекции которого на оси координат суть $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, и начальным радиусом-вектором r_0, проекции которого равны x_0, y_0, z_0.

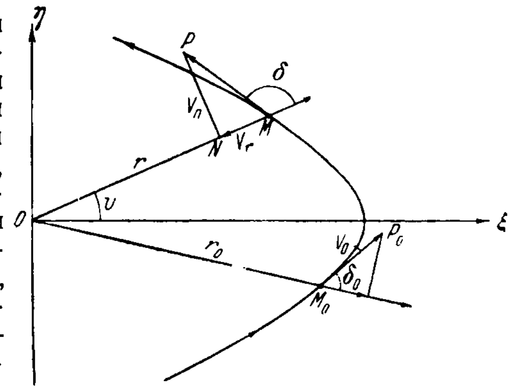

Рис. 53.

Для дальнейшего удобно еще ввести в рассмотрение угол, образуемый начальной скоростью с начальным радиусом-вектором.

Обозначим величину этого угла для любого момента времени через δ (рис. 53). Тогда, очевидно, имеем

$$\cos\delta = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{rV} = \frac{\dot{r}}{V}, \tag{10.7}$$

следовательно, угол δ_0, образуемый направлением начального радиуса-вектора с направлением начальной скорости, определится формулой

$$\cos\delta_0 = \frac{x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0}{r_0V_0} = \frac{\dot{r}_0}{V_0}. \tag{10.7'}$$

Отметим еще, что угол δ может быть выражен в зависимости от истинной аномалии v. Действительно, формулы (9.48′) и

*) В астродинамике, в теории движения ИСЗ, круговая скорость $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ называется еще первой космической скоростью, а параболическая скорость $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ — второй космической скоростью. См., например, П. Е. Эльясберг, Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.

(9.49) позволяют написать (10.7) в следующем виде:

$$\cos\delta = \frac{e\sin v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}. \tag{10.8}$$

Для круговой орбиты имеем

$$\delta = \delta_0 = 90^\circ,$$

а поэтому соотношение

$$x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0 = 0 \tag{10.9}$$

является необходимым условием того, чтобы орбита была окружностью.

Найдем еще зависимость между постоянной c и углом δ_0. Формулы (10.7) и (9.49) дают прежде всего

$$\sin\delta = \frac{r\dot{v}}{V},$$

откуда с помощью формулы (9.47) получим

$$\sin\delta = \frac{c}{rV}. \tag{10.10}$$

Отсюда, применяя эту формулу для начального момента, получим

$$c = r_0 V_0 \sin\delta_0, \tag{10.10$'$}$$

а это и есть искомая формула *).

Если $\sin\delta_0 = 0$, то и $c=0$ и, как уже было отмечено, движение происходит по прямой, проходящей через центр силы. Но если $c=0$, то также необходимо равны нулю и все три постоянные площадей c_1, c_2, c_3, что в силу формул (9.28) имеет место, когда начальные значения связаны тремя следующими соотношениями:

$$y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0 = 0, \quad z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0 = 0, \quad x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0 = 0. \tag{10.11}$$

Последние условия выполняются, когда одновременно равны нулю x_0, y_0, z_0 (движение начинается из начала координат с бесконечной начальной скоростью!) или когда одновременно $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z} = 0$ (движение начинается без начальной ско-

*) Формулы (10.7) и (10.10) выведены нами чисто аналитическим путем без использования чертежа. Но эти формулы легко также получить и из геометрических соображений. В самом деле (см. рис. 53), опустим перпендикуляр $\overline{PN}$ из конца вектора скорости на радиус-вектор. Тогда из треугольника PNM имеем $V_n = V\sin\delta$ и $V_r = V\cos\delta$, откуда с помощью формул (9.48$'$) получим вновь формулы (10.7) и (10.10).

рости, точнее, с нулевой начальной скоростью), или, наконец, когда имеем

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0} = \frac{\dot{y}_0}{y_0} = \frac{\dot{z}_0}{z_0},$$

т. е. когда вектор скорости и радиус-вектор коллинеарны.

Подводя итоги, мы можем выписать следующие необходимые и достаточные условия для различных типов кеплеровского движения:

для кругового движения должно быть:

$$\delta_0 = 90^\circ, \quad V_0^2 = \frac{\mu}{r_0},$$

для прямолинейного движения:

$$\sin \delta_0 = 0,$$

для эллиптического движения:

$$0 < V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \qquad \sin \delta_0 \neq 0,$$

для параболического движения:

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}, \qquad \sin \delta_0 \neq 0,$$

для гиперболического движения:

$$V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}, \qquad \sin \delta_0 \neq 0.$$

Заметим, что для осуществимости кругового движения «радиальная скорость», т. е. величина $V_r = \dot{r}$, необходимо должна быть равна нулю во всякий момент времени (см. (10.7′)), а для осуществимости прямолинейного движения должна быть равна нулю для всякого момента «поперечная скорость», т. е. величина $V_n = r\dot{v}$ (см. (10.10′)).

3. Формулы невозмущенного движения содержат, как мы знаем, шесть произвольных постоянных, за которые можно принять, например, кеплеровские элементы орбиты, которые в свою очередь зависят от начальных условий задачи. Ниже будет показано, что заданием начальных условий элементы орбиты определяются однозначно, а, стало быть, начальные условия определяют также однозначно форму и размеры орбиты.

В обычных задачах небесной механики, т. е. в задачах о движении е с т е с т в е н н ы х н е б е с н ы х т е л, начальные значения определяются довольно сложным и длинным путем из наблюдений и вычислений.

Наблюдения иногда оказываются «плохими», т. е. недостаточно точными, или даже неверными, а вычисления всегда сопровождаются неизбежными ошибками. Поэтому начальные значения, которые мы приписываем координатам и составляющим скорости, могут оказаться не такими, какие они есть в действительности, вследствие чего и орбита интересующего нас небесного тела может оказаться в действительности не такой, какую мы себе представляем.

Эти же соображения справедливы и для искусственных небесных тел, поэтому представляет интерес посмотреть, как изменится орбита (в невозмущенном кеплеровском движении!) при соответствующем изменении начальных данных.

Для теории движения искусственных небесных тел эта задача имеет и другое значение, ибо искусственные спутники и космические ракеты запускаются с поверхности Земли, а поэтому начальные значения, т. е. значения интересующих нас величин в конце активного участка траектории (когда кончается работа выводных двигателей) в значительной мере зависят от нас и определяются характером задачи, которую должно решить посылаемое в космическое пространство искусственное небесное тело.

В настоящем параграфе мы рассмотрим эту важную задачу лишь частично, а именно, посмотрим, как будут изменяться размеры и форма орбиты при изменении угла δ_0 либо величины начальной скорости V_0, либо начального радиуса-вектора r_0. Для этого удобно выразить параметр и эксцентриситет орбиты непосредственно через указанные начальные значения.

Прежде всего с помощью формулы (10.10′) мы находим

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \sin^2 \delta_0. \tag{10.12}$$

Далее, формула (10.4′) с помощью (10.5) и (10.10′) дает

$$e^2 = 1 + \frac{hc^2}{\mu^2} = 1 + \frac{1}{\mu^2} (r_0 V_0^2 - 2\mu) r_0 V_0^2 \sin^2 \delta_0. \tag{10.13}$$

Наконец, отметим еще выражения для наименьшего и наибольшего значений радиуса-вектора, которые получаются из уравнения орбиты (10.2) и выражаются через параметр и эксцентриситет.

Обозначим наименьшее значение радиуса-вектора или расстояние от центра силы до перицентра через q (или r_1), так что

$$q = r_1 = r_{\min} = \frac{p}{1+e}. \tag{10.14}$$

Соответственно наибольшее значение радиуса-вектора или расстояние от центра силы до апоцентра (если последний существует) обозначим через Q (или r_2), так что *)

$$Q = r_2 = r_{\max} = \frac{p}{1-e}. \qquad (10.14')$$

Переходя теперь к исследованию, заметим прежде всего, что если начальные значения координат и составляющих скорости изменяются таким образом, что величины δ_0, V_0, r_0 остаются неизменными, то величины p, e, q и Q также не изменяются, так что форма и размеры орбиты остаются при этом неизменными.

В этом случае, следовательно, эффект изменения начальных условий сказывается только на изменении положения плоскости орбиты в пространстве и на изменении положения линии апсид, т. е. положения орбиты в ее плоскости.

Будем теперь считать, что начальные значения изменяются таким образом, что положение плоскости орбиты и положение орбиты в ее плоскости остаются неизменными, а изменяется одна из величин δ_0, V_0 или r_0.

Оставим сначала неизменными начальную скорость V_0 и начальный радиус-вектор r_0 и будем изменять («варьировать») только направление начальной скорости в плоскости орбиты, т. е. угол δ_0. Тогда, очевидно, постоянная живой силы h (или полная энергия) не будет изменяться и, следовательно, тип орбиты будет сохраняться, но ее размеры и форма будут, разумеется, изменяться.

Формула (10.12) показывает, что когда δ_0 возрастает от нуля до 90°, параметр p также возрастает от нуля до $p_{\max} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2$, а когда δ_0 изменяется от 90° до 180°, p убывает от $p_{\max}$ до нуля. Наоборот, при уменьшении δ_0 (во второй четверти) параметр p возрастает, а потом (в первой четверти) убывает.

Когда параметр орбиты растет, то орбита как бы «распухает», а когда p убывает, то орбита «съеживается». Когда δ_0 обращается в нуль или в 180°, т. е. параметр обращается в нуль, то орбита вырождается в (конечный или бесконечный) отрезок прямой.

Формула (10.13) показывает, что при изменении δ_0 от нуля до 180° изменение эксцентриситета зависит от знака величины $r_0 V_0^2 - 2\mu$, т. е. от типа орбиты.

Если $r_0 V_0^2 - 2\mu < 0$, то при изменении δ_0 орбита остается эллипсом и ее эксцентриситет сначала уменьшается от единицы

*) Для планет солнечной системы q называется перигелийным расстоянием, а Q — афелийным расстоянием. Для спутников Земли (включая Луну) эти величины называются соответственно перигейным и апогейным расстояниями и т. д. Величина $q - R$, где R есть радиус Земли, называется высотой перигея.

(при $\delta_0=0$) до наименьшего значения (при $\delta_0=90^\circ$), определяемого формулой

$$e_{\min}=\frac{r_0V_0^2-\mu}{\mu},$$

а потом увеличивается от $e_{\min}$ до единицы.

Формула (10.14) показывает, что величина q растет (при изменении δ_0 от нуля до 180°) от нуля до r_0, а затем убывает от r_0 до нуля *). Формула (10.14′) дает неопределенность при $\sin\delta_0=0$, которая, впрочем, легко раскрывается (по правилу Лопиталя), так что мы найдем

$$Q_{\max}=\frac{2\mu r_0}{2\mu-r_0V_0^2}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае изменение Q определяется изменением q. В самом деле, для эллипса параметр p определяется формулой

$$p=a(1-e^2),$$

где a есть половина большой оси эллипса («большая полуось»).

Поэтому для эллипса

$$q=a(1-e),\quad Q=a(1+e)$$

и

$$q+Q=2a.$$

Обращаясь теперь к формуле (10.4′), заменим в ней c^2 на $\mu p=\mu a(1-e^2)$, что даст важное соотношение между большой полуосью эллиптической орбиты и постоянной энергии

$$a=-\frac{\mu}{h}, \tag{10.15}$$

откуда, заменяя h его значением (10.5), получим также

$$a=\frac{\mu r_0}{2\mu-r_0V_0^2}. \tag{10.15′}$$

Так как в рассматриваемом случае r_0 и V_0, по условию, не изменяются, то и большая ось эллипса также остается без изменения, а поэтому когда q возрастает от нуля до r_0, величина Q убывает от $2a$ до $2a-r_0$.

Полезно заметить еще, что малая полуось эллипса b зависит от δ_0, что видно из легко получаемой формулы

$$b=a\sqrt{1-e^2}=\frac{r_0\sqrt{r_0}\,V_0\sin\delta_0}{\sqrt{2\mu-r_0V_0^2}}. \tag{10.15″}$$

*) Для того чтобы в этом убедиться, следует подставить вместо p и e их значения, положить $\sin\delta_0=1$ и произвести необходимые упрощения.

Последняя формула еще более наглядно показывает, как «распухает» или «съеживается» орбита в зависимости от изменения угла δ_0. Из полученных формул также видно, что в предельном случае, т. е. при $\sin\delta_0=0$, эллипс вырождается в конечный отрезок прямой, длина которого равна $2a$ и концы которого являются одновременно и фокусами и вершинами вырожденного эллипса, причем один из его концов, перицентр, совпадает с началом координат, т. е. с центром силы.

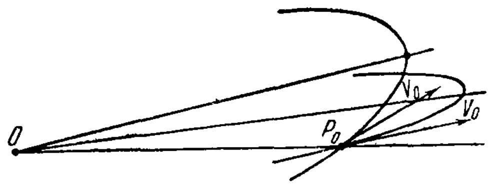

Рис. 54.

Если, в частности, $r_0V_0^2=\mu$, то $e_{\min}=0$ и соответствующая орбита есть окружность. Формула (10.15′) дает в этом случае $a=r_0$, а из (10.15″) имеем $b=r_0\sin\delta_0$, а поэтому $e=|\cos\delta_0|$. Кроме того, в этом случае

$$p=r_0\sin^2\delta_0.$$

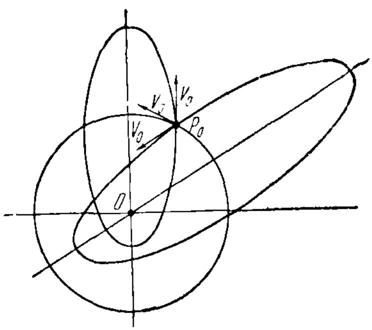

Рис. 55.

Несколько эллиптических орбит, отличающихся друг от друга только значением угла δ_0, показаны на рис. 54 $(r_0V_0^2<2\mu)$ и 55 $(r_0V_0^2=\mu)$.

Если $r_0V_0^2-2\mu>0$, т. е. если орбита есть гипербола, то, как видно опять из формулы (10.13), эксцентриситет e (при возрастании δ_0 от нуля до 90°) также растет от единицы до наибольшего значения, определяемого формулой

$$e_{\max}=\frac{r_0V_0^2-\mu}{\mu},$$

а затем (при изменении δ_0 от 90° до 180°) уменьшается от $e_{\max}$ до единицы.

Обозначая через a действительную полуось гиперболы, мы имеем, как известно,

$$p=a(e^2-1),$$

откуда

$$q=a(e-1).$$

Далее, так же как и в случае эллипса, находим

$$a=+\frac{\mu}{h}, \tag{10.16}$$

или

$$a=\frac{\mu r_0}{r_0V_0^2-2\mu}. \tag{10.16'}$$

Мнимая полуось гиперболы b определяется формулой

$$b=a\sqrt{e^2-1}=\frac{r_0\sqrt{r_0}\,V_0\sin\delta_0}{\sqrt{r_0V_0^2-2\mu}}, \tag{10.16''}$$

которая наглядно показывает, как «распухает» или «съеживается» гипербола при изменении угла δ_0.

Легко видеть также, что в предельном случае, т. е. при $\sin\delta_0=0$, гипербола вырождается в бесконечную полупрямую, выходящую из начала координат, которое является одновременно и вершиной (перицентром) и фокусом вырожденной гиперболы.

Примечание. В астрономии нас интересует только одна ветвь гиперболы, внутри которой находится центр силы притяжения. Но если рассматривать и вторую ветвь гиперболы (по которой движение не может происходить), то нетрудно убедиться, что в предельном случае она вырождается в другую половину бесконечной прямой, исходящей из точки, отстоящей от начала на расстояние a.

Наконец, если $r_0V_0^2-2\mu=0$, т. е. если орбита есть парабола, то формула (10.13) дает для эксцентриситета e единственное значение, равное единице, не зависящее вовсе от δ_0.

Формулы (10.12) и (10.14) дают в случае параболы

$$p=2r_0\sin^2\delta_0, \quad q=r_0\sin^2\delta_0, \tag{10.17}$$

откуда видно, как «распухает» или «съеживается» парабола при изменении угла δ_0.

В предельном случае, т. е. при $\sin\delta_0=0$, имеем $p=0$ и $q=0$, откуда видно, что парабола вырождается в бесконечную полупрямую, проходящую через начало координат, которое является одновременно и вершиной (перицентром) и фокусом вырожденной параболы.

4. Рассмотрим теперь зависимость формы и размеров орбиты от величины начальной скорости V_0, которую и будем варьировать, оставляя r_0 и δ_0 неизменными.

Будем изменять V_0 от нуля до бесконечности, и для большей наглядности положим $\delta_0=90°$, так что в начальный момент скорость перпендикулярна к радиусу-вектору, т. е. начальное положение движущейся точки совпадает с перицентром или с апоцентром (рис. 56).

Когда $V_0=0$ (что следует рассматривать как предельный случай), орбита представляет собой отрезок прямой, один конец которого, совпадающий с началом координат, является перицентром, а другой конец — апоцентром.

При возрастании начальной скорости от нуля до $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ (круговая, или первая космическая скорость) орбита все время остается эллипсом сначала весьма «тощим», но «распухающим» при увеличении V_0, что ясно видно из формул (10.12), (10.14) и (10.15″). Начальное положение является для всех этих эллипсов общим апоцентром, а большая полуось эллипса возрастает от $\frac{r_0}{2}$ до r_0.

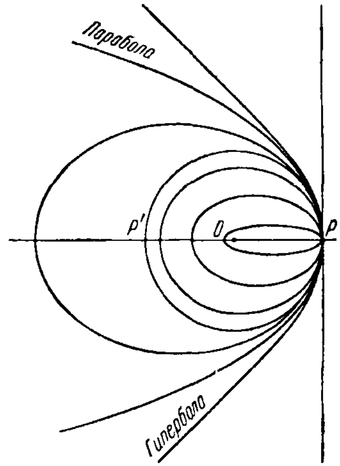

Рис. 56.

Эксцентриситет эллипса, как следует из (10.13), уменьшается от единицы (орбита есть отрезок $\overline{OP}$) до нуля (орбита есть окружность с радиусом $\overline{OP}$), а перицентр перемещается из начала координат в противоположную от начального положения сторону.

При $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ эллипс превращается в окружность с центром в начале координат. Любая точка этой окружности может рассматриваться и как перицентр и как апоцентр, но если считать эту окружность предельной орбитой, получающейся непрерывным изменением начальной скорости V_0, то ее апоцентр будет опять совпадать с начальным положением, а перицентр попадает в точку P'.

При дальнейшем увеличении V_0 от $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ до $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ эксцентриситет растет от нуля до единицы и орбита продолжает оставаться эллиптической. Но теперь (по условиям непрерывности) начальное положение точки делается перицентром, а апоцентр удаляется в противоположную сторону до бесконечности.

При $V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ орбита превращается в параболу, параметр которой равен $2r_0$ *).

Когда скорость V_0 делается больше чем $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ (т. е. больше параболической или второй космической скорости) и продолжает расти до бесконечности, орбита превращается в гиперболу, для которой начальное положение точки продолжает оставаться перицентром и эксцентриситет которой возрастает от единицы

*) Параболу можно рассматривать как предельный случай эллипса и как предельный случай гиперболы.

до бесконечности. Действительная полуось гиперболы, как видно из (10.16′), уменьшается от ∞ до нуля, а параметр монотонно растет до бесконечности.

В предельном случае, когда V_0 обращается в бесконечность, гипербола превращается в прямую, проходящую через начальное положение точки перпендикулярно к ее начальному радиусу-вектору.

Остается рассмотреть случай, когда меняется только r_0, а V_0 и δ_0 остаются неизменными. При этом опять для наглядности положим $\delta_0=90°$.

Будем изменять r_0 от нуля до бесконечности, предполагая, что V_0 имеет некоторое конечное значение.

Случай $r_0=0$ надлежит рассматривать как предельный, в котором орбита вырождается просто в одну точку — начало координат *). Когда r_0 растет от нуля до $\frac{\mu}{V_0^2}$, орбита является эллипсом, эксцентриситет которого убывает от единицы до нуля. Так как из (10.14′) следует, что при $\delta_0=90°$ имеем $Q=r_0$, то апоцентром эллиптической орбиты является начальное положение точки.

При $r_0=\frac{\mu}{V_0^2}$ эксцентриситет обращается в нуль и орбита превращается в окружность с центром в начале координат.

При дальнейшем увеличении r_0 от $\frac{\mu}{V_0^2}$ до $\frac{2\mu}{V_0^2}$ орбита продолжает оставаться эллипсом, эксцентриситет которого растет от нуля до единицы. Но теперь, как видно из (10.14), $q=r_0$, т. е. начальное положение точки делается перицентром орбиты, а апоцентр удаляется в противоположную сторону до бесконечности.

При $r_0=\frac{2\mu}{V_0^2}$ эксцентриситет делается равным единице, и орбита превращается в параболу, параметр которой равен $2r_0$.

Наконец, когда r_0 продолжает расти от $\frac{2\mu}{V_0^2}$ до бесконечности, эксцентриситет становится бо́льшим единицы, и орбита делается гиперболой, параметр и эксцентриситет которой монотонно растут. В предельном случае, когда r_0 обращается в бесконечность, орбита превращается в бесконечно удаленную прямую, рассматривать которую не имеет смысла.

---

*) Эта предельная орбита является не предельным случаем окружности, радиус которой стремится к нулю, а предельным случаем прямолинейной орбиты, когда длина отрезка обращается в нуль.

Примечание. Подобным же образом можно рассмотреть и более общий случай, когда $\delta_0 \neq 90°$, в котором, однако, невозможны случаи круговых орбит, а поэтому картина изменения орбиты при изменении V_0 или r_0 делается менее простой и менее наглядной.

§ 2. Основные типы невозмущенного кеплеровского движения

1. Общие формулы невозмущенного движения, выведенные в предыдущей главе, представляют координаты и составляющие скорости движущейся точки (планеты или спутника) в виде явных функций истинной аномалии v, которая входит в эти формулы под знаками синусов и косинусов.

Чтобы получить координаты и составляющие скорости как функции времени t, нужно, следовательно, выразить через t истинную аномалию, связь между которой и временем устанавливается посредством соотношения

$$\int_0^v \frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau), \tag{10.18}$$

где τ есть момент прохождения через перицентр. Вычисляя интеграл в формуле (10.18) мы можем выразить $t-\tau$ через v, откуда путем обращения получим и v как функцию $t-\tau$.

Вычисление интеграла в формуле (10.18) зависит от того, какое значение имеет эксцентриситет орбиты e, и осуществляется с помощью тригонометрической подстановки, несколько различной для разных типов движения.

Пусть начальные условия таковы, что

$$V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \quad f \neq 0, \quad c \neq 0,$$

тогда $0 < e < 1$, и орбита есть эллипс.

Для вычисления интеграла в формуле (10.18) введем вместо v новую переменную E посредством подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{10.19}$$

из которой видно, что когда v изменяется от нуля до 360°, E также изменяется от нуля до 360°, и когда v обращается в нуль, 180° или 360° (т. е. когда точка находится в перицентре или в апоцентре), E также обращается в нуль, 180°, 360° соответственно. Дифференцируя соотношение (10.19), мы получаем

$$\sec^2\frac{v}{2}\,dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sec^2\frac{E}{2}\,dE, \tag{10.19'}$$