

Примечание. Подобным же образом можно рассмотреть и более общий случай, когда $\delta_0 \neq 90^\circ$, в котором, однако, невозможны случаи круговых орбит, а поэтому картина изменения орбиты при изменении V_0 или r_0 делается менее простой и менее наглядной.

§ 2. Основные типы невозмущенного кеплеровского движения

1. Общие формулы невозмущенного движения, выведенные в предыдущей главе, представляют координаты и составляющие скорости движущейся точки (планеты или спутника) в виде явных функций истинной аномалии v , которая входит в эти формулы под знаками синусов и косинусов.

Чтобы получить координаты и составляющие скорости как функции времени t , нужно, следовательно, выразить через t истинную аномалию, связь между которой и временем устанавливается посредством соотношения

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau), \quad (10.18)$$

где τ есть момент прохождения через перигентр. Вычисляя интеграл в формуле (10.18) мы можем выразить $t - \tau$ через v , откуда путем обращения получим и v как функцию $t - \tau$.

Вычисление интеграла в формуле (10.18) зависит от того, какое значение имеет эксцентриситет орбиты e , и осуществляется с помощью тригонометрической подстановки, несколько различной для разных типов движения.

Пусть начальные условия таковы, что

$$V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \quad f \neq 0, \quad c \neq 0,$$

тогда $0 < e < 1$, и орбита есть эллипс.

Для вычисления интеграла в формуле (10.18) введем вместо v новую переменную E посредством подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (10.19)$$

из которой видно, что когда v изменяется от нуля до 360° , E также изменяется от нуля до 360° , и когда v обращается в нуль, 180° или 360° (т. е. когда точка находится в перигентре или в апоцентре), E также обращается в нуль, 180° , 360° соответственно. Дифференцируя соотношение (10.19), мы получаем

$$\sec^2 \frac{v}{2} dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sec^2 \frac{E}{2} dE, \quad (10.19')$$

но

$$\operatorname{secc}^2 \frac{v}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = 1 + \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}, \quad (10.19'')$$

а поэтому из равенства (10.19') найдем

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{1-e \cos E}. \quad (10.20)$$

Остается выразить еще $1+e \cos v$ через новую переменную E . Заменяя $\cos v$ его выражением из формулы половинного угла *) и воспользовавшись затем формулой (10.19), после упрощений мы будем иметь

$$1 + e \cos v = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E}. \quad (10.21)$$

Подставляя (10.20) и (10.21) в формулу (10.18) и принимая во внимание, что для эллипса $p = a(1 - e^2)$, мы получим следующее соотношение:

$$\int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau),$$

откуда

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau).$$

Положим еще

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} \quad (10.22)$$

и

$$M = n(t - \tau). \quad (10.22')$$

Тогда предыдущее уравнение напишется в следующем виде:

$$E - e \sin E = M. \quad (10.23)$$

Это трансцендентное уравнение определяет вспомогательную переменную E , когда e и M даны, и называется, по традиции, уравнением Кеплера. Аналитическое решение этого уравнения будет рассмотрено в следующей главе, а сейчас заметим, что при численных значениях e и M уравнение Кеплера может быть решено приближенно методом последовательных прибли-

*) Напомним следующие тригонометрические формулы:

$$\cos v = 2 \cos^2 \frac{v}{2} - 1, \quad \sin v = 2 \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2}.$$

жений, графическим путем или при помощи специальных таблиц *).

Выясним теперь смысл величин E , n и M . Начертим эллипс (рис. 57), представляющий орбиту движущейся точки, и обозначим через C , O , Π соответственно центр эллипса, фокус (центр силы притяжения) и перигеиум. Пусть P есть положение движущейся точки на орбите в момент времени t , так что $\angle \Pi O P = v$ и $\overline{OP} = r$.

Построим теперь окружность радиуса a , центр которой совпадает с центром эллипса C , и опустим перпендикуляр \overline{PN} из точки P на линию апсид. Пусть P' есть пересечение продолжения этого перпендикуляра с окружностью и $\overline{CP'}$ — радиус окружности, проведенный к точке P' .

Тогда $\angle PCP'$ и есть E .

Действительно, из рис. 57 мы видим, что

$$\overline{CN} + \overline{NO} = \overline{CO} = ae,$$

но

$$\overline{CN} = a \cos E, \quad \overline{NO} = -r \cos v.$$

Поэтому

$$ae = a \cos E - r \cos v. \quad (10.24)$$

Заменяя в этом равенстве r его выражением из уравнения орбиты (10.2) и определяя из полученного соотношения $\cos v$, мы находим

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

Далее, из чертежа имеем

$$\overline{P'N} = a \sin E, \quad \overline{PN} = r \sin v,$$

но, с другой стороны, по свойствам эллипса,

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{P'N}} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad (10.24')$$

что дает следующее соотношение:

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (10.25)$$

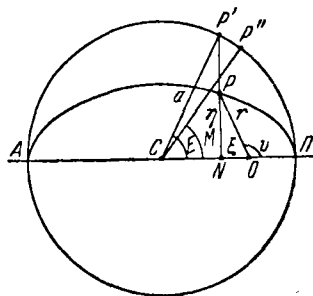


Рис. 57.

* См., например, М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. I, 1941, или У. М. С м а р т, Небесная механика, перев. с англ., «Мир», 1965, или Ф. М у л ь т о н, Введение в небесную механику, 1935.

Заменяя здесь r его выражением (10.2) и исключая затем $\cos v$ при помощи (10.25), мы получим

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E}. \quad (10.25')$$

Формулы (10.25) и (10.25') дают соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1 + \cos v} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e} \frac{\sin E}{1 + \cos E} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

т. е. мы опять приходим к подстановке (10.19), так что действительно $\angle PCP' = E$.

Угол E называется в астрономии эксцентрической аномалией и измеряется так же, как и истинная аномалия v , от нуля до 360° в сторону движения.

Очевидно, что когда сторона движущаяся точка (например, планета солнечной системы) обходит полностью свою орбиту, то как v , так и E изменяются на 360° .

Допустим, что движение начинается из перигея. Обозначим через T время полного оборота (период обращения) точки вокруг центра силы по своей эллиптической орбите. Тогда уравнение Кеплера (10.23) дает

$$360^\circ = nT,$$

откуда получаем

$$n = \frac{360^\circ}{T}. \quad (10.26)$$

Следовательно, n есть средняя угловая скорость движущейся точки и поэтому называется в астрономии средним движением*). Формула (10.22) показывает, что величина n связана с большой полуосью орбиты, а поэтому может характеризовать размеры орбиты.

Рассмотрим теперь величину M . Формула (10.22') показывает, что эта величина M возрастает пропорционально времени, обращаясь в нуль при $t = \tau$, т. е. когда точка находится в перигее и когда v и E равны нулю.

При $t = \tau + \frac{T}{2}$, т. е. когда движущаяся точка попадает в апоцентр, $M = 180^\circ$, так же как v и E . Наконец, когда движущаяся точка, завершая полный оборот, опять приходит в перигей, M делается равным 360° , опять так же, как и обе аномалии, v и E .

*) Если время, как обычно принято в астрономии, измеряется в средних солнечных сутках, то величину n называют средним суточным движением. Для планет и комет солнечной системы n обычно выражают в секундах дуги. Чем меньше n , тем дальше планета от Солнца.

Величина M , связанная со средним движением, называется поэтому средней аномалией. Если мы представим теперь фиктивную точку, движущуюся по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью n , то M будет равна углу, который образует радиус-вектор этой фиктивной точки с направлением на перицентр.

Из сказанного следует, что фиктивная точка проходит через перицентр и апоцентр одновременно с движущейся точкой и делает полный оборот по круговой орбите за время T (см. рис. 57, где фиктивная точка обозначена буквой P'').

2. Из формул (10.24) и (10.25) имеем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} r \cos v &= \xi = a(\cos E - e), \\ r \sin v &= \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

где ξ и η суть прямоугольные орбитальные координаты точки, движущейся по эллиптической орбите (см. рис. 57).

Затем из формул (10.2) и (10.21) выводим выражение для радиуса-вектора движущейся точки в зависимости от эксцентрической аномалии E :

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (10.28)$$

Это уравнение также может быть названо уравнением орбиты (эллиптической!). Скорость в эллиптическом движении можно определить из интеграла живой силы, заменяя в нем постоянную h ее выражением (10.15) через большую полуось эллипса, что дает

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (10.29)$$

Приведенные формулы полностью определяют характер движения по эллиптической орбите. Действительно, радиус-вектор r , орбитальные координаты, пространственные координаты, скорость и т. д. все являются периодическими функциями от истинной аномалии v , с общим периодом 2π . Следовательно, все эти величины являются также периодическими функциями от эксцентрической аномалии E , или от средней аномалии M , также с периодом 2π . Так как v (или E , или M) изменяется на 2π за время T , то все указанные величины можно рассматривать и как периодические функции времени с общим периодом T .

Когда движущаяся точка приходит в перицентр, радиус-вектор получает наименьшее значение $r_{\min} = q = a(1 - e)$, а скорость — наибольшее, определяемое формулой

$$V_{\max}^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e},$$

которая получается из (10.29) заменой r на q . Наоборот, когда точка приходит в апоцентр, r получает наибольшее значение $r_{\max} = Q = a(1+e)$, а скорость — наименьшее, определяемое формулой

$$V_{\min}^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e}.$$

Из двух последних формул следует также

$$\frac{V_{\min}}{V_{\max}} = \frac{1-e}{1+e} = \frac{r_{\min}}{r_{\max}}; \quad (10.30)$$

т. е. скорости в апсидальных точках обратно пропорциональны расстояниям соответствующих апсид от центра силы.

Отметим теперь, что для эллиптических орбит имеет место третий закон Кеплера, правда, в несколько обобщенном виде.

Чтобы показать это, заменим в формуле (10.26) среднее движение n его выражением (10.22) через большую полуось, что дает соотношение

$$\frac{\sqrt{\mu} T}{a^{3/2}} = 2\pi, \quad (10.31)$$

между периодом полного обращения и большой полуосью, показывающее, что с увеличением размеров орбиты увеличивается также (но не пропорционально!) и период обращения.

Пусть теперь имеем две материальные точки с массами m_1 и m_2 , каждая из которых движется под действием притяжения массы m_0 . Будем рассматривать движение каждой из этих двух масс относительно точки M_0 , в которой помещена масса m_0 , и допустим, что начальные условия таковы, что каждая из масс m_1 и m_2 движется вокруг массы m_0 по своей эллиптической орбите*). Обозначая через a_1 и a_2 полуоси этих эллиптических орбит, а через T_1 и T_2 — соответственные периоды обращения, будем иметь по формуле (10.31):

$$\frac{\sqrt{\mu_1} T_1}{a_1^{3/2}} = 2\pi, \quad \frac{\sqrt{\mu_2} T_2}{a_2^{3/2}} = 2\pi.$$

Так как

$$\mu_1 = f(m_0 + m_1), \quad \mu_2 = f(m_0 + m_2),$$

то предыдущие соотношения напишутся следующим образом:

$$\frac{\sqrt{f(m_0 + m_1)} T_1}{a_1^{3/2}} = 2\pi = \frac{\sqrt{f(m_0 + m_2)} T_2}{a_2^{3/2}},$$

*) Здесь, разумеется, допускается, что m_1 и m_2 не влияют друг на друга, т. е. что рассматриваются одновременно две задачи двух тел.

где f обозначает постоянную закона всемирного тяготения, которая имеет универсальное значение *).

Из предыдущего равенства мы выводим следующее важное соотношение:

$$\frac{T_1^2(m_0 + m_1)}{T_2^2(m_0 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (10.31')$$

которое и приводит нас к третьему закону Кеплера в следующей формулировке:

Третий (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном эллиптическом движении двух материальных точек произведение квадратов времен обращения на суммы масс центральной и движущейся точек относятся как кубы больших полуосей орбит.

Если рассмотреть, например, какие-нибудь две планеты солнечной системы, каждая из которых обращается вокруг Солнца под действием только солнечного притяжения, то мы получим случай, рассмотренный Кеплером. Так как, кроме того, массы планет весьма малы по сравнению с массой Солнца m_0 , то, пренебрегая этими малыми массами, мы выведем из (10.31')

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (10.31'')$$

что и дает третий закон Кеплера в первоначальной формулировке:

Третий закон Кеплера. Квадраты времен обращения двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Соотношения (10.31') и (10.31'') играют в астрономии важную роль, так как позволяют найти одну из величин

$$a_1, T_1, a_2, T_2,$$

если известны три остальные.

Указанные соотношения могут быть применены также в астеродинамике, например, в задаче о переходе ракеты с одной орбиты на другую.

3. Случай эллиптического движения играет в небесной механике особенно важную роль, а поэтому нуждается во всестороннем рассмотрении.

*) Нужно остерегаться спутать постоянную тяготения с модулем вектора Лапласа, который обозначен той же буквой f .

За элементы эллиптической орбиты могут быть приняты величины (9.54), но обычно в астрономии некоторые из этих величин заменяют другими, более удобными или, во всяком случае, более привычными.

Положение плоскости эллиптической орбиты почти всегда определяют величинами Ω и i , т. е. долготой восходящего узла и наклонностью орбиты. Форма орбиты обычно характеризуется эксцентриситетом e , вместо которого иногда употребляют элемент φ , связанный с e соотношением

$$\sin \varphi = e$$

и называемый углом эксцентриситета *).

Размеры эллиптической орбиты обычно определяют величиной большой полуоси a , или большой осью $2a$, а иногда употребляют также среднее движение n или период обращения T .

Положение линии апсид определяют или величиной ω , т. е. угловым расстоянием перицентра от узла, или связанной с ней другой величиной π , которая определяется формулой

$$\pi = \Omega + \omega$$

и называется долготой перицентра **).

Наконец, вместо элемента τ употребляют более часто значение средней аномалии M в начальный момент времени. Этот элемент, обозначаемый через M_0 , определяется соотношением

$$M_0 = n(t - \tau)$$

и называется средней аномалией в эпоху или средней аномалией эпохи.

Кроме M_0 , берут также часто вместо элемента τ величину ϵ , определяемую следующим образом. Положим

$$l = \Omega + \omega + M = \pi + M.$$

Эта величина называется средней долготой в орбите или просто средней долготой. Значение средней долготы в начальный момент t_0 (в эпоху!), обозначаемое обыкновенно буквой ϵ , так что

$$\epsilon = l_0 = \Omega + \omega + M_0 = \pi + M_0,$$

и принимают иногда за шестой элемент эллиптической орбиты. Таким образом, кеплерова эллиптическая орбита характери-

*) Не путать угол эксцентриситета с широтой точки, которая обозначается здесь той же буквой φ .

**) Долгота перицентра π отсчитывается в двух плоскостях. От оси Ox до линии узлов — в плоскости (xOy) , и от линии узлов до перицентра — в плоскости орбиты. Не следует путать долготу перицентра с числом $\pi = 3,141259 \dots$

зуются следующими шестью величинами, которые называются элементами эллиптической орбиты или просто (когда не может возникнуть недоразумения) элементами орбиты*):

$$\left. \begin{array}{l} \Omega, \quad i, \quad \omega, \quad a, \quad e, \quad M_0, \\ \varpi, \quad v, \quad \pi, \quad n, \quad \varphi, \quad \varepsilon, \\ \quad \quad \quad T, \quad e', \quad \tau, \\ \quad \quad \quad p. \end{array} \right\} \quad (10.32)$$

Здесь $\varpi = \Omega + 180^\circ$ есть долгота нисходящего узла, а $v = \operatorname{tg} i$ и $e' = e \cdot \sec i$ суть элементы Лапласа**).

Вместо трех элементов Ω, i, ω можно взять шесть направляющих косинусов,

$$\alpha_\tau, \quad \beta_\tau, \quad \gamma_\tau, \quad \alpha'_\tau, \quad \beta'_\tau, \quad \gamma'_\tau,$$

определяющих положение линии апсид и прямой, к ней перпендикулярной, лежащей в плоскости орбиты (см. (9.58), (9.58') гл. IX), или еще шесть составляющих вектора момента скорости и вектора Лапласа

$$c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3.$$

Если элементы орбиты известны, то положение и скорость точки, описывающей эллиптическую орбиту, для любого момента времени t определяются следующей последовательностью формул.

Прежде всего находим среднюю аномалию M по одной из формул:

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0 = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi; \quad (10.33)$$

затем, решая каким-либо способом уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M,$$

находим соответствующее значение эксцентрической аномалии E .

Зная E , найдем радиус-вектор r и орбитальные координаты ξ и η по формулам

$$\left. \begin{array}{l} r = a(1 - e \cos E), \\ \xi = r \cos v = a(\cos E - e), \\ \eta = r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{array} \right\} \quad (10.34)$$

*) В первой строке (10.32) выписаны элементы, употребляемые наиболее часто. Под некоторыми основными элементами помещены те величины, каждая из которых может заменить основной элемент.

**) Здесь e обозначает другой элемент, а потому элемент Лапласа $e' \sec i$ обозначен через e' .

и соответствующее значение истинной аномалии из формулы

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (10.35)$$

Истинную аномалию можно также определить из формул (10.34), которые дают $\cos v$ и $\sin v$, а значит, и сам угол v .

Найдя v , получим аргумент широты

$$u = v + \omega = v + \pi - \Omega,$$

а затем прямоугольные координаты x , y , z по известным уже формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

Радиус-вектор r можно найти также из общего уравнения кеплеровой орбиты в полярных координатах, которое в рассматриваемом случае напишется в виде

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}. \quad (10.37)$$

Составляющие скорости \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} можно, конечно, получить по общим формулам (9.55) и (9.57). Однако в случае эллиптического движения координаты и составляющие скорости удобно также выразить через эксцентрическую аномалию, которая может играть роль независимой переменной вместо v .

При этом координаты сразу получим по первой группе формул (9.59), в которых ξ и η нужно заменить их выражениями (10.34). Чтобы получить составляющие скорости в зависимости от E , нужно еще найти соответствующие выражения для $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$.

Дифференцируя формулы (10.34) по t , будем иметь

$$\dot{\xi} = -a \sin E \cdot \dot{E}, \quad \dot{\eta} = a \sqrt{1-e^2} \cos E \cdot \dot{E}.$$

Чтобы определить производную \dot{E} , дифференцируем по t уравнение Кеплера, что дает

$$(1 - e \cos E) \cdot \dot{E} = \dot{M} = n,$$

откуда находим

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{an}{r},$$

после чего получаем

$$\dot{\xi} = -\frac{a^2 n \sin E}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2} \cos E}{r}. \quad (10.38)$$

Теперь по формулам (9.59) находим искомые выражения для координат и составляющих скорости эллиптического движения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \alpha_{\tau} (\cos E - e) + \alpha'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ \frac{y}{a} &= \beta_{\tau} (\cos E - e) + \beta'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ \frac{z}{a} &= \gamma_{\tau} (\cos E - e) + \gamma'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{x}}{na} &= \frac{a}{r} [-\alpha_{\tau} \sin E + \alpha'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \cos E], \\ \frac{\dot{y}}{na} &= \frac{a}{r} [-\beta_{\tau} \sin E + \beta'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \cos E], \\ \frac{\dot{z}}{na} &= \frac{a}{r} [-\gamma_{\tau} \sin E + \gamma'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \cos E]. \end{aligned} \right\} \quad (10.39')$$

Наконец, скорость V , которая определяется в эллиптическом движении формулой (10.29), также может быть выражена через эксцентрическую аномалию. Для этого достаточно заменить в (10.29) радиус-вектор r его значением (10.34), что дает

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (10.40)$$

Эта же формула может быть получена также и из формулы (9.49) заменой $\cos v$ его выражением через E .

4. Перейдем к рассмотрению случая гиперболического движения. Пусть начальные условия таковы, что

$$V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}, \quad c \neq 0,$$

так что $e > 1$ и орбита есть гипербола.

Чтобы вывести соотношение между временем и истинной аномалией, сделаем в формуле (10.18) вещественную подстановку

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2}, \quad (10.41)$$

где F обозначает вспомогательную переменную.

Так же, как и в случае эллиптического движения, выводим последовательно

$$\sec^2 \frac{v}{2} \cdot dv = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \sec^2 \frac{F}{2} dF,$$

$$\sec^2 \frac{v}{2} = 1 + \frac{e+1}{e-1} \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2},$$

откуда

$$dv = \frac{\sqrt{e^2 - 1} dF}{e - \cos F}.$$

Далее находим

$$1 + e \cos v = 1 - e + 2e \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{(e^2 - 1) \cos F}{e - \cos F},$$

после чего, принимая $F = 0$ при $v = 0$, получим из (10.18) следующее соотношение:

$$\int_0^F \frac{e - \cos F}{\cos^2 F} dF = \frac{\sqrt{\mu} (e^2 - 1)^{3/2}}{p^{3/2}} (t - \tau),$$

откуда интегрированием выводим, имея еще в виду, что для гиперболы $p = a(e^2 - 1)$:

$$e \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right) = n(t - \tau), \quad (10.42)$$

где положено

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}.$$

Трансцендентное уравнение (10.42), являющееся аналогом уравнения Кеплера, в конечном виде решено быть не может. Однако всегда можно найти решение этого уравнения путем последовательных приближений, при помощи специальных таблиц или еще каким-нибудь приближенным способом.

Найдя для данного значения t соответствующее значение переменной F , мы вычислим истинную аномалию v , а потом и радиус-вектор r из уравнения орбиты (10.2). После этого получим координаты и составляющие скорости по общим формулам предыдущей главы.

Для скорости в гиперболическом движении можно получить формулу, аналогичную (10.29), заменяя в интеграле живой силы постоянную h ее значением из (10.16), что дает

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right). \quad (10.43)$$

За элементы гиперболического движения (или гиперболической орбиты) можно принять следующие величины:

$$\Omega, i, \omega, a, e, \tau,$$

причем вместо ω можно взять также долготу перицентра

$$\pi = \Omega + \omega,$$

а вместо действительной полуоси a — параметр p или расстояние от центра силы до перицентра, т. е. $q = a(e - 1)$ или величину n .

Чтобы проследить за характером движения, будем увеличивать истинную аномалию ν , начиная от нуля (т. е. от перигентра). При $\nu=0$, т. е. при $t=\tau$, радиус-вектор r имеет наименьшее значение, определяемое формулой

$$r_{\min} = q = a(e-1),$$

а скорость V — наибольшее значение, определяемое формулой

$$V_{\max}^2 = \frac{\mu}{a} \frac{e+1}{e-1}.$$

При возрастании угла ν от нуля до $\bar{\nu} = \arccos(-1/e)$ радиус-вектор, как видно из уравнения орбиты (10.2), постоянно растет от r_{\min} до бесконечности, а скорость V постоянно убывает от V_{\max} до наименьшего значения V_{\min} , которое получается из (10.43) при $r = \infty$ и определяется формулой

$$V_{\min}^2 = \frac{\mu}{a}.$$

Для гиперболического движения нетрудно также получить формулы, аналогичные (10.34) и (10.39). Прежде всего из полученного ранее выражения для $1+e \cos \nu$ имеем

$$r = a(e \cdot \sec F - 1). \quad (10.44)$$

Далее находим

$$\cos \nu = \frac{e \cos F - 1}{e - \cos F}, \quad \sin \nu = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin F}{e - \cos F},$$

после чего с помощью (10.44) получим

$$\xi = a(e - \sec F), \quad \eta = a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F. \quad (10.44')$$

Дифференцируя теперь уравнение (10.42), мы найдем

$$\dot{F} = \frac{na \cos F}{r},$$

вследствие чего формулы (10.44') после дифференцирования по времени t дают

$$\dot{\xi} = \frac{na^2 \operatorname{tg} F}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{na^2 \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{secc} F}{r}, \quad (10.44'')$$

откуда, или из формул (10.43) и (10.44), находим

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \frac{e + \cos F}{e - \cos F}. \quad (10.45')$$

Формулы (9.59) гл. IX дают теперь выражения для координат и их производных в зависимости от вспомогательного угла в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \alpha_\tau (e - \sec F) + \alpha'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F, \\ \frac{y}{a} &= \beta_\tau (e - \sec F) + \beta'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F, \\ \frac{z}{a} &= \gamma_\tau (e - \sec F) + \gamma'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F, \\ \frac{\dot{x}}{na} &= \frac{a}{r} [\alpha_\tau \operatorname{tg} F + \alpha'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \sec F], \\ \frac{\dot{y}}{na} &= \frac{a}{r} [\beta_\tau \operatorname{tg} F + \beta'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \sec F], \\ \frac{\dot{z}}{na} &= \frac{a}{r} [\gamma_\tau \operatorname{tg} F + \gamma'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \sec F]. \end{aligned} \right\} \quad (10.45)$$

Покажем теперь геометрическое значение величины F .

Рассмотрим ту ветвь гиперболы, по которой происходит движение точки, т. е. ту ветвь, внутри которой находится центр силы (начало координат). Пусть буквы O , Π и C обозначают соответственно фокус, вершину (перигентр) и центр гиперболы (рис. 58). Если P есть положение движущейся точки в момент времени t , то угол $ПОР$ есть истинная аномалия ψ . Опустим перпендикуляр PQ из точки P на линию аписид (прямая OC) и из точки Q проведем касательную к окружности радиуса a с центром в C . Соединяя точку касания P' с центром окружности (и гиперболы), получим треугольник CQP' , в котором угол QCP' и есть F , что можно легко проверить совершенно так же, как это было проделано в случае эллиптического движения для эксцентрической аномалии.

Из рис. 58 видно, что когда точка движется по гиперболе от перигентра до бесконечности, то угол F растет от нуля до 90° .

Хотя координаты, радиус-вектор, составляющие скорости и скорость в гиперболическом движении содержат только тригонометрические функции истинной аномалии ψ или вспомогательной переменной F , само движение не является, очевидно, периодическим.

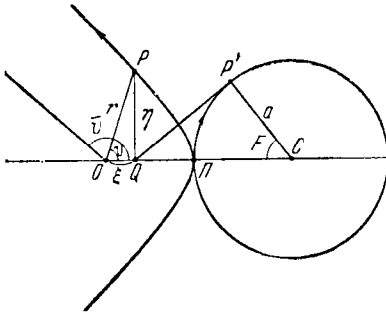


Рис. 58.

Причиной этого обстоятельства является то, что при изменении времени t от τ до ∞ движущаяся точка уходит в бесконечность и углы ν и F изменяются в тесных пределах:

$$0 \leq \nu \leq \bar{\nu}, \quad 0 \leq F \leq 90^\circ.$$

Для гиперболического движения можно получить и другие формулы, содержащие вместо тригонометрических функций угла F более соответствующие характеру движения гиперболические функции другой переменной.

Действительно, введем вместо F новую переменную H посредством подстановки

$$H = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right), \quad (10.46)$$

изменяющуюся при движении точки от перигея до бесконечности от нуля до бесконечности.

Тогда, как легко проверить,

$$\operatorname{tg} F = \operatorname{sh} H, \quad \sec F = \operatorname{ch} H, \quad \operatorname{tg} \frac{F}{2} = \operatorname{th} \frac{H}{2},$$

и вместо формул (10.41), (10.42), (10.44) и (10.44') мы будем иметь следующие: связь между ν и H в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}, \quad (10.47)$$

уравнение, аналогичное уравнению Кеплера

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - \tau), \quad (10.48)$$

уравнение гиперболической орбиты в другом виде

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1), \quad (10.49)$$

выражения для орбитальных координат

$$\xi = a(e - \operatorname{ch} H), \quad \eta = a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H. \quad (10.49')$$

Далее, формулы (10.43) и (10.49) дают новое выражение для скорости:

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \frac{e \operatorname{ch} H + 1}{e \operatorname{ch} H - 1}. \quad (10.50)$$

Дифференцируя теперь уравнение (10.48) и формулы (10.49'), найдем

$$\dot{H} = \frac{na}{r}, \quad \dot{\xi} = -\frac{na^2 \operatorname{sh} H}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{na^2 \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H}{r}, \quad (10.51)$$

после чего формулы (9.49) дают следующие выражения для пространственных координат и составляющих скорости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \alpha_{\tau}(e - \operatorname{ch} H) + \alpha'_{\tau} \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\ \frac{y}{a} &= \beta_{\tau}(e - \operatorname{ch} H) + \beta'_{\tau} \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\ \frac{z}{a} &= \gamma_{\tau}(e - \operatorname{ch} H) + \gamma'_{\tau} \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \end{aligned} \right\} \quad (10.52)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{x}}{na} &= \frac{a}{r} [-\alpha_{\tau} \operatorname{sh} H + \alpha'_{\tau} \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H], \\ \frac{\dot{y}}{na} &= \frac{a}{r} [-\beta_{\tau} \operatorname{sh} H + \beta'_{\tau} \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H], \\ \frac{\dot{z}}{na} &= \frac{a}{r} [-\gamma_{\tau} \operatorname{sh} H + \gamma'_{\tau} \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H]. \end{aligned} \right\} \quad (10.52')$$

Примечание. Заметим, что формулы гиперболического движения с независимой переменной H вполне подобны соответствующим формулам эллиптического движения, в которых независимой переменной является E .

Сверх того, формулы (10.47)–(10.49), (10.49'), (10.50)–(10.52) и (10.52') могут быть формально получены из формул (10.19), (10.23), (10.28), (10.27), (10.40), (10.38), (10.39) и (10.39') соответственно, если в последних заменить везде a на $-a$, положить $iE = H$ ($i = \sqrt{-1}$) и иметь в виду, что

$$\begin{aligned} i \sin E &= \frac{e^{iE} - e^{-iE}}{2} = \frac{e^H - e^{-H}}{2} = \operatorname{sh} H, \\ \cos E &= \frac{e^{iE} + e^{-iE}}{2} = \frac{e^H + e^{-H}}{2} = \operatorname{ch} H, \\ \operatorname{tg} \frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ch} H}{1 + \operatorname{ch} H}} = i \operatorname{th} \frac{H}{2}, \end{aligned}$$

где $e = 2,7182\dots$ обозначает основание натуральных логарифмов.

§ 3. Предельные и вырожденные случаи невозмущенного кеплеровского движения

1. Пусть начальные условия таковы, что мы имеем

$$\dot{f}_1 = \dot{f}_2 = \dot{f}_3 = 0, \quad (10.53)$$

так что величина вектора Лапласа f делается равной нулю, а его направление становится неопределенным.

Из анализа, проведенного в § 1 этой главы, следует, что условия (10.53) равносильны следующим соотношениям между