после чего формулы (9.49) дают следующие выражения для пространственных координат и составляющих скорости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\alpha_\tau(e-\operatorname{ch}H)+\alpha'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{sh}H,\\ \frac{y}{a}&=\beta_\tau(e-\operatorname{ch}H)+\beta'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{sh}H,\\ \frac{z}{a}&=\gamma_\tau(e-\operatorname{ch}H)+\gamma'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{sh}H,\end{aligned}\right\}\qquad(10.52)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\alpha_\tau\operatorname{sh}H+\alpha'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{ch}H\right],\\ \frac{\dot{y}}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\beta_\tau\operatorname{sh}H+\beta'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{ch}H\right],\\ \frac{\dot{z}}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\gamma_\tau\operatorname{sh}H+\gamma'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{ch}H\right].\end{aligned}\right\}\qquad(10.52')$$

Примечание. Заметим, что формулы гиперболического движения с независимой переменной H вполне подобны соответствующим формулам эллиптического движения, в которых независимой переменной является E.

Сверх того, формулы (10.47)—(10.49), (10.49′), (10.50)—(10.52) и (10.52′) могут быть формально получены из формул (10.19), (10.23), (10.28), (10.27), (10.40), (10.38), (10.39) и (10.39′) соответственно, если в последних заменить везде a на $-a$, положить $iE=H$ $\left(i=\sqrt{-1}\right)$ и иметь в виду, что

$$i\sin E=\frac{e^{iE}-e^{-iE}}{2}=\frac{e^H-e^{-H}}{2}=\operatorname{sh}H,$$

$$\cos E=\frac{e^{iE}+e^{-iE}}{2}=\frac{e^H+e^{-H}}{2}=\operatorname{ch}H,$$

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos E}{1+\cos E}}=\sqrt{\frac{1-\operatorname{ch}H}{1+\operatorname{ch}H}}=i\operatorname{th}\frac{H}{2},$$

где $e=2{,}7182\ldots$ обозначает основание натуральных логарифмов.

§ 3. Предельные и вырожденные случаи невозмущенного кеплеровского движения

1. Пусть начальные условия таковы, что мы имеем

$$f_1=f_2=f_3=0,\qquad(10.53)$$

так что величина вектора Лапласа f делается равной нулю, а его направление становится неопределенным.

Из анализа, проведенного в § 1 этой главы, следует, что условия (10.53) равносильны следующим соотношениям между начальными значениями координат и составляющих скорости:

$$\left. \begin{aligned} x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0 &= 0, \\ \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 &= \frac{\mu}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \end{aligned} \right\} \tag{10.53'}$$

выполнение которых необходимо и достаточно для осуществления кругового движения.

Таким образом, орбита движущейся точки есть в этом случае окружность, центр которой совпадает с центром силы, а радиус равен начальному радиусу-вектору r_0.

Так как окружность есть частный случай эллипса, то все формулы кругового движения мы можем получить из соответствующих формул эллиптического движения, полагая в последних эксцентриситет e равным нулю. Кроме того, так как направление вектора Лапласа (т. е. направление линии апсид орбиты) становится неопределенным, то понятия перицентра и апоцентра теряют смысл, а угловое расстояние перицентра от узла также становится неопределенным и его можно принять просто равным нулю.

Если угодно, то любую точку круговой орбиты можно рассматривать, по желанию, и как перицентр, и как апоцентр. Ось абсцисс в орбитальной системе координат можно, следовательно, выбрать произвольно и проще всего принять за эту ось линию узлов. Тогда величина ω будет равна нулю и круговая орбита будет полностью определена заданием четырех элементов, за которые примем величины

$$\Omega, \quad i, \quad a, \quad M_0 \tag{10.54}$$

(M_0 обозначает здесь угол, образованный начальным радиусом-вектором с направлением на восходящий узел орбиты).

Теперь формулы эллиптического движения предыдущего параграфа дают при $e=0$:

$$r = p = a = r_0, \quad V^2 = V_0^2 = \frac{\mu}{a}, \tag{10.55}$$

затем

$$u = v = E = M = n(t - t_0) + M_0 \tag{10.56}$$

и

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\cos M \cos\Omega - \sin M \sin\Omega \cos i), \\ y &= a(\cos M \sin\Omega + \sin M \cos\Omega \cos i), \\ z &= a \sin M \sin i, \end{aligned} \right\} \tag{10.57}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= na(-\sin M \cos\Omega - \cos M \sin\Omega \cos i), \\ \dot{y} &= na(-\sin M \sin\Omega + \cos M \cos\Omega \cos i), \\ \dot{z} &= na \cos M \sin i. \end{aligned} \right\} \tag{10.57'}$$

Если ввести орбитальные координаты, полагая

$$\xi = a\cos M, \quad \eta = a\sin M, \tag{10.58}$$

то можно также воспользоваться общими формулами (9.59), которые дают в рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= \alpha_\tau \cos M + \alpha'_\tau \sin M, & \frac{\dot{x}}{na} &= -\alpha_\tau \sin M + \alpha'_\tau \cos M,\\
\frac{y}{a} &= \beta_\tau \cos M + \beta'_\tau \sin M, & \frac{\dot{y}}{na} &= -\beta_\tau \sin M + \beta'_\tau \cos M,\\
\frac{z}{a} &= \gamma_\tau \cos M + \gamma'_\tau \sin M, & \frac{\dot{z}}{na} &= -\gamma_\tau \sin M + \gamma'_\tau \cos M.
\end{aligned}\right\} \tag{10.59}$$

Имея в виду, что из формул (9.58) и (9.58′) следует при $\omega = 0$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_\tau = \cos\Omega, & &\beta_\tau = \sin\Omega, & &\gamma_\tau = 0,\\
&\alpha'_\tau = -\sin\Omega\cos i, & &\beta'_\tau = \cos\Omega\cos i, & &\gamma'_\tau = \sin i,
\end{aligned}$$

мы опять получим формулы (10.57) и (10.57′).

Случай кругового движения, который мы рассматривали здесь как частный случай эллиптического движения, можно также рассматривать как предельный случай эллиптического движения, изменяя начальную скорость V_0 и угол δ_0, образуемый ею с начальным радиусом-вектором, непрерывным образом так, чтобы мы имели в пределе

$$\lim V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad \lim \delta_0 = 90^\circ.$$

Ясно, что в действительности случай кругового движения никогда, строго говоря, осуществлен быть не может, так как весьма мало вероятно, чтобы начальные условия реальных небесных тел удовлетворяли условиям (10.53′).

Однако в астрономии известно множество случаев, когда эти условия *почти выполняются* (т. е. выполняются с высокой степенью точности) и тогда движение планеты или спутника, являясь, строго говоря, эллиптическим, весьма мало отличается от кругового. В таких случаях выгодно пользоваться формулами кругового движения, которые значительно проще формул эллиптического движения и в которых координаты и составляющие скорости выражаются через время явным образом.

С другой стороны, если эксцентриситет эллиптической орбиты, не будучи строго нулем, есть величина малая, то удобно рассматривать круговое движение как *первое приближение* к эллиптическому движению.

Эта точка зрения будет использована нами в следующей главе, в которой будут рассмотрены разложения координат кеплеровского движения в бесконечные ряды, расположенные по степеням эксцентриситета.

Примечание. Полезно заметить, что круговое движение существует также и в более общей задаче, а именно, в задаче о движении материальной точки под действием центральной силы.

В самом деле, рассмотрим случай, когда центральная сила не зависит от времени, так что

$$F = F(r, \dot{r}), \tag{10.60}$$

и возьмем уравнения (8.66), определяющие полярные координаты точки, движущейся под действием силы F.

Легко видеть, что эти уравнения

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 - F(r, \dot{r}) &= 0, \\ r^2\dot{w} &= c \end{aligned}\right\} \tag{10.60'}$$

допускают частное решение

$$r = a, \quad \dot{w} = n, \tag{10.61}$$

где a и n — постоянные, связанные соотношением

$$an^2 + F(a, 0) = 0. \tag{10.62}$$

Отсюда видно, что если $F<0$ (т. е. если действующая центральная сила есть сила притяжения), то каждому значению a соответствует вещественное значение n, откуда следует, что наша задача имеет бесчисленное множество частных решений вида (10.61). Каждому из этих частных решений соответствует равномерное движение точки по окружности, угловая скорость которого зависит от радиуса a этой окружности и определяется формулой (10.62) *).

Обозначим через T время полного оборота точки по своей круговой орбите. Тогда

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

и из формулы (10.62) выведем следующую формулу:

$$\frac{T^2}{a^3} = -\frac{4\pi^2}{a^2 F(a, 0)}, \tag{10.62'}$$

которая может рассматриваться как обобщение третьего закона Кеплера в задаче о движении под действием центральной силы.

---

*) Точнее, каждому a соответствует два значения n, отличающиеся знаком и, следовательно, две одинаковые круговые орбиты с взаимно противоположными направлениями движения. Полезно отметить еще, что в случае отталкивательной силы, т. е. при $F>0$, уравнение (10.62) не имеет вещественных решений и следовательно, круговые орбиты в этом случае невозможны.

Отметим, что из (10.62′) вытекает также точный третий закон Кеплера для круговых орбит задачи двух тел.

Если в рассматриваемой общей задаче существует силовая функция $U(r)$, то *)

$$F(r) = U'(r),$$

и условие (10.62) примет вид

$$an^2 + U'(a) = 0. \tag{10.62″}$$

Для фактического определения кругового движения в рассматриваемой общей задаче (независимо от того, существует ли силовая функция или нет) можно использовать, очевидно, те же формулы (10.57), (10.57′) или (10.59), в которых постоянная a задается произвольно, а постоянная n определяется в зависимости от a формулой (10.62). Можно, конечно, наоборот, задать значение угловой скорости n и определить затем соответствующий радиус круговой орбиты из уравнения (10.62) или (10.62′).

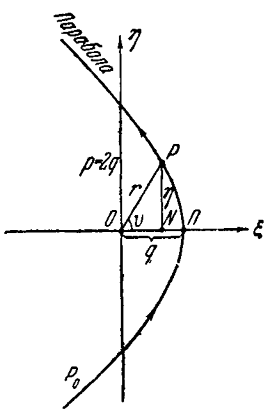

Рис. 59.

2. Пусть теперь начальные условия связаны соотношением

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = \frac{2\mu}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \qquad c \neq 0. \tag{10.63}$$

Тогда $h=0$, $e=1$, и орбита есть парабола (рис. 59). Уравнение орбиты напишется в виде

$$r = \frac{p}{1+\cos v} = q \sec^2 \frac{v}{2}, \tag{10.64}$$

где $q = p/2$ — расстояние от фокуса параболы до ее вершины, т. е. до перицентра **).

Чтобы получить необходимые формулы параболического движения, нужно прежде всего выразить истинную аномалию v в зависимости от времени, для чего служит опять то же уравнение (10.18), которое в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}\int_0^v \sec^4 i \frac{v}{2}\, dv = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}q^{3/2}}(t-\tau).$$

*) Здесь «штрих» обозначает дифференцирование, так что $U' = \frac{dU}{dr}$.

**) Для комет солнечной системы величина q называется «перигелийным расстоянием».

Простым интегрированием (без всякой подстановки) находим следующее уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}=n(t-\tau), \tag{10.65}$$

где положено для краткости

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}q^{3/2}}.$$

Уравнение (10.65) значительно проще соответствующего уравнения в случаях эллиптического или гиперболического движения и сводится к кубичному уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{v}{2}$.

Действительно, положим

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sigma. \tag{10.66}$$

Тогда уравнение (10.65) примет вид

$$\frac{1}{3}\sigma^3+\sigma=n(t-\tau). \tag{10.65'}$$

Это уравнение имеет единственный вещественный корень*), который может быть найден по формулам Кардана или любым приближенным способом решения алгебраических уравнений.

Зная σ, найдем соответствующее значение $v/2\left(-90^\circ\leqslant\frac{v}{2}\leqslant+90^\circ\right)$ и, следовательно, и истинной аномалии v.

Определив v, найдем и r из уравнения параболической орбиты (10.64) и скорость V из интеграла живой силы, который для параболического движения принимает вид

$$V^2=\frac{2\mu}{r}. \tag{10.67}$$

Элементами параболического движения (или элементами параболической орбиты) являются следующие пять величин:

$$\Omega,\ i,\ \omega,\ q,\ \tau \tag{10.68}$$

(напомним, что для параболы эксцентриситет e всегда равен единице).

Зная r и v, мы можем определить пространственные координаты и составляющие скорости по общим формулам гл. IX.

---

*) В этом убедимся, написав уравнение в виде

$$\sigma^3+3\sigma-3n(t-\tau)=0,\quad t\gtreqless\tau.$$

Так как левая часть содержит только одну перемену знаков, то уравнение действительно имеет единственный вещественный корень.

Однако для параболического движения можно получить более удобные формулы, если принять за независимую переменную вместо истинной аномалии v величину σ. Действительно, с помощью подстановки (10.66) уравнение орбиты (10.64) примет следующий простой вид:

$$r = q(1+\sigma^2). \tag{10.69}$$

Далее, из формулы (10.66) имеем

$$\cos v = \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}, \quad \sin v = \frac{2\sigma}{1+\sigma^2},$$

что позволяет выразить орбитальные координаты ξ и η, в зависимости от σ, по формулам

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos v = q(1-\sigma^2), \\ \eta &= r\sin v = 2q\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{10.70}$$

Теперь из (10.65′) и (10.64) получаем

$$\dot{\sigma} = \frac{nq}{r},$$

вследствие чего из формул (10.70) найдем

$$\dot{\xi} = -\frac{2nq^2\sigma}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{2nq^2}{r}, \tag{10.70′}$$

после чего получим координаты и составляющие скорости по формулам (9.59) гл. IX в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{q} &= \alpha_\tau(1-\sigma^2) + 2\alpha'_\tau\sigma, & \frac{\dot{x}}{nq} &= \frac{2q}{r}(-\alpha_\tau\sigma + \alpha'_\tau), \\ \frac{y}{q} &= \beta_\tau(1-\sigma^2) + 2\beta'_\tau\sigma, & \frac{\dot{y}}{nq} &= \frac{2q}{r}(-\beta_\tau\sigma + \beta'_\tau), \\ \frac{z}{q} &= \gamma_\tau(1-\sigma^2) + 2\gamma'_\tau\sigma, & \frac{\dot{z}}{nq} &= \frac{2q}{r}(-\gamma_\tau\sigma + \gamma'_\tau). \end{aligned}\right\} \tag{10.71}$$

Характер параболического движения выясняется из уравнения орбиты и интеграла живой силы.

Пусть время прохождения через перицентр $\tau > t_0$. Тогда точка движется по параболической орбите к перицентру с возрастающей скоростью (см. рис. 57).

При $t=\tau$ точка проходит через перицентр, где радиус-вектор имеет наименьшее значение, равное q, а скорость — наибольшее, определяемое формулой

$$V^2_{\max} = \frac{2\mu}{q}.$$

После прохождения через перицентр точка постоянно удаляется от центра силы и при неограниченно растущем времени уходит в бесконечность, так как при $t=\infty$, r также обращается в бесконечность, а $v \to 180^\circ$ и $\sigma \to \infty$. При $r \to \infty$ скорость V постоянно убывает и стремится к нулю, когда t неограниченно растет.

Параболическое движение так же как и круговое, является предельным случаем эллиптического или гиперболического движения и в действительности никогда не осуществляется.

Однако в астрономии нередко встречаются случаи движения комет по весьма вытянутым эллиптическим орбитам и метеоритных тел по гиперболическим орбитам с эксцентриситетом, близким к единице. И в том и в другом случае движение светила, по крайней мере вблизи перицентра (т. е. вблизи Солнца), мало отличается от параболического и может быть с достаточной точностью рассчитано по формулам настоящего раздела.

С другой стороны, парабола как бы отделяет семейство эллипсов от семейства гипербол, а поэтому понятие **параболической скорости** как некоторого предела скоростей эллиптических и гиперболических, имеет в астрономии весьма важное значение.

3. Перейдем в заключение к рассмотрению последнего предельного (или вырожденного) случая невозмущенного кеплеровского движения, т. е. к движению прямолинейному.

Пусть начальные значения координат и составляющих скорости таковы, что мы имеем

$$y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0 = 0, \quad z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0 = 0, \quad x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0 = 0. \tag{10.72}$$

Тогда все три постоянные площадей c_1, c_2, c_3 равны одновременно нулю, а значит, и $c=0$.

В этом случае, как уже отмечалось ранее, постоянная f, т. е. модуль вектора Лапласа, не может быть равна нулю, а постоянная энергии h может иметь любое значение (положительное, отрицательное или равное нулю). Плоскость орбиты в этом случае становится неопределенной, параметр p обращается в нуль, а эксцентриситет e равен единице, независимо от значения h.

Мы уже знаем, что при условиях (10.72) движение точки происходит по прямой линии, проходящей через начало координат (центр силы притяжения).

Условия (10.72) являются не только достаточными для прямолинейного движения, но и необходимыми, так что если все три постоянные площадей не равны одновременно нулю, то траектория заведомо будет криволинейной.

Чтобы убедиться в этом, вычислим кривизну линии, по которой происходит движение, определяемое дифференциальными уравнениями (9.6). Обозначая кривизну пространственной кривой буквой K (первая кривизна!), имеем из дифференциальной геометрии общую формулу:

$$K^2 = \frac{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}.$$

Но из уравнений движения (9.6) находим

$$\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y} = \frac{\mu}{r^3}(y\dot{z} - z\dot{y}) = \frac{\mu c_1}{r^3},$$

и, аналогично,

$$\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z} = \frac{\mu c_2}{r^3}, \quad \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \frac{\mu c_3}{r^3},$$

вследствие чего выражение для кривизны траектории в невозмущенном кеплеровском движении принимает вид

$$K = \frac{\mu c}{r^3 V^3},$$

откуда следует, что K тождественно равно нулю только в случае, когда $c = 0$, т. е. когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Заметим теперь, что в рассматриваемом случае, т. е. когда все три постоянные площадей равны нулю, интегралы площадей принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{y}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{z}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

откуда интегрированием получим

$$\frac{z}{y} = \frac{z_0}{y_0}, \quad \frac{x}{z} = \frac{x_0}{z_0}, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0};$$

отсюда в свою очередь следуют уравнения

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}, \tag{10.73}$$

являющиеся уравнениями прямой линии, проходящей через начало координат и через начальное положение движущейся точки.

Из уравнений (10.73) выводим также

$$x = \frac{x_0}{r_0} r, \quad y = \frac{y_0}{r_0} r, \quad z = \frac{z_0}{r_0} r, \tag{10.73'}$$

откуда следует, что окончательное решение задачи приводится к нахождению единственной неизвестной — радиуса-вектора r движущейся точки в зависимости от времени.

Уравнения (10.73′) дают также, очевидно,

$$\dot{x} = \frac{x_0}{r_0} \dot{r}, \quad \dot{y} = \frac{y_0}{r_0} \dot{r}, \quad \dot{z} = \frac{z_0}{r_0} \dot{r},$$

откуда следует, что

$$V = \dot{r},$$

вследствие чего из интеграла живой силы получим следующее уравнение:

$$\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \tag{10.74}$$

интегрирование которого дает

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{2\mu + hr}} = \pm (t - t_0). \tag{10.75}$$

Интеграл, входящий в это равенство, — элементарный, но его вычисление зависит от знака постоянной h, т. е. от величины начальной скорости V_0.

Проще всего вычисляется интеграл в случае $h = 0$, т. е. когда мы имеем вырожденное параболическое движение.

В этом случае из (10.75) находим

$$r = \left[r_0^{3/2} \pm \frac{3\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}} (t - t_0) \right]^{2/3}, \tag{10.76}$$

откуда заключаем, что при $\dot{r}_0 > 0$ радиус-вектор r (т. е. просто расстояние до центра силы) неограниченно растет со временем, а при $\dot{r}_0 < 0$ радиус-вектор r постоянно убывает от начального значения r_0 до нуля, обращаясь в нуль при

$$t = t_0 + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mu}} r_0^{3/2}, \tag{10.76'}$$

когда движение прекращается.

Если $h > 0$, т. е. когда мы имеем случай вырожденного гиперболического движения, то из (10.75) находим *)

$$\pm (t - t_0) = \frac{\mu}{h\sqrt{h}} \left[\frac{\sqrt{2\mu + hr}\,\sqrt{hr}}{\mu} - 2\ln\left(\sqrt{2\mu + hr} + \sqrt{hr}\right) \right]_{r_0}^{r}, \tag{10.77}$$

а при $h < 0$, т. е. в случае вырожденного эллиптического движения, имеем

$$\pm (t - t_0) = \frac{\mu}{h\sqrt{-h}} \left[\frac{\sqrt{2\mu + hr}\,\sqrt{-hr}}{\mu} - 2\arcsin\sqrt{\frac{-hr}{2\mu}} \right]_{r_0}^{r}. \tag{10.78}$$

За произвольные постоянные прямолинейного движения можно принять начальные координаты x_0, y_0, z_0 и начальную

*) См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

скорость $V_0=\dot{r}_0$. Координаты и составляющие скорости в любой момент времени выразятся тогда в зависимости от времени и четырех произвольных постоянных.

Заметим, что определить r как функцию времени из уравнения (10.77) или (10.78) в конечном виде невозможно, так как каждое из этих уравнений трансцендентно относительно радиуса-вектора r.

Но вырожденное эллиптическое или гиперболическое движение можно рассматривать так же как предельный случай соответствующего невырожденного движения, откуда следует, что для прямолинейного движения и в случае $h\neq 0$ можно сохранить те же формулы, которые были выведены в предыдущем параграфе.

Поэтому в случае $h<0$ мы можем положить $h=-\frac{\mu}{a}$ и определить радиус-вектор r из уравнения эллиптической орбиты (10.28), полагая в последнем $e=1$, что дает для r следующее уравнение:

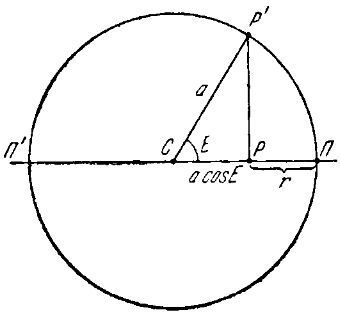

Рис. 60.

$$r=a(1-\cos E)=2a\sin^2\frac{E}{2}, \quad (10.78')$$

где вспомогательная переменная E определяется из уравнения Кеплера (при $e=1$):

$$E-\sin E=n(t-\tau). \quad (10.78'')$$

Нетрудно убедиться, что в вырожденном случае (который получается из случая эллиптического движения при $c=0$) величина E сохраняет свое геометрическое значение, т. е. есть угол, который образует радиус-вектор проекции движущейся точки на окружность радиуса a с центром в C с направлением прямой, по которой происходит движение (рис. 60).

Свойства вырожденного эллиптического движения легко обнаруживаются из уравнений (10.78′) и (10.78″). Точка P совершает движение по отрезку $ПП'$, длина которого есть $2a$, двигаясь постоянно к началу координат (при $\dot{r}_0<0$) либо двигаясь сначала от начала координат, достигая точки $П'$, а затем возвращаясь обратно и приходя в начало координат (центр силы) (см. рис. 60).

Если $h>0$, то положим $h=\frac{\mu}{a}$ и определим радиус-вектор формулой

$$r=a(\sec F-1), \quad (10.77')$$

или формулой

$$r = a(\operatorname{ch} H - 1),$$

где вспомогательная переменная определяется уравнением

$$\operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2} + 45^\circ\right) = n(t - \tau) \qquad (10.77'')$$

или соответственно уравнением

$$\operatorname{sh} H - H = n(t - \tau),$$

а свойства движения легко выводятся из приведенных формул.

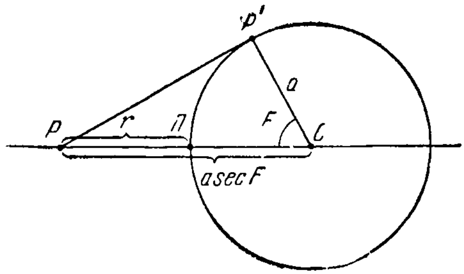

Рис. 61.

Нетрудно убедиться, что вспомогательная переменная F также сохраняет свое геометрическое значение, почти такое же, как и в случае невырожденного гиперболического движения (рис. 61).

§ 4. Зависимость элементов невозмущенного кеплеровского движения от начальных условий

1. Пусть произвольно заданы вещественные числа

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad \dot{x}_0, \quad \dot{y}_0, \quad \dot{z}_0, \qquad (10.79)$$

представляющие собой начальные значения прямоугольных пространственных координат и их первых производных по времени, соответствующие произвольно выбранному начальному моменту времени t_0 (*начальная эпоха или просто эпоха*).

Ставится вопрос об определении соответствующих значений элементов кеплеровой орбиты

$$\Omega, \quad i, \quad p, \quad e, \quad \omega, \quad \tau, \qquad (10.79')$$

общих для всякого типа невозмущенного движения.

Эта задача решается при помощи следующей последовательности формул.