или формулой

$$r = a(\operatorname{ch} H - 1),$$

где вспомогательная переменная определяется уравнением

$$\operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2} + 45^\circ\right) = n(t - \tau) \qquad (10.77'')$$

или соответственно уравнением

$$\operatorname{sh} H - H = n(t - \tau),$$

а свойства движения легко выводятся из приведенных формул.

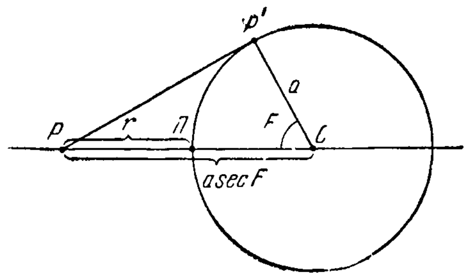

Рис. 61.

Нетрудно убедиться, что вспомогательная переменная F также сохраняет свое геометрическое значение, почти такое же, как и в случае невырожденного гиперболического движения (рис. 61).

§ 4. Зависимость элементов невозмущенного кеплеровского движения от начальных условий

1. Пусть произвольно заданы вещественные числа

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad \dot{x}_0, \quad \dot{y}_0, \quad \dot{z}_0, \qquad (10.79)$$

представляющие собой начальные значения прямоугольных пространственных координат и их первых производных по времени, соответствующие произвольно выбранному начальному моменту времени t_0 (**начальная эпоха** или **просто эпоха**).

Ставится вопрос об определении соответствующих значений элементов кеплеровой орбиты

$$\Omega, \quad i, \quad p, \quad e, \quad \omega, \quad \tau, \qquad (10.79')$$

общих для всякого типа невозмущенного движения.

Эта задача решается при помощи следующей последовательности формул.

Прежде всего находим

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

$$V_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2},$$

$$\cos \delta_0 = \frac{x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{r_0 V_0},$$

после чего вычисляем соответствующие значения произвольных постоянных первых интегралов, как это указано в § 2 гл. IX. Мы имеем для этого следующие формулы *):

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, \\ c_2 &= z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0, \\ c_3 &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0, \\ c &= +\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \end{aligned}\right\} \tag{10.80}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\mu x_0}{r_0} + c_3 \dot{y}_0 - c_2 \dot{z}_0, \\ f_2 &= -\frac{\mu y_0}{r_0} + c_1 \dot{z}_0 - c_3 \dot{x}_0, \\ f_3 &= -\frac{\mu z_0}{r_0} + c_2 \dot{x}_0 - c_1 \dot{y}_0, \\ f &= +\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \end{aligned}\right\} \tag{10.80'}$$

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}, \tag{10.80''}$$

причем должны выполняться соотношения

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0,$$

$$f^2 = \mu^2 + h c^2.$$

Теперь из соотношений

$$\sin i \sin \Omega = +\frac{c_1}{c},$$

$$\sin i \cos \Omega = -\frac{c_2}{c},$$

$$\cos i = +\frac{c_3}{c},$$

имеем

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{c_1}{c_2}, \quad \operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_3}.$$

*) Для удобства читателя мы приводим здесь сводку всех ранее выведенных формул, относящихся к определению постоянных по начальным значениям (10.79).

Так как постоянные c_1, c_2, c_3 вычислены, то знаки $\sin\Omega$ и $\cos\Omega$ известны, а поэтому можем однозначно определить долготу восходящего узла

$$\Omega = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_1}{c_2}\right). \tag{10.81}$$

Далее, по условию, $0 \leqslant i \leqslant 180°$. Поэтому четверть, в которой заключен угол i, определяется знаком постоянной c_3. Отсюда однозначно определяется наклонность

$$i = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{c_3}. \tag{10.81'}$$

Полезно отметить, что мы имеем, в частности,

$$\begin{array}{llll} i=0, & \text{если} & c_1=c_2=0 & \text{и} \quad c_3>0, \\ i=180°, & \text{»} & c_1=c_2=0 & \text{»} \quad c_3<0, \\ i=90°, & \text{»} & c_1^2+c_2^2\neq 0 & \text{»} \quad c_3=0. \end{array}$$

Положение плоскости орбиты полностью и однозначно определено. Переходим к другим элементам. Далее находим

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \sin^2\delta_0 \tag{10.82}$$

и

$$e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} r_0 V_0^2 (r_0 V_0^2 - 2\mu) \sin^2\delta_0} \tag{10.82'}$$

что определяет размеры орбиты и ее форму.

Для определения положения орбиты в ее плоскости, т. е. для определения углового расстояния перицентра от узла ω, можно использовать формулы (9.51) или (9.51').

Возьмем, например, формулы (9.51). Если $\cos i \neq 0$, то из первых двух формул (9.51) имеем следующие:

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega &= \frac{-f_1\sin\Omega + f_2\cos\Omega}{f\cos i}, \\ \cos\omega &= \frac{f_1\cos\Omega + f_2\sin\Omega}{f}, \end{aligned}\right\} \tag{10.83}$$

которые дают $\sin\omega$ и $\cos\omega$ по величине и по знаку, так как Ω и i уже определены. Таким образом, известна четверть, в которой содержится угол ω, а для величины угла можем получить из предыдущих формул следующую:

$$\omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{cf_3}{c_1 f_2 - c_2 f_1}\right). \tag{10.83'}$$

Если $\cos i=0$, то возьмем, например, вторую и третью из формул (9.51), которые дают

$$\sin\omega=\frac{f_3}{f},$$

$$\cos\omega=\frac{f_2}{f\sin\Omega},$$

откуда, так же как и выше, получим

$$\omega=\operatorname{arctg}\left(\frac{f_3\sin\Omega}{f_2}\right). \tag{10.83''}$$

Остается определить элемент τ — момент прохождения через перицентр, для чего используем формулы (9.52). Полагая в этих формулах $t=t_0$, т. е. $u=u_0$, мы выводим, если $\cos i\neq 0$,

$$\left.\begin{aligned}\sin u_0&=\frac{-x_0\sin\Omega+y_0\cos\Omega}{r_0\cos i},\\ \cos u_0&=\frac{x_0\cos\Omega+y_0\sin\Omega}{r_0}.\end{aligned}\right\} \tag{10.84}$$

Эти соотношения определяют величины и знаки $\sin u_0$ и $\cos u_0$, т. е. дают возможность определить четверть, в которой лежит угол u_0, величина которого может быть получена из формулы

$$u_0=\operatorname{arctg}\left(\frac{c_3z_0}{c_1y_0-c_2x_0}\right). \tag{10.84'}$$

Если $\cos i=0$, то второе и третье равенства (9.52) принимают вид

$$\sin u_0=\frac{z_0}{r_0},$$

$$\cos u_0=\frac{y_0}{r_0\sin\Omega},$$

откуда имеем

$$u_0=\operatorname{arctg}\left(\frac{z_0\sin\Omega}{y_0}\right).$$

Зная u_0, получим также начальное значение истинной аномалии

$$v_0=u_0-\omega,$$

и, наконец, величину τ из формулы (9.45):

$$\tau=t_0-\frac{p^2}{c}\int\limits_0^{v_0}\frac{dv}{(1+e\cos v)^2}. \tag{10.85}$$

Но для фактического нахождения τ нужно прежде вычислить интеграл в формуле (10.85), а это делается, как мы уже знаем, по-разному для различных типов кеплеровского движения. Поэтому нужно рассмотреть по отдельности разные случаи невозмущенного кеплеровского движения.

2. Для эллиптического движения $h<0$ и $e<1$. Большая полуось эллиптической орбиты a определяется уже известной формулой

$$a=\frac{\mu r_0}{2\mu-r_0V_0^2}, \tag{10.86}$$

с помощью которой находим также среднее движение

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{2\mu}{r_0}-V_0^2\right)^{3/2}. \tag{10.86'}$$

Теперь, зная v_0, найдем также начальное значение эксцентрической аномалии E_0 из формулы

$$E_0=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\right), \tag{10.87}$$

причем, как известно, $E_0/2$ и $v_0/2$ лежат в одной четверти, так что предыдущая формула определяет E_0 однозначно.

Найдя E_0, сразу получим среднюю аномалию эпохи M_0, т. е. среднюю аномалию в начальный момент

$$M_0=E_0-e\sin E_0, \tag{10.87'}$$

которую и принимают обычно за шестой элемент эллиптического движения (вместо τ).

Зная M_0, можем определить и τ:

$$\tau=t_0-\frac{1}{n}M_0, \tag{10.87''}$$

и также среднюю долготу эпохи

$$\varepsilon=M_0+\Omega+\omega, \tag{10.87'''}$$

чем и завершается определение элементов в случае эллиптического движения.

Если мы имеем случай гиперболического движения, то по найденному значению v_0 определим сначала начальное значение вспомогательной переменной F или H по формулам

$$\left.\begin{aligned} F_0&=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\right),\\ H_0&=2\operatorname{Arth}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{10.88}$$

после чего получим величину τ по одной из двух следующих формул:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= t_0 - \frac{1}{n}\left[e \operatorname{tg} F_0 - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{F_0}{2} + 45^\circ\right)\right], \\ \tau &= t_0 - \frac{1}{n}\left[e \operatorname{sh} H_0 - H_0\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10.88'}$$

Наконец, если $h=0$ и $e=1$, что соответствует параболическому движению, то, найдя сначала для начального момента значение переменной σ по формуле

$$\sigma_0 = \operatorname{tg}\frac{v_0}{2}, \tag{10.89}$$

мы получим затем и величину τ:

$$\tau = t_0 - \frac{1}{n}\left(\sigma_0 + \frac{1}{3}\sigma_0^3\right). \tag{10.89'}$$

Если начальные условия таковы, что мы имеем $\delta_0=90^\circ$ и $V_0^2=\frac{\mu}{r_0}$, то движение точки является круговым и определение элементов еще более упрощается.

Элементы Ω, i и $p=a$ находятся так же, как и в общем случае. Затем формула (10.82′) дает $e=0$, а формулы (10.83) показывают, что ω есть величина неопределенная и ее можно взять равной нулю или просто исключить из рассмотрения, так как этот элемент в формулы кругового движения все равно не входит.

Тогда, определяя величину u_0 по формулам (10.84), которые сохраняются и для кругового движения, мы будем иметь

$$M_0 = u_0, \tag{10.90}$$

что и завершает определение элементов для кругового движения

Что касается прямолинейного движения, то для него, как уже указывалось, за элементы можно принять начальные координаты и начальную радиальную скорость $\dot{r}_0$, которая по заданным величинам (10.78) определится очевидной формулой

$$\dot{r}_0 = V_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}. \tag{10.91}$$

Зная $\dot{r}_0$, мы можем найти величину a (вырожденную большую или действительную полуось) по формулам (10.29) или (10.43), что дает

$$a = \frac{\pm \mu r_0}{2\mu - r_0 \dot{r}_0^2}, \tag{10.91'}$$

и величину n по формуле

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}.$$

Теперь найдем момент прохождения через перицентр, т. е. момент падения точки на центральное тело. Действительно, формулы (10.76′) и (10.77′) дают

$$E_0=\arccos\left(\frac{a-r_0}{a}\right),\quad F_0=\arccos\left(\frac{a}{a+r_0}\right),$$

после чего из формул (10.76′) и (10.77′) получим

$$\tau=t_0-\frac{1}{n}(E_0-\sin E_0)\qquad (h<0),$$

$$\tau=t_0-\frac{1}{n}\left[\operatorname{tg}F_0-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{F_0}{2}+45^\circ\right)\right]\qquad (h>0).$$

3. Мы предполагали до сих пор, что начальные значения (10.78) заданы и известны с абсолютной точностью. Но обыкновенно точные значения величин (10.78) неизвестны, а заданные их числовые значения являются приближенными и содержат какие-то ошибки. Тогда возникает вопрос о том, какие ошибки будут содержать элементы орбиты, которые в конечном счете суть некоторые функции величин (10.78)?

В то же время, считая даже начальные условия (10.78) абсолютно точными, мы можем поставить имеющую определенный интерес для приложений задачу об определении изменений (или вариаций) элементов, когда величины (10.78) по каким-либо причинам несколько изменены.

И тот и другой подходы к проблеме изменения начальных условий приводят нас к следующей задаче: величины (10.78) получают некоторые приращения (положительные или отрицательные); требуется определить соответствующие приращения элементов невозмущенной орбиты.

Мы рассмотрим эту задачу только для того случая, когда приращения начальных значений (10.78) суть величины достаточно малые, так что вторыми и высшими степенями этих приращений можно полностью пренебречь. Тогда соответствующие приращения элементов определятся по правилам дифференциального исчисления. Действительно, пусть Φ есть заданная функция величин (10.78). Если приращения начальных значений координат и составляющих скорости обозначим соответственно через Δx_0, Δy_0, Δz_0, $\Delta\dot{x}_0$, $\Delta\dot{y}_0$, $\Delta\dot{z}_0$, то полное приращение величины Ф определится по формуле

$$\Delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z_0}\Delta z_0 + \\ + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}_0}\Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{y}_0}\Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{z}_0}\Delta \dot{z}_0. \quad (10.92)$$

Мы будем называть для сокращения величины

$$\Delta x_0, \quad \Delta y_0, \quad \Delta z_0, \quad \Delta\dot{x}_0, \quad \Delta\dot{y}_0, \quad \Delta\dot{z}_0 \quad (10.93)$$

мгновенными возмущениями начальных значений (10.78) или просто начальными возмущениями, а величину $\Delta\Phi$, определяемую формулой (10.92), мгновенным возмущением величины Ф, или просто возмущением величины Ф.

Найти непосредственно по формуле (10.92) возмущения элементов орбиты (10.79) довольно затруднительно, так как нужные формулы получаются длинными и громоздкими. Поэтому мы будем определять возмущения элементов орбиты через возмущения промежуточных величин, которыми являются постоянные первых интегралов, и некоторые удобные комбинации величин (10.78).

Прежде всего определим возмущения радиуса-вектора, начальной скорости и начального значения угла, образуемого вектором начальной скорости с начальным радиусом-вектором. Мы имеем, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_0 &= \frac{x_0}{r_0}\Delta x_0 + \frac{y_0}{r_0}\Delta y_0 + \frac{z_0}{r_0}\Delta z_0, \\ \Delta V_0 &= \frac{\dot{x}_0}{V_0}\Delta\dot{x}_0 + \frac{\dot{y}_0}{V_0}\Delta\dot{y}_0 + \frac{\dot{z}_0}{V_0}\Delta\dot{z}_0, \\ \Delta r'_0 &= \dot{x}_0\Delta x_0 + \dot{y}_0\Delta y_0 + \dot{z}_0\Delta z_0 + x_0\Delta\dot{x}_0 + y_0\Delta\dot{y}_0 + z_0\Delta\dot{z}_0, \\ \Delta\delta_0 &= \frac{\operatorname{ctg}\delta_0}{r_0 V_0}(V_0\Delta r_0 + r_0\Delta V_0) - \frac{\operatorname{cosec}\delta_0}{r_0 V_0}\Delta r'_0. \end{aligned}\right\} \quad (10.94)$$

В дальнейшем будем считать возмущения Δr_0, ΔV_0 и $\Delta\delta_0$ величинами известными.

Теперь формулы (10.80) дают соответственно

$$\left.\begin{aligned} \Delta c_1 &= \dot{z}_0\Delta y_0 - \dot{y}_0\Delta z_0 - z_0\Delta\dot{y}_0 + y_0\Delta\dot{z}_0, \\ \Delta c_2 &= \dot{x}_0\Delta z_0 - \dot{z}_0\Delta x_0 - x_0\Delta\dot{z}_0 + z_0\Delta\dot{x}_0, \\ \Delta c_3 &= \dot{y}_0\Delta x_0 - \dot{x}_0\Delta y_0 - y_0\Delta\dot{x}_0 + x_0\Delta\dot{y}_0, \\ \Delta c &= \frac{c_1}{c}\Delta c_1 + \frac{c_2}{c}\Delta c_2 + \frac{c_3}{c}\Delta c_3, \end{aligned}\right\} \quad (10.95)$$

а из формул (10.80′) соответственно получаем

$$\left.\begin{aligned}
\Delta f_1 &= \mu \frac{x_0 \Delta r_0 - r_0 \Delta x_0}{r_0^2} + c_3 \Delta \dot{y}_0 - c_2 \Delta \dot{z}_0 + \dot{y}_0 \Delta c_3 - \dot{z}_0 \Delta c_2,\\
\Delta f_2 &= \mu \frac{y_0 \Delta r_0 - r_0 \Delta y_0}{r_0^2} + c_1 \Delta \dot{z}_0 - c_3 \Delta \dot{x}_0 + \dot{z}_0 \Delta c_1 - \dot{x}_0 \Delta c_3,\\
\Delta f_3 &= \mu \frac{z_0 \Delta r_0 - r_0 \Delta z_0}{r_0^2} + c_2 \Delta \dot{x}_0 - c_1 \Delta \dot{y}_0 + \dot{x}_0 \Delta c_2 - \dot{y}_0 \Delta c_1,\\
\Delta f &= \frac{f_1}{f} \Delta f_1 + \frac{f_2}{f} \Delta f_2 + \frac{f_3}{f} \Delta f_3.
\end{aligned}\right\} \quad (10.95')$$

Затем формула (10.80″) дает

$$\Delta h = 2\left(V_0 \Delta V_0 + \frac{\mu \Delta r_0}{r_0^2}\right). \quad (10.96)$$

Теперь с помощью формулы (10.81) находим соответствующее возмущение долготы узла

$$\Delta\Omega = \frac{c_1 \Delta c_2 - c_2 \Delta c_1}{c_1^2 + c_2^2}, \quad (10.97)$$

а из формулы (10.81) выводим возмущение наклонности

$$\Delta i = \frac{(c_1 \Delta c_1 + c_2 \Delta c_2) c_3 - (c_1^2 + c_2^2) \Delta c_3}{c^2 \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}. \quad (10.97')$$

Далее, формулы (10.82) и (10.82′) дают (после соответствующего дифференцирования) возмущения параметра и эксцентриситета:

$$\Delta p = \frac{2c}{\mu} \Delta c = 2p\left(\frac{\Delta r_0}{r_0} + \frac{\Delta V_0}{V_0} + \operatorname{ctg} \delta_0 \cdot \Delta\delta_0\right), \quad (10.98)$$

$$\Delta c = \frac{\Delta f}{\mu}, \quad (10.98')$$

а из формул (10.93) выведем возмущение углового расстояния перицентра от узла в виде

$$\Delta\omega = \frac{\Delta f \cdot \cos\omega - \Delta f_1 \cdot \cos\Omega - \Delta f_2 \cdot \sin\Omega - f \sin\omega \cos i \cdot d\Omega}{f \sin\omega}. \quad (10.99)$$

Аналогичным образом из формул (10.84) выведем возмущение начального значения аргумента широты

$$\Delta u_0 = \frac{\Delta r_0 \cdot \cos u_0 - \Delta x_0 \cdot \cos\Omega - \Delta y_0 \sin\Omega - r_0 \sin u_0 \cos i \cdot d\Omega}{r_0 \sin u_0}, \quad (10.99')$$

после чего найдем возмущение начального значения истинной аномалии

$$\Delta v_0 = \Delta u_0 - \Delta\omega,$$

и, наконец, из формулы (10.85) выведем возмущение момента прохождения через перицентр в следующей форме:

$$\Delta\tau = \frac{2c\,\Delta p - p\,\Delta c}{pc}(\tau - t_0) - \frac{r_0^2}{c}\Delta v_0 + \frac{2p^2\,\Delta e}{c}\int\limits_0^{v_0}\frac{\cos v\,dv}{(1+e\cos v)^2}. \qquad (10.100)$$

Зная возмущения величин (10.79), мы без труда получим также и возмущения величин, зависящих от общих элементов.

Так, например, в случае эллиптического движения, с помощью формулы (10.96) найдем возмущение большой полуоси орбиты

$$\Delta a = \frac{\mu\,\Delta h}{h^2} = \frac{a^2}{\mu}\Delta h, \qquad (10.101)$$

а затем возмущение среднего движения

$$\Delta n = -\frac{3n\,\Delta a}{2a} \qquad (10.101')$$

и периода обращения

$$\Delta T = -\frac{2\pi}{n^2}\Delta n = -\frac{T}{n}\Delta n. \qquad (10.101'')$$

Теперь из формулы (10.87) находим возмущение начального значения эксцентрической аномалии в виде

$$\Delta E_0 = \frac{r_0\sqrt{1-e^2}}{p}\left(\Delta v_0 - \frac{\Delta e\sin v_0}{1-e^2}\right), \qquad (10.102)$$

после чего формула (10.87′) дает возмущение средней аномалии эпохи

$$\Delta M_0 = \frac{r_0}{a}\Delta E_0 - \Delta e\cdot\sin E_0, \qquad (10.102')$$

а формула (10.87‴) — возмущение средней долготы эпохи

$$\Delta\varepsilon = \Delta M_0 + \Delta\Omega + \Delta\omega. \qquad (10.102'')$$

Наконец, формула (10.87″) дает более простое выражение для возмущения момента прохождения через перицентр в виде

$$\Delta\tau = \frac{1}{n^2}(M_0\,\Delta n - n\,\Delta M_0).$$

Аналогичным образом можно получить подобные же формулы для $\Delta\tau$ и в случае гиперболического (а также и параболического) движения *).

4. После того как найдены возмущения (мгновенные!) элементов орбиты, вызываемые мгновенными возмущениями начальных условий, естественно перейти к определению соответ-

*) Также можно получить формулы, подобные (10.101), (10.101′) и (10.102) для случая гиперболического движения.

ствующих возмущений (также мгновенных) координат и составляющих скорости движущейся точки.

Действительно, обозначим через χ любую из величин невозмущенного кеплеровского движения*), которая является известной функцией времени и начальных значений (10.78), так что

$$\chi=\chi(t;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0).$$

Если начальные значения суть определенные, неизменные числа, то из предыдущей формулы мы можем получить числовое значение величины χ для любого момента времени.

Допустим теперь, что величины (10.78) изменились (или изменены по нашему желанию) так, что они получили соответственно малые приращения (10.93). Тогда изменится также и соответствующее текущему моменту t значение величины χ, которая получит некоторое приращение $\Delta\chi$, определяемое очевидной формулой

$$\Delta\chi=\frac{\partial\chi}{\partial x_0}\Delta x_0+\frac{\partial\chi}{\partial y_0}\Delta y_0+\frac{\partial\chi}{\partial z_0}\Delta z_0+\frac{\partial\chi}{\partial \dot{x}_0}\Delta \dot{x}_0+\frac{\partial\chi}{\partial \dot{y}_0}\Delta \dot{y}_0+\frac{\partial\chi}{\partial \dot{z}_0}\Delta \dot{z}_0.$$

Таким образом, для нахождения возмущения величины χ, вызываемого возмущениями начальных условий, нам остается найти выражения для всех частных производных функции χ по переменным (10.78), имея в виду, что при всех этих дифференцированиях время t остается неизменным.

Но выражения величин невозмущенного движения в зависимости от начальных условий оказываются чересчур сложными и громоздкими, а поэтому мы будем рассматривать всякую величину χ как функцию времени и элементов орбиты, т. е. будем представлять ее формулой вида

$$\chi=\chi(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau). \tag{10.103}$$

Когда начальные условия получают возмущения (10.93), все элементы орбиты также получают соответствующие возмущения, определяемые формулами предыдущего раздела. Поэтому возмущения элементов

$$\Delta\Omega,\quad \Delta i,\quad \Delta\omega,\quad \Delta p,\quad \Delta e,\quad \Delta\tau$$

мы можем теперь считать известными и данными, вследствие чего возмущение любой величины χ определится формулой

$$\Delta\chi=\frac{\partial\chi}{\partial\Omega}\Delta\Omega+\frac{\partial\chi}{\partial i}\Delta i+\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\Delta\omega+\frac{\partial\chi}{\partial p}\Delta p+\frac{\partial\chi}{\partial e}\Delta e+\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\Delta\tau, \tag{10.104}$$

*) Здесь буква χ является общим обозначением для любой зависящей от времени величины невозмущенного движения. Таким образом, χ обозначает любую координату или составляющую скорости, а также радиус-вектор, скорость, аргумент широты и т. д.

и наша задача заключается теперь в вычислении частных производных от величин χ по независимым переменным (10.103). считая при этом время t неизменным.

Для нахождения частных производных от координат и составляющих скорости по величинам (10.103) удобнее всего воспользоваться общими формулами (9.59) гл. IX.

В самом деле, первые множители в этих формулах, т. е. направляющие косинусы линии апсид и прямой, к ней перпендикулярной (лежащей в плоскости орбиты), зависят, как показывают формулы (9.58) и (9.58′), только от элементов положения Ω, i, ω, а вторые множители, т. е. орбитальные координаты и их производные, зависят только от элементов p, e, τ.

Обозначим любой из элементов первой группы через L, а любой элемент второй группы через P. Тогда формулы (9.59) дают

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial L} &= \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\xi + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\eta, & \frac{\partial \dot{x}}{\partial L} &= \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\dot{\xi} + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\dot{\eta}, \\ \frac{\partial x}{\partial P} &= \alpha_\tau\frac{\partial \xi}{\partial P} + \alpha'_\tau\frac{\partial \eta}{\partial P}, & \frac{\partial \dot{x}}{\partial P} &= \alpha_\tau\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P} + \alpha'_\tau\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P} \end{aligned}\right\} \qquad (10.105)$$

и аналогичные выражения для производных от остальных координат и составляющих скоростей.

Таким образом, нужно найти в отдельности производные от направляющих косинусов по элементам первой группы и производные от орбитальных координат по элементам второй группы.

Прежде всего из формул (9.58) и (9.58′) находим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial \omega} &= +\alpha'_\tau, & \frac{\partial \beta_\tau}{\partial \omega} &= +\beta'_\tau, & \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial \omega} &= +\gamma'_\tau, \\ \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial \omega} &= -\alpha_\tau, & \frac{\partial \beta'_\tau}{\partial \omega} &= -\beta_\tau, & \frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial \omega} &= -\gamma_\tau \end{aligned}\right\} \qquad (10.106)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial \Omega} &= -\beta_\tau, & \frac{\partial \beta_\tau}{\partial \Omega} &= +\alpha_\tau, & \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial \Omega} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial \Omega} &= -\beta'_\tau, & \frac{\partial \beta'_\tau}{\partial \Omega} &= +\alpha'_\tau, & \frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial \Omega} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.106')$$

Затем, обозначая для простоты направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости орбиты (вектора момента скорости) через α'', β'', γ'', т. е. полагая

$$\alpha'' = \sin\Omega\sin i, \quad \beta'' = -\cos\Omega\sin i, \quad \gamma'' = \cos i,$$

мы получим еще из формул (9.58) и (9.58′)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_\tau}{\partial i}&=\alpha''\sin\omega, & \frac{\partial\beta_\tau}{\partial i}&=\beta''\sin\omega, & \frac{\partial\gamma_\tau}{\partial i}&=\gamma''\sin\omega,\\ \frac{\partial\alpha'_\tau}{\partial i}&=\alpha''\cos\omega, & \frac{\partial\beta'_\tau}{\partial i}&=\beta''\cos\omega, & \frac{\partial\gamma'_\tau}{\partial i}&=\gamma''\cos\omega.\end{aligned}\right\}\qquad(10.106'')$$

Перейдем к нахождению производных по элементам группы P от орбитальных координат и составляющих скорости. Для этого, как показывают формулы (9.41) и (9.48), нужно сначала найти соответствующие производные от радиуса-вектора r и истинной аномалии v.

Чтобы найти производные от v по элементам P, возьмем формулу (9.45), которую напишем здесь в виде

$$\int\limits_0^{v'}\frac{dv'}{(1+e\cos v')^2}=\frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau),\qquad(10.107)$$

где через v' обозначена переменная интегрирования.

Дифференцируя равенство (10.107) по элементам P и определяя затем из получившихся соотношений нужные нам производные от v по элементам P, мы найдем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial p}=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{(t-\tau)}{r^2},\quad \frac{\partial v}{\partial\tau}=-\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}=-\dot v,\\ &\frac{\partial v}{\partial e}=\frac{2p^2}{r^2}\int\limits_0^{v}\frac{\cos v'\,dv'}{(1+e\cos v')^3}.\end{aligned}\right\}\qquad(10.107')$$

Дифференцируя теперь по элементам P уравнение орбиты общего вида

$$r=\frac{p}{1+e\cos v},$$

мы получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial r}{\partial p}=\frac{r}{p},\quad \frac{\partial r}{\partial\tau}=-\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin v=-\dot r,\\ &\frac{\partial r}{\partial e}=\frac{r^2}{p}\left(\sin v\,\frac{\partial v}{\partial e}-\cos v\right).\end{aligned}\right\}$$

Теперь дифференцируем выражения (9.41) для орбитальных координат по элементу P, что дает

$$\frac{\partial\xi}{\partial P}=\frac{\xi}{r}\frac{\partial r}{\partial P}-\eta\frac{\partial v}{\partial P},\quad \frac{\partial\eta}{\partial P}=\frac{\eta}{r}\frac{\partial r}{\partial P}+\xi\frac{\partial v}{\partial P},\qquad(10.108)$$

где производные от r и v уже известны.

Для нахождения производных от $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ используем формулы (9.48), которые напишем здесь следующим образом:

$$\dot{\xi} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v, \quad \dot{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos v), \tag{10.109}$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial p} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{\sin v}{2p} - \cos v \frac{\partial v}{\partial p} \right), & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial p} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{e + \cos v}{p} + \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\
\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial e} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos v \frac{\partial v}{\partial e}, & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(1 - \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\
\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \tau} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos v \frac{\partial v}{\partial \tau}, & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \tau} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.109'}$$

Таким образом, все нужные производные получены, и мы можем составить теперь выражения для производных от координат и составляющих скорости по формулам (10.105).

В заключение выпишем выражения для частных производных по элементам орбиты от проекций скорости, определяемых формулами (9.48′), и от самой скорости, определяемой интегралом живой силы или формулой (9.49). Мы имеем из (9.48′)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V_r}{\partial p} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial p} = e \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(-\frac{\sin v}{2p} + \cos v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\
\frac{\partial V_r}{\partial e} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial e} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\sin v + e \cos v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\
\frac{\partial V_r}{\partial \tau} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial \tau} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \cos v \frac{\partial v}{\partial \tau};
\end{aligned}\right\} \tag{10.110}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V_n}{\partial p} &= \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial p} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{1 + e \cos v}{2p} + \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\
\frac{\partial V_n}{\partial e} &= \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial e} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\cos v - e \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\
\frac{\partial V_n}{\partial \tau} &= \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial \tau} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau},
\end{aligned}\right\} \tag{10.110'}$$

а из формулы (9.49) получаем выражения

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial p} &= -\frac{\mu}{pV} \left(\frac{V^2}{2\mu} - e \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\
\frac{\partial V}{\partial e} &= \frac{\mu}{pV} \left(\cos v + e - e \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\
\frac{\partial V}{\partial \tau} &= -\frac{\mu}{pV}\, e \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau},
\end{aligned}\right\} \tag{10.110''}$$

в которые нужно подставить вместо производных от истинной аномалии их выражения (10.107′).

Примечание. Выведенные формулы используются в теории и практике задачи об улучшении первоначальной орбиты*), а также в различных вопросах теории возмущений.

Заметим еще, что полученными формулами, которые все линейны относительно возмущений начальных значений и возмущений элементов, можно воспользоваться и для решения обратной задачи, т. е. задачи об определении начальных возмущений (10.93), если известны возмущения элементов орбиты или возмущения координат и составляющих скорости для какого-либо момента времени t, отличного от t_0.

---

*) См., например, М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. I, 1941; см. также П. Е. Эльясберг, Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, или Д. Брауэр, Дж. Клеменс, Методы небесной механики, перев. с англ., 1964.