ГЛАВА XI

РЯДЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В главе X было показано, что общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения не может быть представлено в конечной форме, так как связь между истинной аномалией и временем для всех основных типов движения устанавливается при помощи трансцендентного соотношения.

Только в двух частных случаях, а именно, в случае кругового движения и в случае прямолинейного параболического движения мы могли получить для координат движущейся точки (планеты или спутника) простые выражения в виде явных функций времени.

Однако для рассмотрения общих методов теории возмущений необходимо иметь выражения для координат и их первых производных в виде явных функций времени, а поскольку получить эти явные выражения в конечном виде невозможно, то естественно возникает задача о представлении величин невозмущенного движения в виде бесконечных рядов.

В классической небесной механике эта задача разрешена только для случая невозмущенного эллиптического движения. Рассмотрение этой задачи и является предметом настоящей главы.

§ 1. Разложения координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета

1. Так как координаты и их первые производные в эллиптическом (невырожденном) движении могут быть представлены как явные функции эксцентрической аномалии E, то, найдя E как явную функцию времени, мы тем самым получим и явные выражения в зависимости от времени и всех других величин этого типа движения.

Эксцентрическая аномалия связана с временем уравнением Кеплера

$$E - e\sin E = M, \tag{11.1}$$

где M есть средняя аномалия, определяемая формулой

$$M = n(t - \tau), \tag{11.2}$$

а e — эксцентриситет эллиптической орбиты, т. е. величина, удовлетворяющая неравенству

$$0 \leqslant e < 1. \tag{11.3}$$

Легко показать, что для каждого значения t, а следовательно, и M, уравнение (11.1) имеет единственное действительное решение. В самом деле, дифференцируя уравнение (11.1) по средней аномалии M, мы получим

$$(1 - e\cos E)\frac{dE}{dM} = 1,$$

откуда найдем

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e\cos E} = \frac{a}{r}. \tag{11.4}$$

Таким образом, производная от E по M всегда положительна и, следовательно, E есть монотонно возрастающая функция от M. Поэтому *каждому действительному значению M соответствует одно-единственное значение E*.

Если M равно нулю, 180° или 360°, то и эксцентрическая аномалия равна соответственно нулю, 180° или 360°. Обычно в астрономии все аномалии и долготы измеряются в градусной мере от нуля до 360° (или в радианах от нуля до 2π). Но в небесной механике часто интересно рассматривать аномалии и долготы как величины, неограниченно растущие вместе с временем t. Поэтому будем рассматривать здесь M и E как величины, могущие принимать любые действительные значения.

Тогда, если M заключено в промежутке между $k\pi$ и $(k+1)\pi$ (k — любое целое положительное число), соответствующее значение E также заключено в промежутке от $k\pi$ до $(k+1)\pi$.

Действительно, напишем уравнение (11.1) в виде

$$F(E) = E - e\sin E - M = 0, \tag{11.1'}$$

и пусть

$$k\pi < M < (k+1)\pi.$$

Мы имеем тогда из (11.1')

$$F(k\pi) = k\pi - M < 0,$$
$$F[(k+1)\pi] = (k+1)\pi - M > 0.$$

Так как функция $F(E)$ непрерывна при любом конечном E и имеет значения противоположных знаков на концах промежутка, то она необходимо обращается в нуль, по крайней мере для одного значения E, содержащегося в промежутке $[k\pi, (k+1)\pi]$. Но мы уже видели, что каждому значению M соответствует единственное значение E. Поэтому уравнение (11.1′) имеет единственный действительный корень, заключающийся в промежутке $[k\pi, (k+1)\pi]$. Если же $M=k\pi$, то единственным решением уравнения (11.1′) будет $E=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Мы уже указывали, что корень уравнения (11.1) всегда может быть найден приближенно с любой степенью точности любым из многочисленных способов приближенного решения трансцендентных уравнений. Рассмотрение этих способов не входит в задачи нашей книги и может быть найдено в различных руководствах по численным методам небесной механики.

Нашей задачей является аналитическое представление величины E, удовлетворяющей уравнению Кеплера, при помощи бесконечного ряда того или иного вида.

В этом параграфе мы займемся нахождением решения уравнения Кеплера (11.1) в виде бесконечного ряда, расположенного по возрастающим целым положительным степеням эксцентриситета e, который играет в этом уравнении роль параметра.

Для этого заметим прежде всего, что при $e=0$ мы имеем очевидное решение уравнения (11.1)

$$E=M, \tag{11.5}$$

соответствующее, как известно, случаю круговой орбиты, являющемуся предельным случаем эллиптической орбиты при $e \to 0$.

Во многих случаях, с которыми приходится иметь дело астроному-теоретику, эксцентриситет орбиты имеет малое числовое значение; это наводит на мысль, что соответствующее решение уравнения Кеплера будет (при малом e) близко к решению (11.5), которое и можно рассматривать как первый член бесконечного ряда, все остальные члены которого обращаются в нуль вместе с e. Поэтому будем стараться найти такое решение уравнения Кеплера, которое обращается в M при $e=0$.

Используя формулу Маклорена, нетрудно получить ряд, удовлетворяющий уравнению Кеплера и расположенный по степеням e, и притом совершенно элементарным путем.

Однако таким способом весьма затруднительно исследовать вопрос о сходимости ряда, и мы для нахождения нужного разложения применим другой способ, основанный на методах теории функций комплексного переменного*).

*) См., например, М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958, а также А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. с франц., «Наука», 1965.

Этот способ заключается в применении знаменитой формулы Лагранжа, дающей решение уравнения Лагранжа, которое в обычных обозначениях комплексного анализа пишется в виде

$$F(z) = z - a - \alpha f(z), \tag{11.6}$$

где z, a и параметр α могут иметь любые комплексные значения, а $f(z)$ есть заданная функция, голоморфная внутри некоторого замкнутого контура S, содержащего внутри себя точку a, и удовлетворяющая на самом контуре условию

$$\left| \frac{\alpha f(z)}{z-a} \right| < 1. \tag{11.7}$$

В анализе доказывается, что при этих условиях уравнение Лагранжа (11.6) имеет внутри контура S единственный корень, являющийся голоморфной функцией параметра α и обращающийся в a при $\alpha=0$.

Этот корень представляется рядом (ряд Лагранжа!)

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [f^k(a)] = a + \alpha f(a) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} \frac{d}{da} [f^2(a)] + \ldots, \tag{11.8}$$

абсолютно сходящимся при условии (11.7) для любого значения независимой переменной a в области, ограниченной контуром S.

Важно отметить, что при тех же условиях имеет место и более общая формула.

Пусть $\Phi(z)$ есть заданная функция комплексной переменной z, голоморфная в области, ограниченной контуром S.

Тогда имеет место следующая формула Лагранжа*):

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [\Phi'(a) f^k(a)] =$$

$$= \Phi(a) + \alpha\Phi'(a) f(a) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} \frac{d}{da} [\Phi'(a) f^2(a)] + \ldots, \tag{11.8$'$}$$

представляющая разложение заданной функции от корня z уравнения (11.6), абсолютно сходящееся при выполнении неравенства (11.7) для любого a в области S.

Условие (11.7) определяет верхний предел тех значений модуля $|\alpha|$, для которых ряды (11.8) и (11.8′) остаются сходящимися.

*) Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 1, § 186 и т. 2, § 302, перев. с франц., ГТТИ, 1933. В указанной книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата рассмотрена более общая формула, из которой формула Лагранжа получается как частный случай.

Действительно, из неравенства (11.7) следует, что мы должны иметь неравенство

$$|\alpha| < \left|\frac{z-a}{f(z)}\right|, \tag{11.7$'$}$$

справедливое в каждой точке контура S, внутри которого функция $f(z)$, по условию, голоморфна.

Рассмотрим наиболее интересный для нас частный случай, когда $f(z)$ есть целая функция, т. е. функция, голоморфная во всей комплексной плоскости переменного z.

Тогда ряд Лагранжа будет абсолютно сходящимся внутри всякого круга C с центром в точке a, на окружности которого выполняется условие (11.7), и мы можем поставить задачу об отыскании такого круга, для которого правая часть неравенства (11.7′) имеет наибольшее значение.

Действительно, обозначим расстояние от точки z до точки a через r, так что $r=|z-a|$; тогда для абсолютной сходимости ряда Лагранжа на окружности круга C должно выполняться неравенство

$$|\alpha| < \frac{r}{|f(z)|}, \tag{11.7$''$}$$

которое при данном r заведомо выполняется, если взять $\alpha=0$. Следовательно, так как функция $f(z)$ непрерывна, условие (11.7″) будет также выполняться при данном r, если $|\alpha|$ достаточно мало́. Изменяя теперь радиус r круга C, мы будем изменять также правую часть неравенства (11.7″), т. е. верхний предел тех значений $|\alpha|$, при которых ряд Лагранжа остается сходящимся; нам остается теперь найти такое значение r, при котором правая часть неравенства (11.7″) максимальна.

Обозначим через $M(r)$ наибольшее значение модуля $|f(z)|$ на окружности C. Тогда условие (11.7″) можно написать в виде

$$|\alpha| < \frac{r}{M(r)}, \tag{11.7$'''$}$$

и наша задача приводится к нахождению наибольшего значения отношения $r/M(r)$, когда r изменяется от нуля до ∞.

Это отношение равно нулю при $r=0$, так как если бы $M(r)$ стремилось к нулю вместе с r (т. е. если бы было $M(r)=rM_1(r)$), то точка $z=a$ была бы нулем функции $f(z)$ и $F(z)$ делилась бы на $z-a$ (т. е. уравнение Лагранжа имело бы корень $z=a$ при любом α).

То же отношение равно нулю и при $r=+\infty$, так как в противном случае $M(r)$, а следовательно, и $f(z)$, было бы многочленом первой степени, и уравнение (11.6) решалось бы элементарно.

Отсюда следует, что отношение $r/M(r)$ имеет максимум при некотором значении r^* радиуса r (рис. 62).

Обозначим этот максимум через α^*, так что

$$R^* = \frac{r^*}{M(r^*)}. \tag{11.9}$$

Тогда из предыдущего рассуждения следует, что уравнение (11.6) имеет один и только один корень, модуль которого меньше r^*, если

$$|\alpha| < \alpha^* = R^*, \tag{11.9'}$$

и который стремится к a при $\alpha \to 0$.

Следовательно, разложения (11.8) и (11.8′) имеют место и сходятся абсолютно, если $|\alpha|$ не превосходит α^* и функция $\Phi(z)$ голоморфна по крайней мере внутри круга C^* с центром в точке a и радиуса r^*.

Примечание. В § 4 гл. IV мы использовали другую форму формулы Лагранжа (формула (4.33)). Формула (11.8′) получается из (4.33), если положить

$$\Pi(z) = \Phi(z) \cdot F'(z)$$

и выполнить некоторые преобразования.

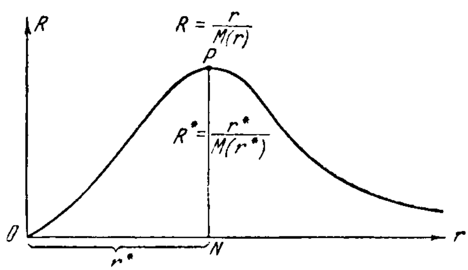

Рис. 62.

2. Рассмотрим теперь частный случай уравнения Лагранжа, когда

$$f(z) = \sin z,$$

то есть когда уравнение (11.6) есть уравнение Кеплера

$$z - a - \alpha \sin z = 0, \tag{11.10}$$

написанное в других обозначениях.

Общая формула Лагранжа (11.8′) напишется в этом случае следующим образом:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [\Phi'(a) \sin^k a], \tag{11.11}$$

где $\Phi(z)$ есть произвольно заданная голоморфная функция от переменной z, и нам остается только найти верхний предел значений $|\alpha|$, при которых ряд (11.11) остается абсолютно сходящимся.

Так как в нашем случае $f(z)$ есть *целая функция*, то мы можем применить для нахождения α^* формулу (11.9), для чего нужно сначала найти $M(r)$, а потом решить элементарную задачу на нахождение максимума функции.

Возьмем в комплексной плоскости какую-нибудь систему декартовых координат, причем ось абсцисс проведем через точку a.

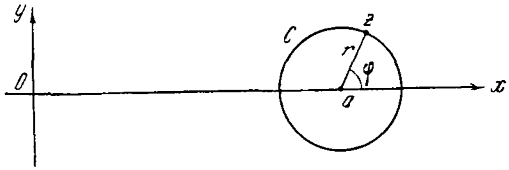

Рис. 63.

Тогда координаты точки z, лежащей на окружности C радиуса r с центром в точке a (рис. 63), будут

$$x = a + r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

где φ есть угол, образуемый радиусом-вектором точки z с положительным направлением оси абсцисс.

На окружности C будем иметь

$$z = x + iy = a + r\cos\varphi + ir\sin\varphi \qquad (i = \sqrt{-1})$$

и

$$|\sin z|^2 = |\sin(a + r\cos\varphi + ir\sin\varphi)|^2 =$$
$$= \sin(a + r\cos\varphi + ir\sin\varphi)\cdot\sin(a + r\cos\varphi - ir\sin\varphi) - =$$
$$= \cos^2(ir\sin\varphi) - \cos^2(a + r\cos\varphi),$$

откуда, обозначая временно буквой e неперово число, т. е $e = 2{,}7182\ldots$, имеем

$$|\sin z| = \sqrt{\left(\frac{e^{r\sin\varphi} + e^{-r\sin\varphi}}{2}\right)^2 - \cos^2(a + r\cos\varphi)}\,.$$

Поэтому, если положить

$$M(r) = \frac{e^r + e^{-r}}{2},$$

то заведомо будем иметь во всех точках круга

$$|\sin z| \leqslant M(r).$$

Теперь нужно найти максимум функции

$$R(r) = \frac{r}{M(r)} = \frac{2r}{e^r + e^{-r}}. \qquad (11.12)$$

Этот максимум легко найти по общим правилам. Приравнивая производную

$$R'(r) = -2\frac{r(e^r - e^{-r}) - (e^r + e^{-r})}{(e^r + e^{-r})^2} = -\frac{2T(r)}{(e^r + e^{-r})^2}$$

нулю, получаем уравнение для определения критического значения переменной r в виде

$$T(r) = (r-1)e^r - (r+1)e^{-r} = 0, \qquad (11.12')$$

которое имеет единственный действительный корень, заключающийся в промежутке между единицей и двойкой.

В самом деле,

$$T'(r) = r(e^r + e^{-r}),$$

т. е. всегда положительна. Поэтому $T(r)$ есть монотонно возрастающая функция от r. Но

$$T(1) = -2e^{-1} < 0,$$
$$T(2) = e^2 - 3e^{-2} > 0,$$

а, следовательно, $T(r)$ обращается в нуль при некотором значении r, лежащем между 1 и 2.

Приближенное решение уравнения (11.12) дает его корень

$$r^* = 1{,}199678640257734...$$

Это значение действительно соответствует максимуму функции $R(r)$, поскольку, как легко проверить,

$$R''(r^*) = -R(r^*) < 0.$$

Теперь формула (11.12) дает α^*:

$$\alpha^* = R(r^*) = \frac{2r^*}{e^{r^*} + e^{-r^*}}.$$

Подставляя сюда вместо r^* его числовое значение, найдем

$$\alpha^* = 0{,}6627434193492... \qquad (11.13)$$

Таким образом, ряд (11.11) сходится абсолютно при любом комплексном значении a, если параметр α удовлетворяет неравенству

$$|\alpha| < \alpha^*.$$

В интересующем нас случае уравнения Кеплера (11.1) параметром служит эксцентриситет орбиты e, который имеет действительное значение, заключающееся между нулем и единицей, а формула Лагранжа напишется в обычных астрономических обозначениях следующим образом:

$$\Phi(E)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}\,\frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}}\left[\Phi'(M)\sin^k M\right], \tag{11.14}$$

где $\Phi(E)$ обозначает заданную функцию от эксцентрической аномалии E.

Таким образом, формула (11.14) дает разложение любой целой функции от эксцентрической аномалии в ряд, расположенный по целым, возрастающим степеням эксцентриситета e, абсолютно сходящийся при любом значении средней аномалии M, если эксцентриситет орбиты удовлетворяет условию

$$e<\bar{e}=0{,}6627434193492\ldots \tag{11.15}$$

Величина $\bar{e}$ впервые была найдена иным путем при помощи весьма искусного расчета Лапласом, а поэтому число $\bar{e}$, определенное в (11.15), называется *пределом Лапласа для сходимости рядов эллиптического движения*, или, более кратко, *пределом Лапласа*.

В большинстве случаев астрономической практики эксцентриситет орбиты интересующего нас небесного тела (естественного или искусственного, безразлично) не превышает предела Лапласа и даже значительно меньше его, так что ряды типа (11.14) обычно *сходятся достаточно быстро*, и бывает достаточно взять несколько первых членов этих рядов, чтобы получить их суммы с весьма высокой точностью.

Если $\bar{e}\leqslant e<1$, то ряды типа (11.14) могут оказаться расходящимися для некоторых значений M и тогда они, конечно, неприменимы для определения функции $\Phi(E)$.

3. Применим ряд Лагранжа (11.14) для разложения некоторых важных величин невозмущенного эллиптического движения.

Прежде всего рассмотрим случай, когда $\Phi(E)=E$. Тогда $\Phi(M)=M$, $\Phi'(M)=1$, и мы находим разложение по степеням эксцентриситета e самóй эксцентрической аномалии в следующем виде:

$$E=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}\,\frac{d^{k-1}(\sin^k M)}{dM^{k-1}}, \tag{11.16}$$

что можно записать также более удобно следующим образом:

$$E=\sum_{k=0}^{\infty}e^k E_k(M). \tag{11.16'}$$

где положено

$$E_k(M) = \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}(\sin^k M)}{dM^{k-1}}. \tag{11.16''}$$

Формула (11.16) дает аналитическое решение уравнения Кеплера, конечно, при условии, что эксцентриситет орбиты не превышает предела Лапласа.

Вычисляя по формуле (11.16″) первые коэффициенты ряда (11.16′), мы найдем следующее выражение для эксцентрической аномалии с точностью до квадрата эксцентриситета:

$$E = M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \ldots \tag{11.16'''}$$

Положим теперь в формуле (11.14) $\Phi(E) = \cos E$, так что $\Phi'(M) = -\sin M$; тогда имеем следующее разложение:

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}}\left[-\sin^{k+1}M\right], \tag{11.17}$$

которое также запишем более кратко в виде

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} e^k C_k(M), \tag{11.17'}$$

где положено

$$C_k(M) = \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}}\left[-\sin^{k+1}M\right]; \tag{11.17''}$$

приближенное выражение $\cos E$ с точностью до квадрата эксцентриситета имеет вид

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{3e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) + \ldots \tag{11.17'''}$$

Величины $E_k(M)$ и $C_k(M)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), являющиеся тригонометрическими многочленами относительно синусов и косинусов средней аномалии M, суть периодические функции от M с общим периодом 2π, общие выражения для которых будут приведены несколько ниже.

Теперь нетрудно получить разложения по степеням e и для других величин эллиптического движения, причем оказывается, что коэффициенты этих разложений весьма просто выражаются через $E_k(M)$ и $C_k(M)$, которые можно поэтому рассматривать как *основные тригонометрические многочлены* в теории эллиптического движения.

В самом деле, из основного уравнения Кеплера (11.1) мы имеем прежде всего

$$\sin E = \frac{1}{e}(E - M),$$

откуда с помощью формул (11.16′) получим *)

$$\sin E = \sum_{k=0}^{\infty} e^k S_k(M), \quad S_k(M) = E_{k+1}(M). \tag{11.18}$$

Далее, из уравнения эллиптической орбиты (10.28) имеем

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E,$$

откуда с помощью формулы (11.17′) находим следующее разложение:

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k R_k(M), \tag{11.19}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$R_0(M) = 1, \qquad R_k(M) = -C_{k-1}(M) \qquad (k \neq 0). \tag{11.19′}$$

Затем формулы (10.34) дают выражения для орбитальных координат ξ и η:

$$\frac{\xi}{a} = -e + \cos E, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2}\sin E.$$

Первая из этих формул дает разложение

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \Xi_k(M), \tag{11.20}$$

с коэффициентами, определяемыми формулами

$$\Xi_1(M) = C_1(M) - 1, \quad \Xi_k(M) = C_k(M) \qquad (k \neq 1). \tag{11.20′}$$

Переходя ко второй орбитальной координате, заметим сначала, что мы можем написать следующее разложение:

$$\frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2}\sum_{k=0}^{\infty} e^k S_k(M). \tag{11.21}$$

Правую часть этого равенства нетрудно представить в виде ряда, расположенного по степеням e. Действительно, общий

*) При вычислении $E_0(M)$ и $C_0(M)$ нужно учесть, что производная —1-го порядка есть неопределенный интеграл.

ряд Ньютона дает разложение

$$\sqrt{1-e^2}=\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^k, \tag{11.21'}$$

числовые коэффициенты которого находятся по формулам

$$\alpha_{2k+1}=0, \quad \alpha_0=1, \quad \alpha_{2k}=-\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}$$

и который сходится абсолютно для всякого значения e, меньшего единицы. Так как ряд (11.18) также сходится абсолютно в промежутке $0 \leqslant e < \bar{e}$, то его можно умножить по обычным правилам на ряд (11.21′), в результате чего получим ряд, сходящийся абсолютно в промежутке $0 \leqslant e \leqslant \bar{e}$:

$$\frac{\eta}{a}=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \mathrm{H}_k(M), \tag{11.21''}$$

где

$$\mathrm{H}_k(M)=\sum_{s=0}^{k} \alpha_s S_{k-s}(M) \tag{11.21''}$$

также, очевидно, суть некоторые тригонометрические многочлены.

Зная разложения орбитальных координат, получим по формулам (10.39) разложения пространственных координат в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k X_k(M),\\ \frac{y}{a}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k Y_k(M),\\ \frac{z}{a}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k Z_k(M),\end{aligned}\right\} \tag{11.22}$$

коэффициенты которых определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}X_k(M)&=\alpha_\tau \Xi_k(M)+\alpha'_\tau \mathrm{H}_k(M),\\ Y_k(M)&=\beta_\tau \Xi_k(M)+\beta'_\tau \mathrm{H}_k(M),\\ Z_k(M)&=\gamma_\tau \Xi_k(M)+\gamma'_\tau \mathrm{H}_k(M),\end{aligned}\right\} \tag{11.22'}$$

причем из предыдущего ясно, что ряды (11.22) сходятся для всякого значения M, если эксцентриситет e не превышает лапласова предела $\bar{e}$.

4. Выведем теперь разложения для скорости и ее составляющих в эллиптическом движении. Так как абсолютно

сходящийся ряд можно дифференцировать почленно, то из (11.4) и (11.16) мы получим разложение обратной величины радиуса-вектора в виде

$$\frac{a}{r}=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{R}_k(M), \tag{11.23}$$

где

$$\bar{R}_k(M)=E'_k(M), \tag{11.23'}$$

после чего из интеграла живой силы для эллиптического движения найдем разложение квадрата скорости, которое напишем в следующем виде:

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2=\sum_{k=0}^{\infty} e^k V_k^{(2)}(M), \tag{11.24}$$

где, как легко убедиться,

$$V_0^{(2)}(M)=1, \quad V_k^{(2)}(M)=2\bar{R}_k(M) \qquad (k\neq 0). \tag{11.24'}$$

Разложения прямоугольных составляющих скорости проще всего получить дифференцированием соответствующих разложений координат. Поэтому из формул (11.20), (11.21') и (11.22) мы получим следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{\xi}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \Xi'_k(M), \\ \frac{\dot{\eta}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \mathrm{H}'_k(M), \end{aligned}\right\} \tag{11.25}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k X'_k(M), \\ \frac{\dot{y}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k Y'_k(M), \\ \frac{\dot{z}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k Z'_k(M), \end{aligned}\right\} \tag{11.25'}$$

где штрих обозначает, как и в (11.23), производную по средней аномалии M.

Разложение радиальной составляющей скорости легко найти, замечая, что

$$V_r = \dot{r} = na \frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right),$$

откуда с помощью формулы (11.19) получим

$$\frac{V_r}{na} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k R_k'(M). \tag{11.26}$$

Чтобы разложить «поперечную» составляющую скорости V_n, замечаем, что

$$V_n = r\dot{v} = \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r}, \tag{11.26'}$$

откуда с помощью (11.21′) и (11.23) находим

$$\frac{V_n}{na} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k V_k^{(n)}(M), \tag{11.26''}$$

где положено

$$V_k^{(n)}(M) = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s \bar{R}_{k-s}(M). \tag{11.26'''}$$

В заключение выведем разложение истинной аномалии v. Из формулы (11.26′) мы имеем

$$\dot{v} = \frac{V_n}{r} = \frac{a}{r}\cdot\frac{V_n}{a},$$

откуда

$$\frac{dv}{dM} = \frac{a}{r}\cdot\frac{V_n}{na} \tag{11.27}$$

Перемножая абсолютно сходящиеся (при $e < \bar{e}$) ряды (11.23) и (11.26), мы получим также абсолютно сходящийся (при $e < \bar{e}$) ряд

$$\frac{dv}{dM} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{v}_k(M), \tag{11.27'}$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$\bar{v}_k(M) = \sum_{s=0}^{k} \bar{R}_s(M) V_{k-s}^{(n)}(M). \tag{11.27''}$$

Интегрируя почленно ряд (11.27′), что допустимо в силу его абсолютной сходимости при $e < \bar{e}$, и имея в виду, что при $M = 0$ истинная аномалия v также равна нулю, мы получим следующее разложение:

$$v=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \int_0^M \overline{v}_k(M)\,dM, \tag{11.28}$$

которое можно написать более кратко:

$$v=\sum_{k=0}^{\infty} e^k v_k(M), \tag{11.28'}$$

где положено

$$v_k(M)=\int_0^M \overline{v}_k(M)\,dM. \tag{11.28''}$$

Нетрудно убедиться, что $v_0(M)=M$, а поэтому из (11.28) имеем разложение разности $v-M$, называемой в астрономии уравнением центра, в виде

$$v-M=\sum_{k=1}^{\infty} e^k v_k(M), \tag{11.29}$$

откуда, с точностью до квадрата эксцентриситета, имеем

$$v-M=2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+\ \ldots \tag{11.29'}$$

Таким образом, мы получили разложения по степеням эксцентриситета всех важнейших величин теории эллиптического движения и вместе с тем разрешили поставленную в начале главы задачу о представлении координат и составляющих скорости в виде явных функций времени.

Из полученных разложений можно вывести множество других. Напишем, например, разложения для направляющих косинусов радиуса-вектора в эллиптическом движении. Так как

$$\frac{x}{r}=\frac{x}{a}\cdot\frac{a}{r},\qquad \frac{y}{r}=\frac{y}{a}\cdot\frac{a}{r},\qquad \frac{z}{r}=\frac{z}{a}\cdot\frac{a}{r},$$

то, умножая абсолютно сходящиеся (при $e<\overline{e}$) ряды (11.22) на абсолютно сходящийся ряд (11.23), мы получим также абсолютно сходящиеся ряды (при $e<\overline{e}$)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{r}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \overline{X}_k(M),\\
\frac{y}{r}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \overline{Y}_k(M),\\
\frac{z}{r}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \overline{Z}_k(M),
\end{aligned}\right\} \tag{11.30}$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}\bar{X}_k(M) &= \sum_{s=0}^{k} X_s(M)\,\bar{R}_{k-s}(M),\\ \bar{Y}_k(M) &= \sum_{s=0}^{k} Y_s(M)\,\bar{R}_{k-s}(M),\\ \bar{Z}_k(M) &= \sum_{s=0}^{k} Z_s(M)\,\bar{R}_{k-s}(M).\end{aligned}\right\} \qquad (11.30')$$

Умножая ряд (11.23) сам на себя, получим

$$\frac{a^2}{r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{R}_k^{(2)}(M), \qquad (11.31)$$

где

$$\bar{R}_k^{(2)}(M) = \sum_{s=0}^{k} \bar{R}_s(M)\,\bar{R}_{k-s}(M). \qquad (11.31')$$

Наконец, имея в виду, что

$$\cos v = \frac{\xi}{a}\cdot\frac{a}{r}, \qquad \sin v = \frac{\eta}{a}\cdot\frac{a}{r},$$

мы получим, умножая ряды (11.20) и (11.21″) соответственно на ряд (11.23),

$$\left.\begin{aligned}\cos v &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{C}_k(M),\\ \sin v &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{S}_k(M),\end{aligned}\right\} \qquad (11.32)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\bar{C}_k(M) &= \sum_{s=0}^{k} \Xi_s(M)\cdot\bar{R}_{k-s}(M),\\ \bar{S}_k(M) &= \sum_{s=0}^{k} \mathrm{H}_s(M)\cdot\bar{R}_{k-s}(M),\end{aligned}\right\} \qquad (11.32')$$

и так далее.

5. Выведем теперь общие формулы для коэффициентов $E_k(M)$ и $C_k(M)$, из которых получаются в конечном счете коэффициенты всех остальных приведенных здесь разложений.

Для этого отметим прежде всего следующую тригонометрическую формулу *) (ν — целое, положительное число):

$$\sin^{\nu} M = \frac{(-1)^m}{2^{\nu-1}} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s\, \bar{C}_{\nu}^{s} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} [(\nu-2s)M], \qquad (11.33)$$

*) См., например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

где $m = E\left(\frac{\nu}{2}\right)$ есть наибольшее целое число, заключающееся в $\nu/2$, и нужно взять знак косинуса, если ν есть число четное, и знак синуса, если ν — нечетное. Числовые коэффициенты в формуле (11.33) определяются следующим образом:

$$\bar{C}_\nu^s = C_\nu^s,$$
$$\bar{C}_\nu^m = \frac{1}{2} C_\nu^m,$$

если ν четное, а C_ν^s суть обычные биномиальные коэффициенты, т. е.

$$C_\nu^s = \frac{\nu!}{s!\,(\nu - s)!}.$$

Положим в общей формуле (11.38) $\nu = k$ и продифференцируем $k-1$ раз, что дает

$$\frac{d^{k-1}\sin^k M}{dM^{k-1}} =$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^{k-1}} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s C_k^s (k-2s)^{k-1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left[(k-2s) M + (k-1)\frac{\pi}{2}\right],$$

где через m обозначено, как и выше, наибольшее целое число, содержащееся в $k/2$ *).

Производя здесь очевидные упрощения и деля результат на $k!$, мы получим по формуле (11.16″)

$$E_k(M) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{(k-2s)^{k-1}}{s!\,(k-s)!} \sin(k-2s) M. \quad (11.34)$$

Мы уже знаем, что

$$E_0(M) = M,$$

а из формулы (11.16″) имеем

$$E_1(M) = \sin M,$$
$$E_2(M) = \frac{1}{2}\sin 2M.$$

*) Заметим, что единственный член формулы (11.33), содержащий коэффициент $\bar{C}_k^m$ (для k четного), исчезает при первом же дифференцировании, а аргумент синуса или косинуса увеличивается при каждом дифференцировании на $\pi/2$.

Полагая теперь в формуле (11.34) $k=3, 4, 5, 6, 7, 8$, мы получим без труда

$$E_3(M)=\frac{1}{2^2\cdot 3!}(3^2\sin 3M-3\sin M),$$

$$E_4(M)=\frac{1}{2^3\cdot 4!}(4^3\sin 4M-4\cdot 2^3\cdot\sin 2M),$$

$$E_5(M)=\frac{1}{2^4\cdot 5!}(5^4\sin 5M-5\cdot 3^4\cdot\sin 3M+10\sin M),$$

$$E_6(M)=\frac{1}{2^5\cdot 6!}(6^5\sin 6M-6\cdot 4^5\cdot\sin 4M+15\cdot 2^5\cdot\sin 2M),$$

$$E_7(M)=\frac{1}{2^6\cdot 7!}(7^6\sin 7M-7\cdot 5^6\cdot\sin 5M+21\cdot 3^6\cdot\sin 3M-35\sin M),$$

$$E_8(M)=\frac{1}{2^7\cdot 8!}(8^7\sin 8M-8\cdot 6^7\cdot\sin 6M+$$
$$+28\cdot 4^7\cdot\sin 4M-56\cdot 2^7\cdot\sin 2M).$$

Положим теперь в общей формуле (11.33) $\nu=k+1$ и опять продифференцируем $k-1$ раз, что дает $\left(m=E\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$

$$\frac{d^{k-1}\sin^{k+1}M}{dM^{k-1}}=$$
$$=\frac{(-1)^m}{2^k}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s C_{k+1}^s(k+1-2s)^{k-1}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left[(k+1-2s)M+(k-1)\frac{\pi}{2}\right],$$

а из формулы (11.17″) после упрощений получим

$$C_k(M)=\frac{1}{2^k}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{(k+1)(k+1-2s)^{k-1}}{s!\,(k+1-s)!}\cos(k+1-2s)M. \tag{11.34′}$$

Нам уже известны первые коэффициенты $C_k(M)$, а именно:

$$C_0(M)=\cos M,$$

$$C_1(M)=\frac{1}{2}(\cos 2M-1).$$

Полагая еще в формуле (11.34′) $k=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$, мы найдем

$$C_2(M)=\frac{1}{2^2\cdot 2!}(3\cos 3M-3\cos M),$$

$$C_3(M)=\frac{1}{2^3\cdot 3!}(4^2\cos 4M-4\cdot 2^2\cdot\cos 2M),$$

$$C_4(M)=\frac{1}{2^4\cdot 4!}(5^3\cos 5M-5\cdot 3^3\cdot\cos 3M+10\cos M),$$

$$C_5(M)=\frac{1}{2^5\cdot 5!}(6^4\cos 6M-6\cdot 4^4\cdot\cos 4M+60\cdot 2^4\cdot\cos 2M),$$

$$C_6(M)=\frac{1}{2^5\cdot 6!}(7^5\cos 7M-7\cdot 5^5\cdot\cos 5M+ \\ +21\cdot 3^5\cdot\cos 3M-35\cos M),$$

$$C_7(M)=\frac{1}{2^7\cdot 7!}(8^6\cos 8M-8\cdot 6^6\cdot\cos 6M+ \\ +28\cdot 4^6\cdot\cos 4M-56\cdot 2^6\cdot\cos 2M).$$

При помощи приведенных выражений нетрудно получить и коэффициенты всех других нужных нам разложений, формулы для которых выписаны выше.

§ 2. Разложения координат эллиптического движения в ряды Фурье

1. Разложения координат эллиптического движения по возрастающим степеням эксцентриситета орбиты, полученные нами в предыдущем параграфе, сходятся и притом абсолютно для всех действительных значений средней аномалии M, если только $e<\bar{e}=0{,}6627\ldots$

Мы уже указывали, что если эксцентриситет орбиты превышает предел Лапласа, то ряды не будут сходящимися для всех значений M в промежутке от нуля до 360°, а если $e=1$, то ряды вообще расходятся. Таким образом, полученные ряды не могут представлять решение уравнений невозмущенного движения (в случае $h<0$) для всех значений эксцентриситета, заключенных между нулем и единицей. Поэтому, желая получить формулы, дающие решение дифференциальных уравнений невозмущенного эллиптического движения и пригодные для всех значений эксцентриситета в промежутке от нуля до единицы, мы должны вывести какие-то другие ряды, которые были бы сходящимися для всех действительных значений M и для всякого e в промежутке от нуля до единицы.

Такого рода ряды могут быть получены при помощи известной теоремы Дирихле*), дающей необходимые и достаточные

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3.