Полагая еще в формуле (11.34′) $k=2, 3, 4, 5, 6, 7$, мы найдем

$$C_2(M)=\frac{1}{2^2\cdot 2!}(3\cos 3M-3\cos M),$$

$$C_3(M)=\frac{1}{2^3\cdot 3!}(4^2\cos 4M-4\cdot 2^2\cdot\cos 2M),$$

$$C_4(M)=\frac{1}{2^4\cdot 4!}(5^3\cos 5M-5\cdot 3^3\cdot\cos 3M+10\cos M),$$

$$C_5(M)=\frac{1}{2^5\cdot 5!}(6^4\cos 6M-6\cdot 4^4\cdot\cos 4M+60\cdot 2^4\cdot\cos 2M),$$

$$C_6(M)=\frac{1}{2^5\cdot 6!}(7^5\cos 7M-7\cdot 5^5\cdot\cos 5M+ \\ +21\cdot 3^5\cdot\cos 3M-35\cos M),$$

$$C_7(M)=\frac{1}{2^7\cdot 7!}(8^6\cos 8M-8\cdot 6^6\cdot\cos 6M+ \\ +28\cdot 4^6\cdot\cos 4M-56\cdot 2^6\cdot\cos 2M).$$

При помощи приведенных выражений нетрудно получить и коэффициенты всех других нужных нам разложений, формулы для которых выписаны выше.

§ 2. Разложения координат эллиптического движения в ряды Фурье

1. Разложения координат эллиптического движения по возрастающим степеням эксцентриситета орбиты, полученные нами в предыдущем параграфе, сходятся и притом абсолютно для всех действительных значений средней аномалии M, если только $e<\bar{e}=0{,}6627...$

Мы уже указывали, что если эксцентриситет орбиты превышает предел Лапласа, то ряды не будут сходящимися для всех значений M в промежутке от нуля до 360°, а если $e=1$, то ряды вообще расходятся. Таким образом, полученные ряды не могут представлять решение уравнений невозмущенного движения (в случае $h<0$) для всех значений эксцентриситета, заключенных между нулем и единицей. Поэтому, желая получить формулы, дающие решение дифференциальных уравнений невозмущенного эллиптического движения и пригодные для всех значений эксцентриситета в промежутке от нуля до единицы, мы должны вывести какие-то другие ряды, которые были бы сходящимися для всех действительных значений M и для всякого e в промежутке от нуля до единицы.

Такого рода ряды могут быть получены при помощи известной теоремы Дирихле*), дающей необходимые и достаточные

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3.

условия разложимости функции $f(z)$, заданной в промежутке $(0, 2\pi)$ (или в промежутке $(-\pi, +\pi)$), в ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам кратных z.

Ряд Фурье для функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kz+b_k\sin kz), \tag{11.35}$$

коэффициенты которого определяются общими формулами Фурье:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\cos kz\,dz,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\sin kz\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{11.35'}$$

В силу теоремы Дирихле разложение (11.35) единственно и ряд сходится (но не абсолютно!) для всякого значения z в промежутке $(0, 2\pi)$ и представляет в этом промежутке заданную функцию $f(z)$.

Если, кроме того, функция $f(z)$ есть периодическая функция переменной z с периодом 2π, то ряд (11.35) сходится для всякого действительного значения z и представляет функцию $f(z)$ на всей действительной оси.

Полезно заметить еще, что если функция $f(z)$ — четная, т. е. если мы имеем

$$f(-z)=f(z),$$

то формула (11.35) несколько упрощается, так как все коэффициенты b_k в этом случае равны нулю. Таким образом, для четной функции мы имеем следующее разложение:

$$f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kz, \tag{11.36}$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\cos kz\,dz. \tag{11.36'}$$

Если же функция $f(z)$ нечетная, т. е. если мы имеем

$$f(-z)=-f(z),$$

то равны нулю все коэффициенты a_k и разложение принимает вид

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kz, \tag{11.37}$$

где

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\sin kz\,dz. \tag{11.37'}$$

Эти общие формулы мы можем применить теперь для разложения координат эллиптического движения в ряды, сходящиеся для всех значений средней аномалии и при всяком значении e в промежутке от нуля до единицы.

2. Так же как и в предыдущем параграфе, основными разложениями здесь будут разложения самой эксцентрической аномалии E и ее косинуса.

Напишем уравнение Кеплера в виде

$$E-M=e\sin E, \tag{11.38}$$

откуда видно, что разность $E-M$, рассматриваемая как функция от M, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле при любом значении эксцентриситета, заключенном в промежутке $0\leqslant e\leqslant 1$, и есть нечетная периодическая функция от M с периодом 2π.

В самом деле, когда M пробегает все значения от нуля до 2π, E также пробегает все значения от нуля до 2π и, следовательно, $e\sin E$ есть периодическая функция не только от E, но и от M. Кроме того, при изменении знака M, E также меняет знак, а поэтому $E-M$ есть нечетная функция от M.

Поэтому функция $E-M$ может быть представлена рядом Фурье, расположенным только по синусам кратных M, и мы можем написать

$$E-M=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kM, \tag{11.39}$$

причем этот ряд заведомо будет сходящимся (но не абсолютно) для всех значений эксцентриситета, удовлетворяющих условию

$$0\leqslant e\leqslant 1.$$

Займемся определением коэффициентов b_k ряда (11.39). По общей формуле Фурье (11.37′) мы имеем

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(E-M)\sin kM\,dM. \tag{11.40}$$

Интегрирование по M в формуле (11.40) удобно заменить интегрированием по E, для чего достаточно применить один раз формулу интегрирования по частям, что дает

$$\frac{k\pi}{2} b_k = -\Big|_0^\pi (E-M)\cos kM + \int_0^\pi (dE - dM)\cos kM,$$

но $E-M$ равно нулю при $M=0$ и $M=\pi$, и мы имеем

$$\frac{k\pi}{2} b_k = \int_0^\pi \cos kM \cdot dE - \int_0^\pi \cos kM \cdot dM = \int_0^\pi \cos kM \cdot dE,$$

а заменяя здесь M его значением из уравнения Кеплера, мы получим

$$\frac{k\pi}{2} b_k = \int_0^\pi \cos(kE - ke\sin E)\, dE.$$

Полагая еще для сокращения $ke = x$, мы найдем следующую формулу:

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kE - x\sin E)\, dE, \tag{11.40'}$$

которая показывает, что всякий коэффициент b_k есть некоторая функция величины x, которую мы будем рассматривать как вспомогательный параметр.

Введем теперь в рассмотрение следующую функцию от параметра x, считая, что этот параметр может принимать любые значения, как вещественные, так и комплексные:

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(kE - x\sin E)\, dE, \tag{11.41}$$

называемую в математике **функцией Бесселя** k**-го порядка**.

Тогда

$$b_k = \frac{2}{k} I_k(x) = \frac{2}{k} I_k(ke), \tag{11.42}$$

а формула (11.39) может быть написана в следующем виде:

$$E - M = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(ke)}{k}\sin kM. \tag{11.43}$$

Таким образом, решение уравнения Кеплера приводится к вычислению функций Бесселя, основные свойства которых мы рассмотрим несколько ниже.

Рассмотрим теперь разложение в ряд Фурье косинуса эксцентрической аномалии.

Так как $\cos E$ есть, очевидно, периодическая четная функция от средней аномалии M, удовлетворяющая в промежутке $(0, 2\pi)$ условиям Дирихле, то мы можем написать следующее разложение:

$$\cos E = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kM, \tag{11.44}$$

которое заведомо будет сходящимся (также не абсолютно!) при всех действительных значениях M и для всякого значения e в промежутке $(0, 1)$.

Коэффициенты ряда (11.44) в силу общей формулы (11.36′) определятся следующей формулой:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E \cos kM \, dM. \tag{11.45}$$

Рассмотрим сначала коэффициент a_0, т. е. свободный член ряда (11.44). Так как из уравнения Кеплера следует, что

$$dM = (1 - e\cos E)\, dE,$$

то из формулы (11.45) выводим

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E (1 - e\cos E)\, dE = -e.$$

Переходя теперь к случаю, когда $k \neq 0$, применим к интегралу (11.45) формулу интегрирования по частям, что дает

$$a_k = -\frac{2}{\pi k} \Big|_0^{\pi} \cos E \sin kM + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kM \cdot \sin E \, dE =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin (kE - x\sin E) \sin E \, dE,$$

а заменяя здесь произведение синусов полуразностью косинусов, имеем

$$a_k = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos [(k-1)E - x\sin E]\, dE -$$

$$- \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos [(k+1)E - x\sin E]\, dE, \tag{11.45′}$$

что с помощью формулы (11.41) может быть записано еще в виде

$$a_k = \frac{1}{k}\left[I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)\right]. \tag{11.45''}$$

Теперь разложение для $\cos E$ представится в виде

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k} \cos kM. \tag{11.46}$$

Имея разложения (11.43) и (11.46), можно получить уже без всяких вычислений все основные разложения в эллиптическом движении.

Действительно, формула (10.28) дает сразу разложение в ряд Фурье радиуса-вектора эллиптической орбиты в виде

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + e\sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{k+1}(ke) - I_{k-1}(ke)}{k} \cos kM, \tag{11.47}$$

а формулы (10.34) позволяют написать разложения для орбитальных координат

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= \frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k} \cos kM, \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(ke)}{k} \sin kM. \end{aligned}\right\} \tag{11.48}$$

Наконец, формулы (10.39) позволяют составить разложения для пространственных координат. Эти разложения мы напишем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_x^{(k)} \cos kM + B_x^{(k)} \sin kM\right), \\ \frac{y}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_y^{(k)} \cos kM + B_y^{(k)} \sin kM\right), \\ \frac{z}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_z^{(k)} \cos kM + B_z^{(k)} \sin kM\right), \end{aligned}\right\} \tag{11.49}$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} A_x^{(k)} &= \alpha_\tau A_\xi^{(k)}, & B_x^{(k)} &= \alpha'_\tau B_\eta^{(k)}, \\ A_y^{(k)} &= \beta_\tau A_\xi^{(k)}, & B_y^{(k)} &= \beta'_\tau B_\eta^{(k)}, \\ A_z^{(k)} &= \gamma_\tau A_\xi^{(k)}, & B_z^{(k)} &= \gamma'_\tau B_\eta^{(k)}, \end{aligned}\right\} \tag{11.49'}$$

где положено

$$\left.\begin{aligned} A_\xi^{(0)} &= \frac{e}{2}, \quad A_\xi^{(k)} = \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k} \qquad (k \neq 0), \\ B_\eta^{(0)} &= 0, \quad B_\eta^{(k)} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e}\,\frac{I_k(ke)}{k} \qquad (k \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{11.49''}$$

3. Чтобы получить разложения в ряд Фурье скорости и ее проекций, отметим прежде всего, что из формул (11.4), (11.43) мы имеем

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke)\cos kM, \tag{11.50}$$

что дает также разложение квадрата скорости

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = 1 + 4\sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke)\cos kM. \tag{11.51}$$

Проекции скорости на орбитальные и пространственные оси координат найдем непосредственным дифференцированием формул (11.48) и (11.49), так что можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot\xi}{na} &= -\sum_{k=1}^{\infty} kA_\xi^{(k)}\sin kM, \\ \frac{\dot\eta}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} kB_\eta^{(k)}\cos kM, \end{aligned}\right\} \tag{11.51'}$$

и, соответственно

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot x}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(kB_x^{(k)}\cos kM - kA_x^{(k)}\sin kM\right), \\ \frac{\dot y}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(kB_y^{(k)}\cos kM - kA_y^{(k)}\sin kM\right), \\ \frac{\dot z}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(kB_z^{(k)}\cos kM - kA_z^{(k)}\sin kM\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.51''}$$

Так же получаем разложения радиальной и поперечной скоростей V_r и V_n, пользуясь формулами

$$\frac{V_r}{na} = \frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right),$$

$$\frac{V_n}{na} = \sqrt{1-e^2}\,\frac{a}{r},$$

из которых с помощью формул (11.47) и (11.50) находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_r}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} e\,[I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)] \sin kM, \\ \frac{V_n}{na} &= \sqrt{1-e^2}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke)\cos kM\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{11.51'''}$$

Остается получить разложение истинной аномалии v. Для этой цели мы не можем воспользоваться формулой (11.27), как в предыдущем разделе, так как эта формула содержит произведение двух рядов. Однако ряды Фурье, которые мы получили в этом разделе, не являются абсолютно сходящимися и поэтому перемножать их непосредственно мы не имеем права. Следовательно, здесь мы должны применить другой прием. Из формул (11.26') и (11.27) мы имеем

$$\frac{dv}{dM} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}. \tag{11.52}$$

Правая часть последнего равенства есть четная периодическая функция от E, а следовательно, является также четной периодической функцией от M. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, если $e \neq 1$, а поэтому мы можем разложить ее в ряд Фурье по косинусам кратных M.

Это разложение напишем следующим образом:

$$\frac{dv}{dM} = \frac{1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos kM, \tag{11.53}$$

где коэффициенты определяются формулами

$$g_k = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kM\, dM}{(1-e\cos E)^2}, \tag{11.54}$$

или (если принять за переменную интегрирования E вместо средней аномалии M)

$$g_k = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kE - x\sin E)\, dE}{1-e\cos E}. \tag{11.54'}$$

Интегрируя теперь равенство (11.53), мы имеем

$$v = \frac{g_0}{2} M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{k} \sin kM. \tag{11.55}$$

Займемся вычислением коэффициентов g_k. Прежде всего найдем коэффициент g_0. Общая формула (11.54) дает

$$g_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1-e\cos E},$$

откуда, переходя при помощи подстановки (10.20) к переменной интегрирования v вместо E, получим

$$g_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dv = 2,$$

и разложение (11.55) напишется в виде

$$v - M = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k}{k}\sin kM, \tag{11.55'}$$

т. е. мы получили разложение в ряд Фурье уравнения центра $v - M$.

Остальные коэффициенты могут быть выражены через функции Бесселя. Действительно, разлагая функцию $(1 - e\cos E)^{-1}$ в абсолютно сходящийся при $e<1$ ряд

$$(1 - e\cos E)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu}\cos^{\nu} E,$$

мы получим из (11.54′) следующую формулу:

$$g_k = 2\sqrt{1-e^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_k^{(\nu)} e^{\nu}, \tag{11.56}$$

где

$$g_k^{(\nu)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{\nu} E\cdot\cos(kE - x\sin E)\,dE. \tag{11.56'}$$

Но для степени косинуса имеем формулу, совершенно подобную формуле (11.33) для степени синуса $\left(m = E\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)$:

$$\cos^{\nu} E = \frac{1}{2^{\nu-1}}\sum_{s=0}^{m}\overline{C}_{\nu}^{s}\cos(\nu - 2s)E, \tag{11.57}$$

с такими же коэффициентами*), вследствие чего формула (11.56′) напишется следующим образом:

$$g_k^{(\nu)} = \frac{1}{2^{\nu-1}} \sum_{s=0}^{m} \overline{C}_\nu^s \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kE - x\sin E)\cos(\nu - 2s)E\,dE =$$

$$= \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=0}^{m} \overline{C}_\nu^s \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[(k+\nu-2s)E - x\sin E]\,dE + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[(k-\nu+2s)E - x\sin E]\,dE \right\},$$

откуда в силу определения функций Бесселя (11.41) имеем окончательно

$$g_k^{(\nu)} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=0}^{m} \overline{C}_\nu^s \left[J_{k+\nu-2s}(ke) + J_{k-\nu+2s}(ke)\right]. \qquad (11.58)$$

4. Выведем дополнительно еще некоторые полезные разложения теории невозмущенного эллиптического движения.

Рассмотрим функцию $\cos mE$, где m — целое число (положительное). Эта величина является, очевидно, четной периодической функции от средней аномалии M, удовлетворяющей в промежутке $(0, 2\pi)$ условиям Дирихле и разложимой, следовательно, в ряд Фурье, расположенный по косинусам кратных M.

Поэтому мы будем иметь следующее разложение:

$$\cos mE = \frac{1}{2} a_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(m)} \cos kM, \qquad (11.59)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_k^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos mE \cos kM\,dM \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (11.59')$$

Вычислим сначала свободный член этого разложения $\frac{1}{2} a_0^{(m)}$. Полагая в (11.59′) $k = 0$ и делая подстановку

$$dM = (1 - e\cos E)\,dE,$$

*) См. сноску на стр. 541.

мы находим

$$a_0^{(m)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mE\,(1 - e\cos E)\,dE =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mE\,dE - \frac{2e}{\pi}\int_0^\pi \cos mE\cos E\,dE.$$

Если $m > 1$, то каждый из этих интегралов равен нулю и поэтому мы имеем

$$a_0^{(m)} = 0 \qquad (m = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Если $m > 1$, то, как легко видеть,

$$a_0^{(1)} = -e.$$

Найдем теперь остальные коэффициенты. Считая теперь $k \neq 0$ и применяя формулу интегрирования по частям в (11.59′), мы имеем

$$a_k^{(m)} = \frac{2}{\pi}\left|\frac{\sin kM}{k}\cos mE\right|_0^\pi - \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \sin kM\,\frac{d\cos mE}{dM}\,dM =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \sin kM\,\frac{d\cos mE}{dE}\,dE = \frac{2m}{\pi k}\int_0^\pi \sin kM\sin mE\,dE.$$

Заменяя здесь M его значением из уравнения Кеплера и разлагая произведение синусов, мы находим

$$a_k^{(m)} = \frac{2m}{\pi k}\int_0^\pi \sin mE\sin(kE - x\sin E)\,dE =$$

$$= \frac{m}{\pi k}\int_0^\pi \cos[(k-m)E - x\sin E]\,dE -$$

$$- \frac{m}{\pi k}\int_0^\pi \cos[(k+m)E - x\sin E]\,dE,$$

откуда при помощи формулы (11.41) получим окончательное выражение коэффициентов ряда (11.59) для $k > 0$:

$$a_k^{(m)} = \frac{m}{k}\left[I_{k-m}(ke) - I_{k+m}(ke)\right]. \tag{11.59″}$$

Рассматривая теперь функцию $\sin mE$ и замечая, что она является нечетной периодической функцией от средней аномалии M, мы можем написать следующее разложение:

$$\sin mE = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(m)} \sin kM, \tag{11.60}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$b_k^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mE \sin kM\, dM. \tag{11.60'}$$

Производя здесь такое же вычисление, как и выше, мы представим эти коэффициенты формулой

$$b_k^{(m)} = \frac{m}{k} [I_{k-m}(ke) + I_{k+m}(ke)]. \tag{11.60''}$$

Полученные формулы в свою очередь позволяют находить множество других разложений. Ограничимся для примера нахождением разложения квадрата радиуса-вектора в эллиптическом движении.

Так как

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (1 - e\cos E)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\cos E + \frac{e^2}{2}\cos 2E, \tag{11.61}$$

то нужное разложение получится просто заменой в (11.61) $\cos E$ его разложением (11.46) и $\cos 2E$ заменой его разложением, выводимым из (11.59) и (11.59′):

$$\cos 2E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} [I_{k-2}(ke) - I_{k+2}(ke)].$$

В результате указанных подстановок и упрощений найдем

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} I_k(ke) \cos kM. \tag{11.62}$$

§ 3. Основные свойства функций Бесселя

1. Рассмотрим теперь некоторые основные свойства функций Бесселя,-определенных формулой (11.41), которую мы напишем, меняя обозначение независимой переменной, в виде

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt - x\sin t)\, dt. \tag{11.63}$$