Рассматривая теперь функцию $\sin mE$ и замечая, что она является нечетной периодической функцией от средней аномалии M, мы можем написать следующее разложение:

$$\sin mE = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(m)} \sin kM, \tag{11.60}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$b_k^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mE \sin kM \, dM. \tag{11.60'}$$

Производя здесь такое же вычисление, как и выше, мы представим эти коэффициенты формулой

$$b_k^{(m)} = \frac{m}{k} \left[I_{k-m}(ke) + I_{k+m}(ke) \right]. \tag{11.60''}$$

Полученные формулы в свою очередь позволяют находить множество других разложений. Ограничимся для примера нахождением разложения квадрата радиуса-вектора в эллиптическом движении.

Так как

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (1 - e\cos E)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\cos E + \frac{e^2}{2}\cos 2E, \tag{11.61}$$

то нужное разложение получится просто заменой в (11.61) $\cos E$ его разложением (11.46) и $\cos 2E$ заменой его разложением, выводимым из (11.59) и (11.59'):

$$\cos 2E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \left[I_{k-2}(ke) - I_{k+2}(ke) \right].$$

В результате указанных подстановок и упрощений найдем

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} e^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} I_k(ke) \cos kM. \tag{11.62}$$

§ 3. Основные свойства функций Бесселя

1. Рассмотрим теперь некоторые основные свойства функций Бесселя,-определенных формулой (11.41), которую мы напишем, меняя обозначение независимой переменной, в виде

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt - x\sin t) \, dt. \tag{11.63}$$

Из этой общей формулы, где под x будем подразумевать любое вещественное число, имеем прежде всего

$$|I_k(x)| \leqslant 1. \tag{11.63'}$$

Теперь покажем, что величина $I_k(x)$ может рассматриваться как коэффициент разложения некоторой функции по степеням независимой переменной, которую обозначим через z. Напишем для этого формулу (11.63) в таком виде:

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos kt \cos(x \sin t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin kt \sin(x \sin t)\, dt,$$

откуда, полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos kt \cos(x\sin t)\, dt, \\ \beta_k(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kt \sin(x\sin t)\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{11.63''}$$

имеем также

$$I_k(x) = \frac{1}{2}[\alpha_k(x) + \beta_k(x)]. \tag{11.63'''}$$

Введем теперь новую переменную, полагая

$$e^{it} = z = \cos t + i \sin t, \tag{11.64}$$

где e опять обозначает здесь неперово число, т. е. $e = 2{,}7182\ldots$, а $i = \sqrt{-1}$.

Тогда

$$\sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i},$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \cos(x\sin t) &= \cos\left[\frac{x\left(z-\frac{1}{z}\right)}{2i}\right] = \frac{e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} + e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{2}, \\ \sin(x\sin t) &= \sin\left[\frac{x\left(z-\frac{1}{z}\right)}{2i}\right] = \frac{e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} - e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{2i}, \end{aligned}\right\} \tag{11.65}$$

откуда

$$\cos(x\sin t) + i\sin(x\sin t) = e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}. \tag{11.65'}$$

Положим теперь

$$\Phi(z, x) = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}, \tag{11.66}$$

и будем рассматривать z как независимую переменную, а x — как произвольный вещественный параметр.

Функция $\Phi(z, x)$ легко может быть разложена в ряд, расположенный по целым степеням переменной z.

Действительно, мы имеем известные разложения

$$e^{\frac{xz}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!} z^k, \quad e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!} \cdot z^{-k},$$

абсолютно сходящиеся для всех значений z и x.

Перемножая эти два абсолютно сходящихся ряда, мы получим ряд, также абсолютно сходящийся при всех значениях z и x; напишем его в виде ряда, расположенного по степеням z следующим образом:

$$\Phi(z, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x) \cdot z^k. \tag{11.66'}$$

Коэффициенты ряда (11.66′), как нетрудно проверить, определяются следующими формулами:

$$\Phi_{-k}(x) = (-1)^k \Phi_k(x) \tag{11.66''}$$

и

$$\Phi_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(s+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2s}, \tag{11.66'''}$$

причем очевидно, что ряд (11.66‴) сходится абсолютно при всех значениях параметра x.

Теперь легко найти также $\alpha_k(x)$ и $\beta_k(x)$. Из формулы (11.65′), имея в виду (11.66″), находим

$$\cos(x \sin t) + i \sin(x \sin t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Phi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^{-k} \Phi_k(x),$$

но

$$z^k = e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt,$$
$$z^{-k} = e^{-ikt} = \cos kt - i \sin kt,$$

так что получаем

$$\cos(x \sin t) + i \sin(x \sin t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} [1 + (-1)^k]\, \Phi_k(x) \cos kt + i \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (-1)^k]\, \Phi_k(t) \sin kt,$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части, имеем

$$\left.\begin{aligned} \cos(x\sin t) &= \sum_{k=0}^{\infty}[1+(-1)^k]\,\Phi_k(x)\cos kt,\\ \sin(x\sin t) &= \sum_{k=0}^{\infty}[1-(-1)^k]\,\Phi_k(x)\sin kt. \end{aligned}\right\} \tag{11.67}$$

Таким образом, мы получили окольным путем разложения функций $\cos(x\sin t)$ и $\sin(x\sin t)$ в ряды Фурье.

Но, с другой стороны, формулы (11.63″) дают выражения для коэффициентов Фурье этих функций, а так как последние заведомо удовлетворяют условиям Дирихле в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, то выражения (11.63″) должны быть тождественны с коэффициентами рядов (11.67). Поэтому мы имеем

$$\alpha_k(x) = [1+(-1)^k]\,\Phi_k(x),$$
$$\beta_k(x) = [1-(-1)^k]\,\Phi_k(x),$$

откуда

$$\alpha_k(x)+\beta_k(x) = 2\Phi_k(x).$$

Сравнивая этот результат с (11.63‴), получим

$$I_k(x) \equiv \Phi_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2s}}{s!\,(s+k)!}, \tag{11.66‴}$$

т. е. разложение функции Бесселя k-го порядка в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по возрастающим степеням параметра x.

Если формулу (11.66‴) написать в виде

$$I_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!},$$

то станет ясно, что при малом значении x функция Бесселя k-го порядка есть величина k-го порядка относительно параметра x.

Возвращаясь теперь к формулам (11.66) и (11.66′), мы можем, очевидно, написать следующее равенство:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \Phi(z,\,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x)\cdot z^k, \tag{11.68}$$

показывающее, что функции Бесселя являются коэффициентами разложения функции $\Phi(z,\,x)$ в ряд, расположенный по степеням независимой переменной z.

Вследствие этого функция $\Phi(z, x)$, определяемая формулой (11.66), называется **производящей функцией** для функций Бесселя.

2. Полученные формулы позволяют вывести множество различных свойств функций Бесселя. Имея в виду приложения этих функций к теории рядов эллиптического движения, мы ограничимся рассмотрением только некоторых важнейших из этих свойств.

Прежде всего из формулы (11.66‴) непосредственно видно, что

$$I_k(-x) = (-1)^k I_k(x), \tag{11.69}$$

т. е. функция Бесселя четного порядка есть **четная функция** от x, а функция Бесселя нечетного порядка есть **нечетная функция** от x.

Рассмотрим, далее, равенство (11.68), которое является тождеством как относительно z, так и относительно параметра x. Поэтому мы имеем право дифференцировать это равенство по любой из двух величин z и x, в результате чего опять получим тождество.

Дифференцируя равенство (11.68) по переменной z, мы имеем следующее тождество:

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\Phi(z, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kI_k(x)\cdot z^{k-1},$$

из которого, заменяя снова $\Phi(z, x)$ его разложением, найдем

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x)\cdot z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kI_k(z)\cdot z^{k-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при z^{k-1} в левой и правой частях этого тождества, мы получим следующее соотношение:

$$kI_k(x) = \frac{x}{2}\left[I_{k-1}(x) + I_{k+1}(x)\right], \tag{11.70}$$

которое является **рекуррентным соотношением** для функций Бесселя, так как позволяет, зная две из трех последовательных функций Бесселя, найти третью.

В самом деле, равенство (11.70) дает, например,

$$I_{k+1}(x) = \frac{2k}{x} I_k(x) - I_{k-1}(x). \tag{11.70′}$$

Поэтому достаточно знать числовые значения только двух первых функций $I_0(x)$ и $I_1(x)$, после чего найдем последовательно и все остальные, так как из (11.70′) имеем

$$I_2(x) = \frac{2}{x} I_1(x) - I_0(x),$$

$$I_3(x) = \frac{4}{x} I_2(x) - I_1(x),$$

$$I_4(x) = \frac{6}{x} I_3(x) - I_2(x),$$

$$I_5(x) = \frac{8}{x} I_4(x) - I_3(x),$$

. . . .

Формула (11.66‴) дает

$$I_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,s!}$$

и

$$I_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+1)!},$$

откуда можно вычислить значения функций $I_0(x)$ и $I_1(x)$ и составить таблицы, которыми и пользуются непосредственно в практических приложениях.

Такие таблицы с десятью знаками даны Бесселем для значений x в промежутке от $x=0{,}00$ до $x=3{,}20$ с шагом, равным 0,01. Ганзен дал шестизначные таблицы этих функций в промежутке от $x=0{,}0$ до 20,0 с шагом 0,1.

Выведем теперь вторую рекуррентную формулу. Дифференцируя равенство (11.68) по параметру x, получим следующее тождество

$$\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \Phi(z,\ x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I'_k(x) \cdot z^k,$$

исключая из которого функцию $\Phi(z,\ x)$, получим

$$\frac{1}{2}(z^2 - 1) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x) \cdot z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I'_k(x) \cdot z^{k+1},$$

откуда, приравнивая коэффициенты при z^{k+1} в обеих частях равенства, найдем

$$I'_k(x) = \frac{1}{2}\left[I_{k-1}(x) - I_{k+1}(x)\right], \tag{11.71}$$

что позволяет выразить любую производную от функции Бесселя в виде линейной комбинации этих функций.

Например, дифференцируя соотношение (11.71), получим

$$I''_k(x) = \frac{1}{2}\left[I'_{k-1}(x) - I'_{k+1}(x)\right].$$

Но из той же формулы (11.71) имеем

$$I'_{k-1}(x) = \frac{1}{2}\left[I_{k-2}(x) - I_k(x)\right],$$

$$I'_{k+1}(x) = \frac{1}{2}\left[I_k(x) - I_{k+2}(x)\right],$$

а поэтому предыдущее равенство преобразуется к виду

$$I''_k(x) = \frac{1}{4}\left[I_{k-2}(x) - 2I_k(x) + I_{k+2}(x)\right]. \tag{11.72}$$

Также можно получить выражения и для высших производных.

Из полученных соотношений можно вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя.

Действительно, из формулы (11.70) имеем

$$(k-1)\,I_{k-1}(x) = \frac{x}{2}\left[I_{k-2}(x) + I_k(x)\right],$$

$$(k+1)\,I_{k+1}(x) = \frac{x}{2}\left[I_k(x) + I_{k+2}(x)\right],$$

откуда находим

$$k\left[I_{k-1}(x) + I_{k+2}(x)\right] - \left[I_{k-1}(x) - I_{k+1}(x)\right] = \\ = \frac{x}{2}\left[I_{k-2}(x) + 2I_k(x) + I_{k+2}(x)\right].$$

Исключая отсюда все функции, порядок которых не равен k, с помощью равенств (11.70)—(11.72) мы получим следующее равенство, которое также есть тождество:

$$I''_k(x) + \frac{1}{x}\,I'_k(x) + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) I_k(x) \equiv 0. \tag{11.73}$$

Рассмотрим теперь следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) y = 0, \tag{11.73'}$$

где y есть неизвестная функция, x — независимая переменная, а k — числовой параметр.

Тождество (11.73) показывает, что если k есть целое число, то функция Бесселя k-го порядка является решением этого уравнения (частным!), а следовательно, общее решение этого уравнения может быть получено с помощью квадратур.

Уравнение (11.73′) называется в математике уравнением Бесселя. Это уравнение встречается во многих разделах математики и ее приложений, а поэтому функции, которые ему удовлетворяют (как в действительной, так и в комплексной областях), имеют большое значение*).

Рассмотрим теперь два ряда, выводимые из (11.68) с использованием соотношения (11.69):

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = I_0(x) + I_1(x)\cdot z + I_2(x)\cdot z^2 + I_3(x)\cdot z^3 + \ldots$$
$$\ldots - I_1(x)\cdot z^{-1} + I_2(x)\cdot z^{-2} + I_3(x)\cdot z^{-3} + \ldots$$

и

$$e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = I_0(x) - I_1(x)\cdot z + I_2(x)\cdot z^2 - I_3(x)\cdot z^3 + \ldots$$
$$\ldots + I_1(x)\cdot z^{-1} + I_2(x)\cdot z^{-2} + I_3(x)\cdot z^{-3} + \ldots,$$

оба абсолютно сходящиеся при всех значениях z и x.

Перемножая эти два ряда, находим следующее соотношение:

$$1 = I_0^2(x) + 2I_1^2(x) + 2I_2^2(x) + 2I_3^2(x) + \ldots =$$
$$= I_0^2(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2(x). \qquad (11.74)$$

Для действительных значений x все функции $I_k(x)$ имеют действительные значения, а значит, все члены ряда (11.74) суть числа положительные, и мы имеем следующие неравенства:

$$|I_0(x)| \leqslant 1, \quad |I_k(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (11.74')$$

3. Возвращаясь к разложениям координат эллиптического движения, мы видим теперь, что все коэффициенты этих разложений можно представить в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням эксцентриситета орбиты e, абсолютно сходящихся для всякого значения e в промежутке от нуля до единицы.

Действительно, все эти коэффициенты выражаются через функции Бесселя и их первые производные от аргумента $x = ke$, где k — целое число.

---

*) Подробности о теории бесселевых функций можно найти в книге Е. Т. Уиттекера и Г. Н. Ватсона, Курс современного анализа. См. также: И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

Но формула (11.66‴) дает

$$I_k(x) = \left(\frac{ke}{2}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{ke}{2}\right)^k \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1\cdot(k+1)} + \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1\cdot 2\cdot(k+1)(k+2)} - \ldots \right\}. \qquad (11.75)$$

При $0 < e < 1$ эта величина имеет k-й порядок относительно эксцентриситета e.

Далее, дифференцируя ряд (11.66‴) по x и заменяя затем x на ke, мы получим также

$$I_k'(ke) = \frac{1}{2}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k+2s) \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!} =$$

$$= \frac{1}{2(k-1)!}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \left\{ 1 - \frac{(k+2)\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1\cdot k\cdot(k+1)} + \frac{(k+4)\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1\cdot 2\cdot k(k+1)(k+2)} - \ldots \right\}. \qquad (11.75')$$

Эта величина имеет $(k-1)$-й порядок относительно e.

Формулы (11.42) и (11.46), дающие выражения для коэффициентов двух основных разложений эллиптического движения, могут быть написаны теперь в следующем виде:

$$b_k = \frac{2}{k} I_k(ke) = \frac{2}{k}\left(\frac{ke}{2}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!} \qquad (11.76)$$

и (с использованием формулы (11.71))

$$a_k = \frac{1}{k}\left[I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)\right] =$$

$$= \frac{2}{k} I_k'(ke) = \frac{1}{k}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k+2s) \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!}, \qquad (11.77)$$

откуда следует, что коэффициенты b_k и a_k суть величины k-го и $(k-1)$-го порядков относительно эксцентриситета соответственно.

Рассмотрим еще коэффициенты g_k разложения (11.55) для уравнения центра $v - M$. Из формулы (11.58) видно, что величина $g_k^{(\nu)}$ имеет порядок $k - \nu$ относительно эксцентриситета, а следовательно, произведение $g_k^{(\nu)} \cdot e^{\nu}$ есть величина k-го порядка и такого же порядка есть и коэффициент при $\sin kM$ в разложении (11.55).

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Как показано, координаты эллиптического движения могут быть представлены в виде рядов Фурье (т. е. рядов, расположенных по синусам и косинусам целых кратностей средней аномалии M), коэффициенты которых суть ряды с числовыми коэффициентами, расположенные по целым возрастающим степеням эксцентриситета орбиты e.

В то же время в § 1 было показано, что эти координаты могут быть представлены в виде рядов, расположенных по целым возрастающим степеням эксцентриситета, коэффициенты которых суть тригонометрические многочлены относительно синусов и косинусов целых кратностей e.

Имея в виду, что те и другие ряды определяют координаты единственным образом, мы можем, очевидно, преобразовать ряд одного типа в ряд другого типа простой перестановкой членов. Однако ряды, полученные в § 1, сходятся (и притом абсолютно) только для значения эксцентриситета, *не превышающих лапласова предела* $\bar{e}$, а ряды, рассмотренные в § 2, сходятся (но не абсолютно) для *всякого значения эксцентриситета, не превышающего единицы*.

Кажущееся противоречие объясняется замечательными свойствами абсолютно и условно сходящихся рядов.

Действительно, мы знаем, что если бесконечный ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка членов, которые можно, следовательно, как угодно переставлять, и после каждой такой перестановки опять получается ряд, сходящийся абсолютно. Наоборот, если ряд сходится не абсолютно, или условно, то перестановка бесчисленного множества его членов может превратить просто сходящийся ряд в абсолютно сходящийся, или даже в расходящийся. Поэтому, превращая разложение какой-нибудь координаты в ряд, расположенный по степеням эксцентриситета, перестановкой членов в ряд Фурье, мы получим по свойству абсолютно сходящихся рядов ряд, также сходящийся абсолютно для всякого значения M, пока e не превышает предела Лапласа $\bar{e}$.

Превращая ряд Фурье для какой-либо координаты путем перестановки членов в ряд, расположенный по степеням эксцентриситета, мы, вообще говоря, получаем ряд, о сходимости которого без специального исследования ничего сказать нельзя. Но мы уже знаем (вследствие единственности получаемых разложений), что после такой перестановки получается ряд, сходящийся абсолютно, если $0 \leqslant e \leqslant \bar{e}$, но о сходимости которого ничего нельзя сказать, если $\bar{e} \leqslant e < 1$.

Приведенное рассуждение показывает, что все ряды, полученные в § 2, т. е. ряды типа Фурье, являются сходящимися абсолютно для всякого M, если $0 \leqslant e < \bar{e}$, и просто сходящимися (т. е. не абсолютно), если $\bar{e} \leqslant e < 1$.

Поэтому ряды типа Фурье, представляющие величины невозмущенного эллиптического движения, можно без опасения дифференцировать, интегрировать, перемножать, делить, при любом значении средней аномалии M, но только для значений эксцентриситета, не превышающих предела Лапласа $\bar{e}$. Если же $\bar{e} \leqslant e < 1$, то оперировать с рядами типа Фурье следует с большой осторожностью, помня, что действия над ними могут превратить сходящийся ряд в расходящийся.

Примечание. Мы рассмотрели в этой главе только некоторые основные разложения величин эллиптического движения, необходимые для представления общего решения уравнений невозмущенного движения (для случая, когда $h<0$, т. е. когда $0 \leqslant e < 1$) в явном относительно t виде.

Из полученных разложений можно вывести (при помощи алгебраических операций) множество других, которые могут представить интерес для общей теории возмущений.

Точно так же не представляет принципиальных затруднений получить заново разложения и для ряда других величин эллиптического движения. Эти разложения можно найти в более подробных руководствах или в специальных таблицах*).

---

*) См., например, М. Ф. Субботин, Курс небесной механики.