ГЛАВА XII

МЕТОД ЛАГРАНЖА ИЗМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

§ 1. Основы метода Лагранжа

1. Рассмотрим сначала общую задачу о движении материальной точки (планеты или спутника) под действием ньютонианского притяжения некоторого центрального тела, рассматриваемого также как материальная точка, и добавочной возмущающей силы, произвольным образом зависящей от времени, положения движущейся точки и ее скорости.

Обозначим через x, y, z прямоугольные декартовы координаты движущейся точки в системе осей, имеющих неизменные направления и начало в центральном теле. Тогда, как было отмечено в § 1 гл. IX, уравнения движения могут быть написаны в следующем общем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= X_0 + X, \\ \ddot{y} &= Y_0 + Y, \\ \ddot{z} &= Z_0 + Z. \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Здесь X_0, Y_0, Z_0 обозначают проекции ускорения (относительного) движущейся точки P, вызываемого действием центрального тела, а X, Y, Z — проекции возмущающего ускорения, вызываемого действием добавочной возмущающей силы F (рис. 64).

Проекции основного движущего ускорения F_0 определяются известными формулами

$$X_0 = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y_0 = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad Z_0 = -\frac{\mu z}{r^3}, \tag{12.2}$$

где μ есть некоторая постоянная, зависящая от масс обеих точек, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

обозначает, как всегда, радиус-вектор движущейся точки.

Проекции ускорения, вызываемого возмущающей силой F, будем считать известными и заданными функциями от времени t, координат движущейся точки x, y, z и составляющих ее относительной скорости V, т. е. величин $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Функции

$$\left.\begin{aligned} X &= X(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ Y &= Y(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ Z &= Z(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) \end{aligned}\right\} \tag{12.2'}$$

могут быть какими угодно функциями указанных аргументов, лишь бы дифференциальные уравнения движения (12.1) имели, при произвольно заданных начальных условиях

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0, \tag{12.3}$$

единственное непрерывное и дифференцируемое решение, определенное для всех значений времени, заключающихся в некотором промежутке $(t_0 - t_1,\ t_0 + t_2)$, содержащем внутри себя

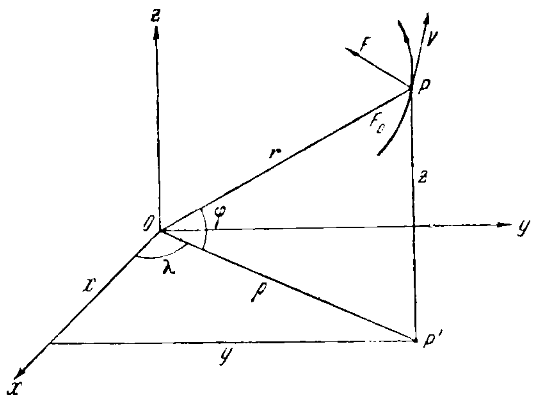

Рис. 64.

начальный момент (начальная эпоха, или, просто, эпоха) t_0; промежуток этот может быть бесконечным в ту или другую сторону (или даже в обе стороны).

Наша задача заключается в интегрировании системы (12.1), т. е. в нахождении общего решения, или общего интеграла, дифференциальных уравнений возмущенного движения. Однако точное интегрирование уравнений (12.1) в громадном большинстве случаев оказывается невозможным и мы вынуждены почти всегда прибегать к методу последовательных приближений и получать какое-то приближенное решение наших уравнений.

Разумеется, можно придумать множество различных способов последовательных приближений, отличающихся друг от друга или употребляемыми переменными, или характером производимых операций.

Мы рассмотрим сначала способ получения приближенного решения, наиболее привычный и удобный для астрономов, опирающийся на общий метод изменения (вариации) произвольных постоянных, основы которого были заложены еще Ньютоном в его знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии» и который был затем детально разработан Лагранжем в ряде замечательных мемуаров и в его «Аналитической механике» *).

В применении к рассматриваемой здесь задаче метод Лагранжа может быть охарактеризован следующим образом. Отбросим в правых частях уравнений (12.1) проекции возмущающего ускорения X, Y, Z. Тогда мы получим новую, упрощенную систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

отличную от системы (12.1), но зато легко интегрируемую.

Действительно, уравнения (12.4) являются уравнениями невозмущенного кеплеровского движения и их интегрирование было выполнено в гл. IX этой книги.

Общее решение системы (12.4) здесь удобнее записать в виде (9.57), т. е. следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\alpha, & \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\alpha e \sin v + \alpha'(1 + e\cos v)], \\ y &= r\beta, & \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\beta e \sin v + \beta'(1 + e\cos v)], \\ z &= r\gamma, & \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\gamma e \sin v + \gamma'(1 + e\cos v)], \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

---

*) И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, см. перев. с латинского акад. А. Н. Крылова. Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, Изд. АН СССР, 1936; Ж. Лагранж, Аналитическая механика, см. перев. с франц., Гостехиздат, 1950. См. также «Историко-библиографический очерк развития небесной механики» в первом издании настоящей книги, Физматгиз, 1963.

где

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{12.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, & \alpha' &= \frac{d\alpha}{du}, \\ \beta &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, & \beta' &= \frac{d\beta}{du}, \\ \gamma &= \sin u \sin i, & \gamma' &= \frac{d\gamma}{du}, \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

аргумент широты u определяется формулой

$$u = v + \omega, \tag{12.8}$$

а истинная аномалия v связана с временем t следующим соотношением:

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^v \frac{dv'}{(1 + e\cos v')^2}. \tag{12.9}$$

Произвольными постоянными в этих формулах являются элементы кеплеровой орбиты

$$\Omega, \quad i, \quad \omega, \quad p, \quad e, \quad \tau, \tag{12.10}$$

однозначно определяемые начальными условиями (12.3).

Если рассматривать как неизвестные величины не только координаты x, y, z, но и их первые производные — составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, то формулы (12.5) представят общее решение системы шести дифференциальных уравнений первого порядка, которая напишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X_0, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= Y_0, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= Z_0. \end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

Это означает, что функции, определенные формулами (12.5), удовлетворяют уравнениям (12.11), *каковы бы ни были числовые значения произвольных постоянных* (12.10). Но если функции (12.5) подставить в уравнения возмущенного движения, которые также удобно записать в виде системы уравнений первого порядка, т. е. в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X_0 + X, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= Y_0 + Y, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= Z_0 + Z, \end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

то последние уравнения, разумеется, не удовлетворятся ни при каких значениях произвольных постоянных.

Однако в том случае, когда возмущающая сила мала по сравнению с основной силой притяжения центрального тела, абсолютные значения величин X, Y, Z останутся малыми, когда в этих выражениях мы заменим координаты и составляющие скорости выражениями (12.5).

Следовательно, в этом случае (т. е. когда возмущающая сила мала) выражения (12.5) почти удовлетворяют уравнениям возмущенного движения, что наводит нас на мысль о таком «незначительном изменении» формул (12.5), после которого уравнения (12.12) будут удовлетворены совершенно строго.

«Незначительно изменить» формулы (12.5) мы можем, конечно, разными способами. Например, мы можем добавить к правым частям формул (12.5) малые слагаемые δx, δy, δz, $\delta \dot{x}$, $\delta \dot{y}$, $\delta \dot{z}$, которые можно назвать возмущениями координат и составляющих скорости, и поставить задачу об определении этих малых добавок так, чтобы уравнения (12.12) удовлетворялись строго или, по крайней мере, чтобы эти уравнения удовлетворялись бы лучше, чем формулами (12.5). Можно также попытаться, не изменяя внешнего вида формул (12.5), изменить незначительно произвольные постоянные (12.10), входящие в формулы (12.5).

Но ясно, что если мы придадим произвольным постоянным постоянные малые добавки, то мы просто получим некоторое другое решение тех же уравнений невозмущенного движения (12.11) и не продвинемся ни на шаг на пути нахождения решения уравнений возмущенного движения (12.1) или (12.12). Это другое решение может быть получено из первоначального как результат возмущений начальных условий (12.3), так что возмущения координат для любого t получатся как следствия их начальных возмущений, а не как следствия воздействия постоянно действующей возмущающей силы. Поэтому если мы желаем получить решение уравнений возмущенного движения (12.12) путем некоторого изменения произвольных постоянных (12.10), то должны придавать этим величинам добавки, зависящие от времени, т. е. должны рассматривать элементы орбиты (постоянные в невозмущенном движении) как величины переменные, т. е. как некоторые функции времени.

2. Основная идея метода Лагранжа изменения (или вариации) произвольных постоянных заключается в следующем:

Решение уравнений возмущенного движения определяется теми же формулами (12.5), что и решение уравнений невозмущенного движения, но величины Ω, i, ω, p, e, τ рассматриваются в этих формулах не как постоянные, а как некоторые функции времени, определяемые так, чтобы уравнения возмущенного движения строго удовлетворялись.

Эта основная идея может быть использована не только в случае задачи с малой возмущающей силой, но и в любом другом случае, когда дифференциальные уравнения задачи могут быть приведены к виду (12.1) и независимо от характера возмущающей силы.

В самом деле, с чисто математической точки зрения осуществление идеи Лагранжа сводится просто к преобразованию переменных в уравнениях (12.12), причем формулами преобразования служат известные формулы невозмущенного движения.

Действительно, будем рассматривать формулы невозмущенного движения*) как формулы преобразования, связывающие первоначальные, или старые зависимые переменные, т. е. величины x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, с новыми зависимыми переменными, за которые принимаются элементы кеплеровой орбиты Ω, i, ω, p, e, τ.

Тогда, производя в уравнениях (12.12) подстановку, определяемую формулами (12.5), мы получим для новых неизвестных систему дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= F_1(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{di}{dt} &= F_2(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{d\omega}{dt} &= F_3(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{dp}{dt} &= F_4(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{de}{dt} &= F_5(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{d\tau}{dt} &= F_6(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),
\end{aligned}\right\} \tag{12.13}$$

где правые части будут известными функциями времени и всех элементов орбиты.

Таким образом, метод Лагранжа приводит задачу интегрирования уравнений (12.1) или (12.12) к задаче интегрирования системы уравнений (12.13).

---

*) Здесь имеются в виду как формулы (12.5), так и последующие формулы (12.6) — (12.9), а также любые следствия основных формул.

Допустим, что уравнения (12.13) проинтегрированы так, что получены формулы, выражающие неизвестные величины, определяемые этими уравнениями, в функции времени и шести произвольных постоянных интегрирования C_s $(s=1, 2, \ldots, 6)$.

Эти формулы, представляющие общее решение системы (12.13), могут быть написаны в следующей общей форме:

$$\left.\begin{array}{lll} \Omega=f_1(t \mid C_s), & i=f_2(t \mid C_s), & \omega=f_3(t \mid C_s), \\ p=f_4(t \mid C_s), & e=f_5(t \mid C_s), & \tau=f_6(t \mid C_s). \end{array}\right\} \qquad (12.14)$$

Произвольные постоянные C_s, входящие в общее решение (12.14), могут быть выражены, если угодно, через начальные значения неизвестных функций (элементов орбиты)

$$\Omega_0, \quad i_0, \quad \omega_0, \quad p_0, \quad e_0, \quad \tau_0, \qquad (12.15)$$

представляющих элементы кеплеровой орбиты для начальной эпохи, или начального момента, t_0. Для этого достаточно положить в уравнениях (12.14), которые должны выполняться для всякого момента времени, $t=t_0$ и соответственно заменить неизвестные функции их начальными значениями (12.15). В результате мы получим шесть уравнений, в которых величины C_s можно рассматривать как неизвестные, а величины (12.15) как данные.

Разрешая полученные уравнения относительно произвольных постоянных C_s, мы придем к формулам

$$C_s=\Psi_s(t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0). \qquad (12.16)$$

Подставляя полученные выражения для C_s в общее решение (12.14), мы можем представить последнее в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega=\varphi_1(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ i=\varphi_2(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \omega=\varphi_3(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ p=\varphi_4(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ e=\varphi_5(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \tau=\varphi_6(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0). \end{array}\right\} \qquad (12.14')$$

Если формулы (12.14) или (12.14′) получены, то задача решена, так как подставляя в формулы (12.5) вместо элементов орбиты функции времени, определяемые формулами (12.14) или (12.14′), мы найдем координаты и составляющие скорости движущейся точки в возмущенном движении как функции времени и шести произвольных постоянных C_s или (12.15).

Эти формулы, дающие общее решение уравнений возмущенного движения (12.1), можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t\mid C_s)=\chi_1(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\ y&=y(t\mid C_s)=\chi_2(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\ z&=z(t\mid C_s)=\chi_3(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\ \dot x&=\dot x(t\mid C_s)=\chi_4(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\ \dot y&=\dot y(t\mid C_s)=\chi_5(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\ \dot z&=\dot z(t\mid C_s)=\chi_6(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0).\end{aligned}\right\}\qquad(12.17)$$

Полагая в этих формулах $t=t_0$ и разрешая полученные уравнения относительно C_s или относительно величин (12.15), мы выразим произвольные постоянные через начальные значения, т. е. через величины (12.3). Найденные выражения произвольных постоянных можно затем опять подставить в формулы (12.17), что даст координаты и составляющие скорости в функции времени и начальных значений, т. е. даст общее решение уравнений возмущенного движения в обычном виде.

Полезно заметить, что для нахождения связи между начальными значениями (12.3) и начальными элементами (12.15) вовсе не требуется знать общее решение уравнений возмущенного движения в его окончательной форме (12.17). Действительно, это общее решение дается формулами (12.5), где элементы орбиты суть некоторые функции времени, точные выражения которых могут быть известны только после полного интегрирования системы (12.1).

Но для получения нужных соотношений мы должны положить в формулах (12.5) $t=t_0$, вследствие чего элементы орбиты превращаются в свои начальные значения (12.15), а координаты и составляющие скорости — в свои начальные значения (12.3). Ясно, что те же соотношения мы можем получить непосредственно из формул невозмущенного движения с элементами (12.15), полагая в этих формулах $t=t_0$ и заменяя координаты и составляющие скорости их начальными значениями (12.3). Поэтому, например, начальные элементы (12.15) получаются из заданных начальных условий (12.3) совершенно так же, как это было изложено в § 4 гл. IX.

3. Остановимся теперь на рассмотрении механического, а также геометрического смысла метода Лагранжа изменения произвольных постоянных.

Из сказанного в предыдущем разделе явствует, что по методу Лагранжа и возмущенное и невозмущенное движения определяются одними и теми же формулами (12.5) и для этих двух движений справедливы также все формулы, которые являются следствиями основных формул выводимых в теории невозмущенного движения.

Разница заключается только в том, что входящие в эти формулы элементы Ω, i, ω, p, e и τ (и все другие величины, зависящие от этих элементов) для невозмущенного движения сохраняют свои постоянные значения (12.15), т. е. остаются постоянными, а для возмущенного движения все эти элементы изменяются вместе со временем, т. е. являются величинами переменными.

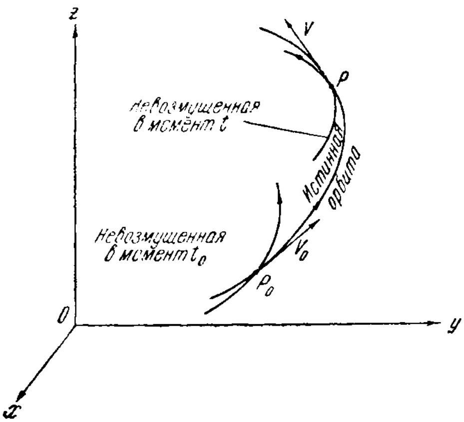

Рис. 65.

В начальный момент времени t_0 координаты и составляющие скорости имеют и в невозмущенном и в возмущенном движениях одни и те же значения (12.3). Поэтому оба движения, невозмущенное и возмущенное, начинаются совершенно одинаково, т. е. начинаются из одной из той же точки пространства P_0 с одной и той же начальной скоростью V_0. При этом, следовательно, обе траектории (т. е. и траектория невозмущенного движения и траектория возмущенного) имеют в начальный момент одну и ту же касательную, т. е. соприкасаются в начальной точке (рис. 65).

Рассмотрим произвольный момент времени, отличный от начального. Этому моменту времени соответствуют определенные числовые значения элементов орбиты, отличные, вообще говоря, от их начальных значений (12.15). Вообразим, что начиная с этого момента t элементы перестали изменяться, или, лучше сказать, представим некоторое невозмущенное движение, которому в момент t соответствуют элементы, найденные по формулам (12.14). Так как, принципиально говоря, текущий момент времени t ничем не отличается от начального момента t_0, то сказанное выше можно повторить почти без изменения. Именно, в момент t можно опять рассмотреть два движения — невозмущенное и возмущенное, траектории которых выходят из одной и той же точки пространства, обладая в этой точке одной и той же касательной, т. е. одной и той же скоростью по величине и направлению (см. рис. 65).

Но ясно, что траектория возмущенного движения одинакова и для начального и для текущего момента, а траектории соответствующего невозмущенного движения, вообще говоря, отличны друг от друга в эти же моменты.

Поэтому, изменяя время t непрерывным образом начиная с начального момента t_0, мы будем иметь бесчисленное множество невозмущенных движений, отличных друг от друга, и единственное возмущенное движение, состояние которого совпадает в каждый момент с состоянием соответствующего невозмущенного движения.

Так как траектория возмущенного движения в каждый момент соприкасается с траекторией соответствующего невозмущенного движения, то можно сказать, что траектория возмущенного движения есть огибающая семейства траекторий невозмущенных движений.

Все эти семейства траекторий, вообще говоря, отличны друг от друга, но они имеют также и нечто общее. Действительно, любая траектория семейства есть какая-то кривая второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат, и движение по которой совершается в согласии с законами Кеплера.

В астрономии соприкасающиеся кривые называются оскулирующими, а поэтому указанные выше траектории семейства невозмущенных движений называются оскулирующими орбитами, а их элементы — оскулирующими элементами.

Таким образом, в методе Лагранжа истинное (возмущенное) движение рассматривается как постоянно и непрерывно изменяющееся кеплеровское движение, а истинная орбита — как постоянно и непрерывно изменяющаяся оскулирующая орбита.

Посмотрим теперь на метод Лагранжа с точки зрения динамики. Представим себе, что в начальный момент времени на точку P, движущуюся под действием силы притяжения центральной массы, подействовала дополнительная мгновенная возмущающая сила, величина которой весьма мала по сравнению с главной силой притяжения к центру.

Эффект действия этой мгновенной силы скажется тогда только на изменении начальных условий, так что начальные координаты и составляющие скорости получат в начальный момент весьма малые приращения (начальные возмущения!). Тогда «возмущенное движение» будет, очевидно, совпадать с некоторым кеплеровским движением, отличающимся от невозмущенного движения только начальными условиями. Поэтому последующие возмущения координат и составляющих скорости будут обусловлены только изменением начальных условий и могут быть рассчитаны так, как это указано в гл. X. Разумеется, и элементы кеплеровской орбиты такого «возмущенного» движения будут отличаться от элементов первоначального, ничем не возмущенного. Мы можем сказать также, что мгновенно действовавшая возмущающая сила сообщила элементам орбиты некоторые возмущения (начальные возмущения элементов), которые также определяются по правилам, выведенным в гл. X.

Представим теперь опять невозмущенное движение, определяемое заданными начальными условиями и протекающее под действием одной только силы притяжения центрального тела-точки. Пусть в некоторый момент времени, отличный от начального, движущаяся материальная точка испытала действие мгновенной малой возмущающей силы. Тогда эффект этой силы будет совершенно аналогичен эффекту действия мгновенной силы в начальный момент. Таким образом, в рассматриваемый момент времени координаты и составляющие скорости получат малые приращения («возмущения»), а следовательно, изменятся также мгновенно и элементы орбиты. В дальнейшем движение точки опять будет происходить в полном согласии с законами Кеплера, по кеплеровской орбите, но с возмущенными элементами.

Подобные рассуждения можно повторять для каждого момента времени. Следовательно, если мы вообразим бесконечный ряд моментов времени, отделенных друг от друга бесконечно малыми промежутками, и будем считать, что в каждый из этих моментов действует мгновенная, возмущающая сила (равная нулю в промежутках между моментами), то мы получим примерную схему возмущенного движения. Истинное или возмущенное движение точки можно будет рассматривать в этой схеме как некоторое кеплеровское движение, элементы которого изменяются скачкообразно в каждый из моментов действия мгновенной возмущающей силы. Притом ясно, что измененное (возмущенное) и неизмененное (невозмущенное) в момент t движения исходят в этот момент из одной и той же точки пространства и их траектории имеют в этой точке общую касательную.

Увеличивая мысленно число таких моментов времени и одновременно уменьшая неограниченно промежутки между ними, мы придем в пределе к движению, которое можно рассматривать как *непрерывно изменяющееся кеплеровское движение* с непрерывно изменяющимися элементами. Отсюда следует, что для определения такого (истинного или возмущенного) движения мы можем пользоваться всеми формулами невозмущенного движения, рассматривая в последних все элементы орбиты (и величины от них зависящие) как некоторые непрерывные функции времени, которые должны быть соответственным образом определены.

Из приведенного рассмотрения вытекает также, что если во время истинного движения в какой-то момент времени внезапно исчезнет возмущающая сила, то начиная с этого момента точка будет двигаться по невозмущенной орбите, в согласии с законами Кеплера. Элементы такой невозмущенной орбиты определятся теми значениями координат и составляющих скорости, которые получили эти величины в момент прекращения действия возмущающей силы.

Выяснив, так сказать, «механизм» возмущенного движения, мы можем перейти теперь к рассмотрению аналитических формул, определяющих это движение, для чего необходимо прежде всего получить дифференциальные уравнения (12.13), которым удовлетворяют постоянно изменяющиеся оскулирующие элементы. Вывод этих уравнений мы рассмотрим в следующем параграфе.

Примечание 1. Мы рассмотрели основы метода Лагранжа для системы (12.1), предполагая, что X_0, Y_0, Z_0 определяются формулами (12.2), т. е. представляют собой проекции ускорения, вызываемого действием притяжения (по закону Ньютона) центрального тела-точки.

Однако метод Лагранжа может быть распространен и на случаи более общие. В самом деле, пусть величины X_0, Y_0, Z_0 — какие-то заданные функции времени, координат и составляющих скорости, но притом такие, что дифференциальные уравнения (12.11) можно проинтегрировать, т. е. можно получить формулы вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \psi_1(t \mid C_s), & y &= \psi_2(t \mid C_s), & z &= \psi_3(t \mid C_s), \\ \dot{x} &= \psi_4(t \mid C_s), & \dot{y} &= \psi_5(t \mid C_s), & \dot{z} &= \psi_6(t \mid C_s), \end{aligned}\right\} \qquad (12.18)$$

где C_s суть произвольные постоянные.

Возвращаясь теперь к истинному движению, определяемому дифференциальными уравнениями (12.12), мы можем определить общее решение этих уравнений опять формулами (12.18), рассматривая в последних величины C_s уже не как постоянные, а как некоторые функции времени. Иными словами, мы можем преобразовать уравнения движения (12.12) к новым переменным C_s, используя как формулы преобразования формулы общего решения уравнений (12.11). Поэтому движение, определяемое уравнениями (12.11), мы также можем назвать *невозмущенным движением* (но не кеплеровским!), уравнения (12.11) — уравнениями невозмущенного движения, а постоянные C_s (или какие-либо их комбинации) — элементами невозмущенного движения.

Нет также никаких принципиальных затруднений для распространения метода Лагранжа и на систему дифференциальных уравнений любого порядка, определяющих движение системы конечного числа материальных точек или материальных тел, находящихся под действием известных заданных сил.

Примечание 2. Метод Лагранжа, принципиальная сторона которого изложена в этом параграфе, рассматривает истинное или возмущенное движение как непрерывно изменяющееся невозмущенное кеплеровское движение. Но мы знаем, что невозмущенное кеплеровское движение может быть эллиптическим или гиперболическим (а в вырожденных случаях — круговым, параболическим и прямолинейным), в зависимости от величины начальной скорости. Поэтому оскулирующая орбита в каждый данный момент времени может быть и эллипсом и гиперболой, в зависимости от величины скорости, которую имеет в данный момент движущаяся точка. Непрерывно изменяясь с течением времени, оскулирующая орбита может некоторое время оставаться эллипсом, а потом превратиться в гиперболу и оставаться некоторое время гиперболой и т. д. Может случиться также (как это обычно бывает в классических астрономических задачах), что движение всегда остается эллиптическим. Тип оскулирующей орбиты в каждый момент времени немедленно распознается по величине оскулирующего эксцентриситета орбиты, в соответствии с чем и применяются формулы эллиптического или гиперболического движения для нахождения координат и составляющих скорости.

§ 2. Вывод дифференциальных уравнений метода Лагранжа

1. В предыдущем параграфе было показано, что возмущенное движение, происходящее под совместным действием притяжения центрального тела-точки и произвольной возмущающей силы, можно рассматривать как такое кеплеровское движение, все элементы которого суть некоторые непрерывные функции времени. Эти неизвестные заранее функции удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений первого порядка, и наша задача заключается теперь в выводе этих уравнений.

Основой для вывода указанных уравнений являются следующие общие соображения. Пусть

$$\Phi(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ \Omega,\ i,\ \ldots,\ \tau)=0 \qquad (12.19)$$

есть какой-нибудь из первых интегралов невозмущенного движения, или соотношение, являющееся следствием этих первых интегралов, где Ω, i, ω, p, e, τ суть элементы орбиты, сохраняющие в невозмущенном движении постоянные значения.

Тогда в силу уравнений (12.11) мы можем написать следующее тождество:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}X_0+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}Y_0+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}Z_0\equiv 0, \quad (12.20)$$