конечного числа материальных точек или материальных тел, находящихся под действием известных заданных сил.

Примечание 2. Метод Лагранжа, принципиальная сторона которого изложена в этом параграфе, рассматривает истинное или возмущенное движение как непрерывно изменяющееся невозмущенное кеплеровское движение. Но мы знаем, что невозмущенное кеплеровское движение может быть эллиптическим или гиперболическим (а в вырожденных случаях — круговым, параболическим и прямолинейным), в зависимости от величины начальной скорости. Поэтому оскулирующая орбита в каждый данный момент времени может быть и эллипсом и гиперболой, в зависимости от величины скорости, которую имеет в данный момент движущаяся точка. Непрерывно изменяясь с течением времени, оскулирующая орбита может некоторое время оставаться эллипсом, а потом превратиться в гиперболу и оставаться некоторое время гиперболой и т. д. Может случиться также (как это обычно бывает в классических астрономических задачах), что движение всегда остается эллиптическим. Тип оскулирующей орбиты в каждый момент времени немедленно распознается по величине оскулирующего эксцентриситета орбиты, в соответствии с чем и применяются формулы эллиптического или гиперболического движения для нахождения координат и составляющих скорости.

§ 2. Вывод дифференциальных уравнений метода Лагранжа

1. В предыдущем параграфе было показано, что возмущенное движение, происходящее под совместным действием притяжения центрального тела-точки и произвольной возмущающей силы, можно рассматривать как такое кеплеровское движение, все элементы которого суть некоторые непрерывные функции времени. Эти неизвестные заранее функции удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений первого порядка, и наша задача заключается теперь в выводе этих уравнений.

Основой для вывода указанных уравнений являются следующие общие соображения. Пусть

$$\Phi(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ \Omega,\ i,\ \ldots,\ \tau)=0 \qquad (12.19)$$

есть какой-нибудь из первых интегралов невозмущенного движения, или соотношение, являющееся следствием этих первых интегралов, где Ω, i, ω, p, e, τ суть элементы орбиты, сохраняющие в невозмущенном движении постоянные значения.

Тогда в силу уравнений (12.11) мы можем написать следующее тождество:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}X_0+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}Y_0+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}Z_0\equiv0, \qquad (12.20)$$

где составляющие основного ускорения определяются формулами (12.2).

По основной идее метода Лагранжа всякая формула невозмущенного движения остается справедливой и для возмущенного движения, но все элементы орбиты (и любые величины, зависящие от элементов, но не содержащие явно время) должны рассматриваться как некоторые функции времени.

При этом условии соотношение вида (12.19) является также интегралом системы (12.12), а поэтому в силу уравнений возмущенного движения мы будем иметь также следующее тождество:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{dt}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt}+$$
$$+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}(X_0+X)+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}(Y_0+Y)+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}(Z_0+Z)\equiv 0. \qquad (12.20')$$

Но во всякий момент времени t координаты и составляющие скорости движущейся точки имеют одинаковые значения и для невозмущенного и для возмущенного движения, а следовательно, в момент t величины

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}},\ \ldots,\ X_0,\ \ldots$$

имеют в равенствах (12.20) и (12.20′) одинаковые числовые значения, вследствие чего мы получаем следующее тождество:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}X+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}Y+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}Z+\frac{\partial\Phi}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{dt}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt}\equiv 0, \qquad (12.21)$$

которое представляет собой соотношение между производными от оскулирующих элементов, самими этими элементами, координатами, составляющими скорости и временем.

Координаты и составляющие скорости можно исключить из полученного соотношения при помощи формул невозмущенного движения (12.5), так что в результате (12.21) будет представлять собой соотношение только между временем, оскулирующими элементами и их первыми производными.

Каждое такое соотношение линейно относительно производных от оскулирующих элементов. Поэтому, найдя достаточное количество формул вида (12.21), мы можем выразить из них все шесть производных

$$\frac{d\Omega}{dt},\ \frac{di}{dt},\ \frac{d\omega}{dt},\ \frac{dp}{dt},\ \frac{de}{dt},\ \frac{d\tau}{dt},$$

в зависимости от времени и самих элементов, что и даст нам систему дифференциальных уравнений вида (12.13).

2. Заметим теперь, что левую часть равенства (12.21) можно рассматривать как некоторую, особым образом вычисленную полную производную от функции Φ.

Действительно, будем дифференцировать функцию Φ в равенстве (12.19), предполагая, что при этом дифференцировании время t и координаты x, y, z рассматриваются как величины постоянные, все элементы орбиты — как функции времени, а производные от составляющих скорости равны соответствующим составляющим возмущающего ускорения.

В результате такого особого дифференцирования мы и получим, как легко видеть, левую часть равенства (12.21).

Будем обозначать полную производную функции Φ, вычисленную таким особым образом, символом $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$, т. е. положим

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}X+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}Y+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}Z+ \\ +\frac{\partial\Phi}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial i}\frac{di}{dt}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt}. \qquad (12.22)$$

Тогда всякое тождество вида (12.21) запишется кратко следующим образом:

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)\equiv 0. \qquad (12.21')$$

Составление всякого равенства вида (12.21) или (12.21′) мы будем называть для краткости основной операцией.

Таким образом, для составления дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять оскулирующие элементы, нужно применить основную операцию к некоторому набору формул невозмущенного движения и разрешить затем полученные уравнения относительно производных от оскулирующих элементов.

В полученных уравнениях нужно затем заменить координаты и составляющие скорости их выражениями из формул невозмущенного движения, после чего мы сможем заняться вопросом об интегрировании полученных уравнений вида (12.13).

Заметим еще следующее: так как всякая комбинация из формул невозмущенного движения также является формулой такого же характера, то можно написать сколько угодно различных формул невозмущенного движения и к каждой такой формуле мы можем применить описанную выше основную операцию. Поэтому мы будем стараться выбирать для применения основной операции такие формулы невозмущенного движения, чтобы выкладки были по возможности проще и короче, чтобы составление уравнений (12.13) не заняло бы слишком много труда и времени. Для этого естественно подбирать такие соотношения из теории невозмущенного движения, которые содержат наименьшее число из тринадцати величин — времени, координат, составляющих скорости и элементов.

Кроме того, для большей простоты и наглядности получающихся формул и уравнений введем в рассмотрение, кроме составляющих возмущающего ускорения X, Y, Z на неподвижные оси координат $Oxyz$, составляющие того же возмущающего ускорения на три подвижные оси, неизменно связанные с движущейся точкой.

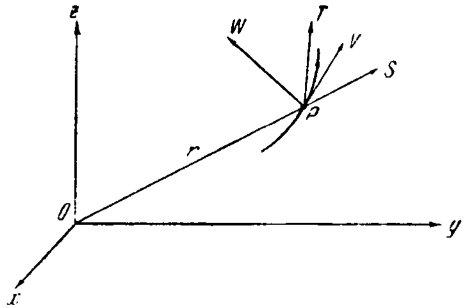

Рис. 66.

Эти подвижные оси выберем следующим образом. Вообразим плоскость, проходящую через текущий радиус-вектор движущейся точки и через вектор скорости, соответствующий этому же моменту времени. Если бы в момент t возмущающая сила прекратила свое действие, то для последующих моментов времени точка продолжала бы двигаться в указанной плоскости по законам Кеплера. В возмущенном движении эта плоскость, разумеется, не остается неизменной, а непрерывно изменяет свое положение в пространстве, являясь плоскостью мгновенной орбиты (или плоскостью оскулирующей орбиты, соответствующей моменту t).

Рассмотрим теперь подвижной триэдр осей с началом в движущейся точке. Одну из осей этого триэдра направим по радиусу-вектору и назовем ее «направлением $\vec{S}$»; другую ось триэдра выберем в плоскости мгновенной орбиты, перпендикулярно к радиусу-вектору так, чтобы ее можно было совместить надлежащим вращением с осью Oy, и назовем ее «направлением $\vec{T}$»; наконец, третью ось подвижного триэдра направим перпендикулярно к плоскости мгновенной орбиты так, чтобы ее можно было совместить надлежащим вращением с осью Oz, и назовем ее «направлением $\vec{W}$» (рис. 66).

Тогда направляющие косинусы этих трех направлений в неподвижной системе координат $Oxyz$ определятся, очевидно, следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\vec{S}x)=\alpha, && \cos(\vec{S}y)=\beta, && \cos(\vec{S}z)=\gamma,\\ &\cos(\vec{T}x)=\alpha', && \cos(\vec{T}y)=\beta', && \cos(\vec{T}z)=\gamma',\\ &\cos(\vec{W}x)=\alpha'', && \cos(\vec{W}y)=\beta'', && \cos(\vec{W}z)=\gamma'', \end{aligned}\right\} \qquad (12.23)$$

где α, β, γ, α', β', γ' нужно взять из формул (12.7), а

$$\left.\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{c_1}{c} = +\sin\Omega\sin i, \\ \beta'' &= \frac{c_2}{c} = -\cos\Omega\sin i, \\ \gamma'' &= \frac{c_3}{c} = +\cos i. \end{aligned}\right\} \qquad (12.23')$$

Обозначим теперь проекции возмущающего ускорения на три только что введенные направления через S, T, W соответственно. Тогда будем иметь следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} S &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ T &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ W &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{aligned}\right\} \qquad (12.24)$$

и

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha S + \alpha' T + \alpha'' W, \\ Y &= \beta S + \beta' T + \beta'' W, \\ Z &= \gamma S + \gamma' T + \gamma'' W. \end{aligned}\right\} \qquad (12.24')$$

Кроме того, для дальнейшего упрощения формул положим

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W, \qquad (12.25)$$

так что $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{W}$ суть величины, пропорциональные проекциям возмущающего ускорения на подвижные оси.

3. Переходим теперь к непосредственному выводу дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять оскулирующие элементы возмущенного движения.

Возьмем вначале интегралы площадей невозмущенного движения

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3. \end{aligned}\right\} \qquad (12.26)$$

Подставляя сюда выражения для постоянных площадей из формул (12.23) и заменяя величину вектора момента скорости c ее значением $\sqrt{\mu p}$, мы напишем интегралы площадей в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin\Omega\sin i &= y\dot{z} - z\dot{y}, \\ \sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos\Omega\sin i &= x\dot{z} - z\dot{x}, \\ \sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.26')$$

Применяя к каждому из соотношений (12.26′) основную операцию, мы получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\sin\Omega\sin i+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{d\Omega}{dt}\cos\Omega\sin i+\\
&\qquad\qquad+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{di}{dt}\sin\Omega\cos i=yZ-zY,\\
&\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\cos\Omega\sin i-\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{d\Omega}{dt}\sin\Omega\sin i+\\
&\qquad\qquad+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{di}{dt}\cos\Omega\cos i=xZ-zX,\\
&\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\cos i-\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{di}{dt}\sin i=xY-yX,
\end{aligned}\right\}\tag{12.27}$$

разрешая которые относительно производных от оскулирующих элементов (параметра, долготы узла и наклонности), мы найдем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}=(yZ-zY)\sin\Omega\sin i+\\
&\qquad\qquad+(xZ-zX)\cos\Omega\sin i+(xY-yX)\cos i,\\
&\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}=(yZ-zY)\cos\Omega-(xZ-zX)\sin\Omega,\\
&\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{di}{dt}=(yZ-zY)\sin\Omega\cos i+\\
&\qquad\qquad+(xZ-zX)\cos\Omega\cos i+(yX-xY)\sin i.
\end{aligned}\right\}\tag{12.27′}$$

Заменяя здесь x, y, z их выражениями из формул (12.5) и (12.7), а величины X, Y, Z их выражениями (12.24′) и имея в виду обозначения (12.25), мы получим после всех упрощений уравнения, определяющие скорости изменения параметра, долготы узла и наклонности

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dt}&=2r\tilde{T},\\
\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}&=\frac{r}{p}\sin u\cdot\tilde{W},\\
\frac{di}{dt}&=\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W}.
\end{aligned}\right\}\tag{12.28}$$

Чтобы определить скорость изменения углового расстояния перицентра от узла, возьмем следующее соотношение:

$$r\cos(v+\omega)=x\cos\Omega+y\sin\Omega,\tag{12.29}$$

являющееся очевидным следствием (12.5), (12.7) и (12.8), и применим к нему основную операцию. Но при этом нужно иметь в виду, что истинная аномалия v не может рассматриваться как величина такого же характера, как прямоугольные координаты или радиус-вектор.

Действительно, формула (9.47′) гл. IX, которая может быть переписана в виде

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} e \sin v = \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r},$$

показывает, что истинная аномалия v зависит не только от x, y, z, рассматриваемых при применении основной операции как величины постоянные, но также от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, производные по которым входят в выражение (12.22). Поэтому, применяя к соотношению (12.29) основную операцию, мы получим результат дифференцирования в следующем виде:

$$-r\sin(v+\omega)\left[\left(\frac{dv}{dt}\right)+\frac{d\omega}{dt}\right] = (-x\sin\Omega + y\cos\Omega)\frac{d\Omega}{dt},$$

где через $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ обозначена производная от v, вычисляемая по формуле (12.22), т. е. производная, взятая по t, входящему только через посредство оскулирующих элементов.

Но формулы (12.5), (12.7) и (12.8) дают

$$-x\sin\Omega + y\cos\Omega = r\sin(v+\omega)\cos i,$$

вследствие чего последнее соотношение примет следующий вид:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) + \frac{d\omega}{dt} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt}, \tag{12.30}$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{dv}{dt}\right) - \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \tag{12.30'}$$

Так как выражение для скорости изменения долготы узла нами уже получено, то из последнего равенства остается еще исключить производную $\left(\frac{dv}{dt}\right)$. Из формул (9.48′) мы имеем

$$\left.\begin{aligned} e\sin v &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}V_r, \\ e\cos v &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}V_n - 1. \end{aligned}\right\} \tag{12.31}$$

Применяя к каждому из этих равенств основную операцию, мы получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \sin v\frac{de}{dt} + e\cos v\left(\frac{dv}{dt}\right) &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\left(\frac{dV_r}{dt}\right) + \frac{V_r}{2p}\frac{dp}{dt}\right], \\ \cos v\frac{de}{dt} - e\sin v\left(\frac{dv}{dt}\right) &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\left(\frac{dV_n}{dt}\right) + \frac{V_n}{2p}\frac{dp}{dt}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12.32}$$

Обозначим вообще через V_L проекцию вектора скорости на некоторое направление $\vec{L}$, определяемое направляющими косинусами α_L, β_L, γ_L (в системе $Oxyz$).

Тогда

$$V_L = \alpha_L \dot{x} + \beta_L \dot{y} + \gamma_L \dot{z},$$

и применяя к этому равенству основную операцию, мы имеем

$$\left(\frac{dV_L}{dt}\right) = (\alpha_L X + \beta_L Y + \gamma_L Z) + \left[\dot{x}\left(\frac{d\alpha_L}{dt}\right) + \dot{y}\left(\frac{d\beta_L}{dt}\right) + \dot{z}\left(\frac{d\gamma_L}{dt}\right)\right],$$

где выражение, стоящее в первой скобке, очевидно, представляет проекцию возмущающего ускорения на ось $\vec{L}$.

Возьмем теперь, в частности, за ось проекций $\vec{L}$ направление $\vec{S}$. Тогда

$$\alpha_L = \alpha = \frac{x}{r}, \quad \beta_L = \beta = \frac{y}{r}, \quad \gamma_L = \gamma = \frac{z}{r},$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{d\alpha_L}{dt}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\beta_L}{dt}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\gamma_L}{dt}\right) = 0.$$

Поэтому

$$\left(\frac{dV_r}{dt}\right) = \alpha X + \beta Y + \gamma Z = S.$$

Далее, возьмем за ось проекций $\vec{L}$ прямую, перпендикулярную к радиусу-вектору в плоскости мгновенной орбиты, т. е. возьмем за $\vec{L}$ направление $\vec{T}$.

Тогда

$$\alpha_L = \alpha', \quad \beta_L = \beta', \quad \gamma_L = \gamma'.$$

Применяя к формулам (9.56′), определяющим направляющие косинусы α', β', γ' направления $\vec{T}$, основную операцию, мы найдем

$$\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right) = -\alpha\left(\frac{du}{dt}\right) - \beta'\,\frac{d\Omega}{dt} + \alpha'' \cos u\,\frac{di}{dt},$$

$$\left(\frac{d\beta'}{dt}\right) = -\beta\left(\frac{du}{dt}\right) + \alpha'\,\frac{d\Omega}{dt} + \beta'' \cos u\,\frac{di}{dt},$$

$$\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right) = -\gamma\left(\frac{du}{dt}\right) + \gamma'' \cos u\,\frac{di}{dt},$$

откуда получаем *)

$$\dot{x}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right) + \dot{y}\left(\frac{d\beta'}{dt}\right) + \dot{z}\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right) = -V_r\left(\frac{du}{dt}\right) + (\alpha'\dot{y} - \beta'\dot{x})\,\frac{d\Omega}{dt}.$$

---

*) Так как α'', β'', γ'' суть направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к плоскости орбиты, а вектор скорости лежит в этой плоскости, то

$$\alpha''\dot{x} + \beta''\dot{y} + \gamma''\dot{z} = 0.$$

Но в силу (9.57) мы имеем

$$\alpha'\dot{y}-\beta'\dot{x}=\frac{c}{p}e(\alpha'\beta-\beta'\alpha)\sin v=-V_r\cos i,$$

а поэтому

$$\dot{x}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)+\dot{y}\left(\frac{d\beta'}{dt}\right)+\dot{z}\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)=-V_r\left[\left(\frac{du}{dt}\right)+\cos i\frac{d\Omega}{dt}\right].$$

Так как

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{dv}{dt}\right)+\frac{d\omega}{dt},$$

то последнее выражение равно нулю в силу соотношения (12.30).

Таким образом, имеем окончательно

$$\left(\frac{dV_n}{dt}\right)=\alpha'X+\beta'Y+\gamma'Z=T.$$

Подставляя теперь выражения для V_r и V_n и их производных $\left(\frac{dV_r}{dt}\right)$ и $\left(\frac{dV_n}{dt}\right)$ в уравнения (12.32), мы получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\sin v\frac{de}{dt}+e\cos v\left(\frac{dv}{dt}\right)&=\tilde{S}+\frac{r}{p}e\sin v\cdot\tilde{T},\\ \cos v\frac{de}{dt}-e\sin v\left(\frac{dv}{dt}\right)&=\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}+\frac{r}{p}e\cos v\cdot\tilde{T}.\end{aligned}\right\}\quad(12.32')$$

Решая полученные уравнения (12.32′) относительно неизвестиых производиых $\frac{de}{dt}$ и $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, мы легко найдем

$$\frac{de}{dt}=\tilde{S}\sin v+\left[\cos v+(\cos v+e)\frac{r}{p}\right]\tilde{T},\qquad(12.33)$$

и

$$e\left(\frac{dv}{dt}\right)=\tilde{S}\cos v-\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v.\qquad(12.34)$$

Равенство (12.33) дает скорость изменения оскулирующего эксцентриситета, а (12.34) позволяет исключить производиую $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ из (12.30), что приводит к следующему уравнению:

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\cos v}{e}\tilde{S}+\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}-\frac{r}{p}\sin u\operatorname{ctg}i\cdot\tilde{W},\qquad(12.35)$$

определяющему скорость изменения углового расстояния перицентра от узла.

4. Остается найти еще уравнение, определяющее скорость изменеиия элемента τ (момента прохождения через перицентр).

Для этого рассмотрим уравнение (12.9), устанавливающее связь между истинной аномалией и временем. Полагая для сокращения

$$I=\int\limits_0^v \frac{dv'}{(1+e\cos v')^2}, \tag{12.36}$$

мы напишем это уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{\mu}\, p^{-3/2}(t-\tau)=I. \tag{12.37}$$

Применяя к уравнению (12.37) основную операцию, мы имеем

$$-\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\, p^{-5/2}(t-\tau)\frac{dp}{dt}-\sqrt{\mu}\, p^{-3/2}\frac{d\tau}{dt}=\left(\frac{dI}{dt}\right),$$

откуда выводим

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{d\tau}{dt}=-\frac{3}{2}I\frac{dp}{dt}-p\left(\frac{dI}{dt}\right). \tag{12.38}$$

Теперь нужно найти производную $\left(\frac{dI}{dt}\right)$. Но I зависит от времени двояким образом — через посредство верхнего предела интеграла v и через посредство e.

Поэтому мы имеем

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)=\frac{\partial I}{\partial e}\frac{de}{dt}+\frac{\partial I}{\partial v}\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Вычисляя частные производные $\frac{\partial I}{\partial e}$ и $\frac{\partial I}{\partial v}$, находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial e}&=-2\int\limits_0^v \frac{\cos v'\,dv'}{(1+e\cos v')^3}=-I_1,\\ \frac{\partial I}{\partial v}&=\frac{1}{(1+e\cos v)^2}=\frac{r^2}{p^2}. \end{aligned}\right\} \tag{12.39}$$

Имея в виду эти выражения, мы напишем уравнение (12.38) в форме

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{d\tau}{dt}=-\frac{3}{2}I\frac{dp}{dt}+pI_1\frac{de}{dt}-p\frac{r^2}{p^2}\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Подставляя сюда вместо производных $\frac{dp}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ и $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ их выражения и полагая еще

$$N=\frac{p^2}{r^2}I_1, \tag{12.40}$$

мы будем иметь

$$\frac{e}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{d\tau}{dt}=(eN\sin v-\cos v)\frac{r^2}{p^2}\tilde{S}+$$
$$+\left\{-3e\frac{p}{r}I+e\left[\cos v+(\cos v+e)\frac{r}{p}\right]N+\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right\}\frac{r^2}{p^2}\tilde{T}. \tag{12.38'}$$

Правую часть последнего равенства можно значительно упростить, используя некоторое тождество, которое сейчас выведем. Для этого рассмотрим производную по v от выражения

$$R=\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v.$$

Мы имеем

$$\frac{dR}{dv}=\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v+e\sin^2 v\left(1+2\frac{r}{p}\right)\frac{r^2}{p^2}.$$

Подставив в правую часть последнего равенства вместо $\sin^2 v$ равную величину $1-\cos^2 v$ и имея в виду тождество

$$e\cos v\left(1+2\frac{r}{p}\right)\frac{r^2}{p^2}\equiv\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)-2\frac{r^3}{p^3},$$

мы получим

$$\frac{dR}{dv}=e\frac{r^2}{p^2}\left(1+2\frac{r}{p}\right)+2\frac{r^3}{p^3}\cos v.$$

Но $\left(\text{так как } e\cos v=\frac{p}{r}-1\right)$

$$1+2\frac{r}{p}\cdot 1=1+2\frac{r}{p}\left(\frac{p}{r}-e\cos v\right)=3-2\frac{r}{p}e\cos v,$$

вследствие чего мы имеем

$$\frac{dR}{dv}=3e\frac{r^2}{p^2}+2(1-e^2)\frac{r^3}{p^3}\cos v.$$

Интегрируя это тождество в пределах от нуля до v, мы находим с помощью формул (12.36) и (12.39)

$$\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v=3eI+(1-e^2)I_1, \tag{12.40'}$$

откуда

$$-3e\frac{p}{r}I=-\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v+(1-e^2)\frac{r}{p}N,$$

и выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части формулы (12.38), приведется, как легко видеть, к $\frac{p}{r}N$.

Таким образом, уравнение (12.38′) примет следующий вид:

$$\frac{e}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{d\tau}{dt}=\left[(eN\sin v-\cos v)\tilde{S}+\frac{p}{r}N\tilde{T}\right]\frac{r^2}{p^2} \qquad (12.41)$$

или (ввиду (12.40))

$$\frac{e}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{d\tau}{dt}=\left(eI_1\sin v-\frac{r^2}{p^2}\cos v\right)\tilde{S}+\frac{p}{r}I_1\tilde{T}. \qquad (12.41')$$

Итак, мы получили все шесть уравнений, определяющих скорости изменения оскулирующих элементов. Эти уравнения пригодны для любого типа невозмущенной орбиты и заменяют собой уравнения (12.1).

5. Выписывая все полученные уравнения вместе, мы будем иметь следующую систему:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt}&=\frac{r}{p}\sin u\operatorname{cosec} i\cdot\tilde{W},\\
\frac{di}{dt}&=\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W},\\
\frac{d\omega}{dt}&=-\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S}+\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}-\frac{r}{p}\sin u\operatorname{ctg} i\cdot\tilde{W},\\
\frac{dp}{dt}&=2r\tilde{T},\\
\frac{de}{dt}&=\tilde{S}\sin v+\left[\cos v+(\cos v+e)\frac{r}{p}\right]\cdot\tilde{T},\\
\frac{d\tau}{dt}&=\frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[(eN\sin v-\cos v)\tilde{S}+\frac{p}{r}N\cdot\tilde{T}\right]\frac{r^2}{p^2},
\end{aligned}\right\} \qquad (12.42)$$

причем полезно напомнить, что в этих уравнениях

$$\tilde{S}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}S,\quad \tilde{T}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}T,\quad \tilde{W}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}W,$$

$$u=v+\omega,\quad \frac{r}{p}=(1+e\cos v)^{-1},$$

величина N определяется формулой

$$N=\frac{p^2}{r^2}I_1=2\frac{p^2}{r^2}\int_0^v\frac{\cos v'\,dv'}{(1+e\cos v')^3}$$

и истинная аномалия связана с временем t уравнением

$$\frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau)=\int_0^v\frac{dv'}{(1+e\cos v')^2}. \qquad (12.42')$$

Величины S, T, W определяются формулами (12.24) и, следовательно, являются, вообще говоря, функциями времени, координат x, y, z, их первых производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и направляющих косинусов, которые в свою очередь зависят от аргумента широты, долготы узла и от наклонности.

Заменяя координаты и составляющие скорости по формулам невозмущенного движения (12.5) их выражениями, мы сделаем правые части уравнений (12.42) известными функциями времени, элементов орбиты и истинной аномалии v, которая в свою очередь зависит от времени, а также от элементов p, e и τ через посредство уравнения (12.42′).

Уравнения (12.42), определяющие изменения оскулирующих элементов Ω, i, ω, p, e, τ при произвольно заданной возмущающей силе, приводятся в том или ином виде во всех классических сочинениях по небесной механике и в большинстве современных курсов.

Мы будем называть эти уравнения *уравнениями Ньютона*. Заметим, что если составляющие возмущающей силы не зависят, как это часто случается, от времени t, то правые части уравнений Ньютона (12.42) будут зависеть от времени только через посредство истинной аномалии v (явным образом!). Поэтому время t можно вовсе исключить из уравнений Ньютона, приняв за независимую переменную величину v.

Связь между дифференциалами новой и старой независимых переменных определится формулой

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{dv}{dt}\right), \tag{12.43}$$

где $\frac{\partial v}{\partial t}$ обозначает производную от v по времени, вычисленную в предположении, что все элементы орбиты суть величины постоянные, а $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ определяется формулой (12.34).

Но при постоянных элементах производная от v по t определяется из интеграла площадей в полярных координатах в плоскости орбиты, так что

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2}, \tag{12.43′}$$

а поэтому мы имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2} + \frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S} - \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}, \tag{12.44}$$

причем правая часть этого равенства не зависит от t, когда возмущающая сила также не зависит от времени.

Исключая из уравнений (12.42) дифференциал dt при помощи (12.44), мы получим уравнения Ньютона в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dv} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W}^*,\\
\frac{di}{dv} &= \frac{r}{p}\cos u \cdot \tilde{W}^*,\\
\frac{d\omega}{dv} &= -\frac{\cos v}{e}\cdot \tilde{S}^* + \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}^* - \frac{r}{p}\sin u \operatorname{ctg} i \cdot \tilde{W}^*,\\
\frac{dp}{dv} &= 2r\tilde{T}^*,\\
\frac{de}{dv} &= \tilde{S}^*\sin v + \left[\cos v + (\cos v + e)\frac{r}{p}\right]\tilde{T}^*,\\
\frac{d\tau}{dv} &= \frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[(eN\sin v - \cos v)\tilde{S}^* + \frac{p}{r}N\tilde{T}^*\right]\frac{r^2}{p^2},
\end{aligned}\right\} \quad (12.45)$$

где

$$\tilde{S}^* = K\tilde{S}, \quad \tilde{T}^* = K\tilde{T}, \quad \tilde{W}^* = K\tilde{W}, \qquad (12.45')$$

и

$$K = \left[\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2} + \frac{\cos v}{e}\tilde{S} - \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\right]^{-1}. \qquad (12.45'')$$

Определив из уравнений (12.45) элементы оскулирующей орбиты в зависимости от переменной v и шести произвольных постоянных, мы найдем затем и время t в зависимости от v из (12.44) простой квадратурой

$$t - t_0 = \int_{v_0}^{v} K\,dv,$$

где v_0 не является произвольной постоянной, так как связано с t_0 формулой, выводимой из (12.37),

$$\sqrt{\mu}\,p_0^{-3/2}(t_0 - \tau_0) = I_0,$$

причем

$$I_0 = \int_0^{v_0} \frac{dv'}{(1 + e_0\cos v')^2}.$$

Уравнения (12.42) или (12.45), являющиеся преобразованием к новым зависимым переменным исходных уравнений (12.1) или (12.12), суть уравнения абсолютно точные, справедливые при любом характере возмущающей силы, и вопрос заключается только в том, как эти уравнения интегрировать. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

Здесь же заметим только, что в случае малой возмущающей силы правые части всех уравнений (12.42) суть величины малые, откуда следует, что оскулирующие элементы изменяются в этом случае весьма медленно. Это обстоятельство делает уравнения (12.42) или (12.45) более удобными для приближенного интегрирования, чем исходные уравнения в прямоугольных координатах (12.1).

§ 3. Частные случаи уравнений Ньютона

Уравнения (12.42), названные нами уравнениями Ньютона, определяющие изменения оскулирующих элементов, имеют силу, как уже было замечено, при любом характере возмущающей силы, а поэтому являются совершенно общими.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, часто встречающиеся в приложениях, в отдельных из которых уравнения (12.42) принимают более простой вид. Одновременно укажем, как в отдельных случаях выявляется действие возмущающей силы на различные элементы оскулирующей орбиты.

Предварительно заметим, что первые два уравнения системы уравнений Ньютона содержат только составляющую W возмущающей силы, перпендикулярную к плоскости оскулирующей орбиты; последние три уравнения системы (12.42), наоборот, не содержат составляющей W; наконец, только одно третье уравнение содержит все три составляющие возмущающей силы (возмущающего ускорения).

Теперь перейдем к рассмотрению частных случаев.

1. Сначала рассмотрим важный случай центральной возмущающей силы, когда линия действия последней всегда совпадает с прямой, проходящей через движущуюся точку и начало координат (главный центр притяжения).

В этом случае проекция S возмущающей силы или равна величине самой этой силы (когда направление последней совпадает с направлением $\vec{S}$, т. е. с направлением прямой, идущей от начала координат к точке P) или равна величине силы, взятой с обратным знаком (когда направление возмущающей силы противоположно направлению $\vec{S}$).

Две другие проекции возмущающей силы в рассматриваемом случае равны нулю, т. е.

$$T = W = 0.$$