или (12.12), суть уравнения абсолютно точные, справедливые при любом характере возмущающей силы, и вопрос заключается только в том, как эти уравнения интегрировать. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

Здесь же заметим только, что в случае малой возмущающей силы правые части всех уравнений (12.42) суть величины малые, откуда следует, что оскулирующие элементы изменяются в этом случае весьма медленно. Это обстоятельство делает уравнения (12.42) или (12.45) более удобными для приближенного интегрирования, чем исходные уравнения в прямоугольных координатах (12.1).

§ 3. Частные случаи уравнений Ньютона

Уравнения (12.42), названные нами уравнениями Ньютона, определяющие изменения оскулирующих элементов, имеют силу, как уже было замечено, при любом характере возмущающей силы, а поэтому являются совершенно общими.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, часто встречающиеся в приложениях, в отдельных из которых уравнения (12.42) принимают более простой вид. Одновременно укажем, как в отдельных случаях выявляется действие возмущающей силы на различные элементы оскулирующей орбиты.

Предварительно заметим, что первые два уравнения системы уравнений Ньютона содержат только составляющую W возмущающей силы, перпендикулярную к плоскости оскулирующей орбиты; последние три уравнения системы (12.42), наоборот, не содержат составляющей W; наконец, только одно третье уравнение содержит все три составляющие возмущающей силы (возмущающего ускорения).

Теперь перейдем к рассмотрению частных случаев.

1. Сначала рассмотрим важный случай центральной возмущающей силы, когда линия действия последней всегда совпадает с прямой, проходящей через движущуюся точку и начало координат (главный центр притяжения).

В этом случае проекция S возмущающей силы или равна величине самой этой силы (когда направление последней совпадает с направлением $\vec{S}$, т. е. с направлением прямой, идущей от начала координат к точке P) или равна величине силы, взятой с обратным знаком (когда направление возмущающей силы противоположно направлению $\vec{S}$).

Две другие проекции возмущающей силы в рассматриваемом случае равны нулю, т. е.

$$T = W = 0.$$

Уравнения Ньютона принимают в этом случае следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt}=0, \quad \frac{di}{dt}=0, \quad \frac{dp}{dt}=0,\\
&\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\cos v}{e}\tilde{S}, \quad \frac{de}{dt}=\tilde{S}\sin v,\\
&\frac{d\tau}{dt}=\frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,(eN\sin v-\cos v)\frac{r^2}{p^2}\tilde{S}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.46)$$

Отсюда сразу же находим

$$\Omega=\Omega_0=\text{const}, \quad i=i_0=\text{const}, \quad p=p_0=\text{const}. \qquad (12.46')$$

Равенства (12.46′) являются, очевидно, первыми интегралами уравнений Ньютона (12.46), которые показывают, что положение плоскости орбиты не изменяется с течением времени и что размеры орбиты (характеризуемые ее параметром) также остаются неизменными.

Но если Ω, i, p остаются постоянными, то проекции момента количества движения (момента скорости), т. е. c_1, c_2, c_3 также остаются постоянными, так что равенства (12.46′) просто суть интегралы площадей, написанные в другой форме, которые, как нам известно (см. § 4 гл. IX), имеют место во всякой задаче о движении материальной точки под действием центральной силы.

Ввиду (12.46′) уравнения (12.46) приводятся в рассматриваемом случае к системе только трех уравнений с тремя неизвестными функциями и напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\omega}{dt}=-\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,\frac{\cos v}{e}\cdot S,\\
&\frac{de}{dt}=+\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,S\sin v,\\
&\frac{d\tau}{dt}=\frac{r^2}{e\mu}(eN\sin v-\cos v)S,
\end{aligned}\right\} \qquad (12.46'')$$

вследствие чего исследование возмущенного движения в этом случае значительно упрощается.

Случай центральной возмущающей силы может встретиться в различных астрономических задачах.

Пусть, например, рассматривается задача о движении материальной точки в экваториальной плоскости тела вращения, поверхности равной плотности которого суть поверхности вращения вокруг оси вращения тела, симметричные относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к общей оси вращения (плоскость экватора тела). Тогда силовая функция притяжения такого тела на точку, находящуюся в плоскости экватора, определится следующей формулой (см. § 4 гл. V):

$$U(r)=\frac{fm}{r}+f\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{2k}}{r^{2k+1}},$$

где m — масса тела и A_{2k} — постоянные коэффициенты, определяемые его структурой.

Сила притяжения, действующая на материальную точку (единичной массы) определится формулой

$$F(r)=\frac{dU(r)}{dt}=-\frac{fm}{r^2}-f\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)A_{2k}}{r^{2k+2}},$$

которую можно написать в следующем виде:

$$F(r)=-\frac{\mu}{r^2}+S(r)=\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right)+\frac{dR(r)}{dr},$$

где положено

$$\mu=fm,\quad S(r)=\frac{dR(r)}{dr}=-f\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)A_{2k}}{r^{2k+2}}.$$

Если начало координат взять в центре симметрии тела, за плоскость xOy принять его экваториальную плоскость и если начальный радиус-вектор и вектор начальной скорости точки лежат в этой экваториальной плоскости, то в силу симметрии точка всегда будет находиться в плоскости экватора тела и ее движение определится уравнениями

$$\ddot{x}=-\frac{\mu x}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial x},\quad \ddot{y}=-\frac{\mu y}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial y}.$$

Применяя метод Лагранжа, мы приведем в этом случае исследование движения точки (в плоскости экватора тела) к интегрированию и исследованию системы (12.46′), или, так как возмущающее ускорение S не зависит от времени, к интегрированию системы

$$\frac{d\omega}{dv}=-\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,\frac{\cos v}{e}\cdot S^*,\quad \frac{de}{dv}=+\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,S^*\sin v,$$

$$\frac{d\tau}{dv}=\frac{r^2}{e\mu}(eN\sin v-\cos v)S^*,$$

где

$$S^*=\left(\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2}+\frac{\cos v}{e}\tilde{S}\right)^{-1}\cdot\tilde{S}.$$

К рассмотренной только что задаче можно привести (в некотором приближении!) исследоваиие движения какого-нибудь из спутников больших планет, движущегося вблизи экваториальной плоскости планеты.

Эта же задача возникает при рассмотрении движения экваториального искусственного спутника Земли (или Луны, Марса, Венеры), движущегося вне земной атмосферы.

Другой интересный случай центральной возмущающей силы представляет задача о движении планеты в предположении, что масса Солнца изменяется с течением времени, или также задача об относительном движении в системе двойной звезды в предположении, что одна или даже обе из двух звезд обладают массами, зависящими от времени.

В самом деле, пусть m_0 и m_1 суть массы Солнца и планеты, или массы двух компонентов звездной пары.

Если одна (или обе) из этих двух масс изменяется с течением времени, то величина $\mu=f(m_0+m_1)$ также будет некоторой функцией времени *).

Допустим, что движение планеты относительно Солнца (или движение одной звезды относительно другой) может быть определено уравнениями

$$\ddot{x}=-\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y}=-\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z}=-\frac{\mu z}{r^3} \tag{12.47}$$

и предположим, что величина μ изменяется таким образом, что ее можно представить в виде суммы

$$\mu=\mu_0+\tilde{\mu}(t),$$

где μ_0 есть некоторая постоянная, а $\tilde{\mu}(t)$ — данная функция времени.

Так как уравнения (12.47) можно рассматривать как уравнения движения материальной точки единичной массы под действием притяжения неподвижного центра, масса которого есть m_0+m_1, то ускорение, которое вызывает притяжение этого неподвижного центра, представится в виде

$$F=-\frac{\mu_0}{r^2}-\frac{\tilde{\mu}(t)}{r^2}. \tag{12.47'}$$

Первая часть этого ускорения представляет эффект притяжения некоторой *постоянной* массы, находящейся в начале координат, а вторая часть может рассматриваться как *возмущающее ускорение*, и так как линия действия

*) Мы придем к той же задаче, считая массы постоянными, но предполагая, что «постоянная» f закона всемирного тяготения иа самом деле не остается постоянной, а изменяется со временем.

последнего всегда совпадает с прямой, соединяющей движущуюся точку с началом координат, то мы имеем здесь пример центральной возмущающей силы, так что

$$T = W = 0, \quad S = -\frac{\tilde{\mu}(t)}{r^2}.$$

Поэтому для изучения движения в этой задаче мы можем пользоваться, наряду с уравнениями (12.47), также уравнениями (12.46″) в оскулирующих элементах. Заметим, что в рассмотренном случае возмущающее ускорение зависит не только от радиуса-вектора движущейся точки, но также и от времени.

В качестве третьего примера центральной возмущающей силы рассмотрим задачу о движении одиночной звезды внутри шарообразного звездного скопления (или шарообразного газового облака) с массивной центральной массой m_0.

Тогда одиночная звезда, рассматриваемая как материальная точка единичной массы, находится под действием притяжения центральной массы m и под действием притяжения материи, заключенной внутри шара, радиус которого равен расстоянию звезды-точки от центра скопления или облака.

Задача о движении звезды приводится поэтому к задаче о движении с центральной возмущающей силой, и возмущающее ускорение определится формулой

$$S = -f\frac{m(r)}{r^2},$$

где $m(r)$ — масса притягивающей материи.

Предполагая, что скопление, или облако, обладает сферическим распределением плотностей, мы определим возмущающую массу следующей формулой:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \delta(r')\,dr',$$

где $\delta(r')$ — плотность материи, образующей облако.

Таким образом, возмущающее ускорение зависит опять только от радиуса-вектора движущейся звезды-точки, и мы опять приходим к задаче о движении с центральной возмущающей силой.

Можно привести еще множество примеров такого же рода, но мы ограничимся уже рассмотренными.

2. Рассмотрим теперь задачу, где возмущающей силой является сила сопротивления некоторой среды. Такова, например, задача о движении звезды-точки внутри скопления с центральной массой, но при условии, что эффектом притяжения материи, составляющей скопление, мы можем пренебречь и сосредоточиваем внимание исключительно на эффекте сопротивления, которое оказывает скопление движущейся внутри него звезде.

Еще более важным случаем задачи этого рода является задача о движении искусственного спутника Земли (или Марса, или Венеры) внутри атмосферы планеты, которая оказывает сопротивление движущемуся объекту, подобное тому, какое испытывает артиллерийский снаряд, пуля или баллистическая ракета при полете в земной атмосфере *).

И та и другая из упомянутых задач (и всякая другая задача такого же рода) могут рассматриваться как задачи о движении материальной точки единичной массы под действием силы притяжения центрального тела-точки и под действием силы сопротивления атмосферы, плотность которой в каждой ее точке есть определенная функция координат этой точки (например, функция высоты точки над поверхностью Земли). Тогда задача опять приводится к рассмотрению и исследованию уравнений движения вида (12.1), где составляющие основного ускорения определяются формулами (12.2), а X, Y, Z суть составляющие ускорения, вызываемого силой сопротивления.

Из теоретической механики (или из внешней баллистики) известно, что сила сопротивления зависит некоторым образом от плотности среды и от скорости движущейся внутри этой среды точки и всегда направлена по касательной к траектории этой точки в сторону, противоположную движению.

Обозначая через R величину ускорения, вызываемого силой сопротивления, мы будем иметь следующие формулы:

$$X = -R\frac{\dot{x}}{V}, \quad Y = -R\frac{\dot{y}}{V}, \quad Z = -R\frac{\dot{z}}{V}. \qquad (12.48)$$

Для определения составляющих возмущающего ускорения на подвижные оси, т. е. на направления $\vec{S}$, $\vec{T}$, $\vec{W}$, воспользуемся общими формулами (12.24), имея в виду (12.48). Тогда

$$S = -\frac{R}{V}(\alpha\dot{x} + \beta\dot{y} + \gamma\dot{z}),$$
$$T = -\frac{R}{V}(\alpha'\dot{x} + \beta'\dot{y} + \gamma'\dot{z}),$$
$$W = -\frac{R}{V}(\alpha''\dot{x} + \beta''\dot{y} + \gamma''\dot{z}).$$

*) При изучении движения искусственного спутника или космического корабля в атмосфере Земли необходимо, вообще говоря, учитывать еще влияние сжатия Земли, т. е. рассматривать Землю как определенное тело, а не как материальную точку. Однако обычно влияние формы Земли и влияние ее атмосферы рассматриваются по отдельности, что оказывается справедливым только в некотором первом приближении. Закон сопротивления атмосферы заимствуют из аэродинамики, принимая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости точки.

Но, как уже было замечено выше*), мы имеем

$$\alpha''\dot{x}+\beta''\dot{y}+\gamma''\dot{z}=0$$

и, следовательно, $W=0$.

Далее, формула (10.7) гл. X дает

$$\alpha\frac{\dot{x}}{V}+\beta\frac{\dot{y}}{V}+\gamma\frac{\dot{z}}{V}=\cos\delta,$$

где δ есть угол, образуемый направлением скорости V движущейся точки с направлением ее радиуса-вектора (рис. 67).

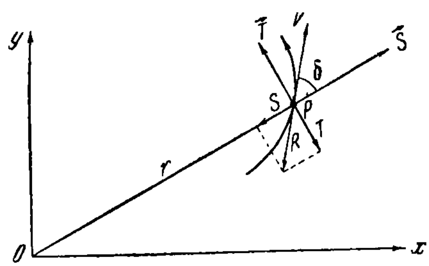

Рис. 67.

Затем, так как α', β', γ' суть направляющие косинусы прямой, лежащей в плоскости мгновенной орбиты и перпендикулярной к радиусу-вектору, то, очевидно,

$$\alpha'\frac{\dot{x}}{V}+\beta'\frac{\dot{y}}{V}+\gamma'\frac{\dot{z}}{V}=\sin\delta.$$

Имея еще в виду выражения для $\cos\delta$ и $\sin\delta$ (см. формулы § 1 гл. X), мы получим для составляющих S и T возмущающего ускорения следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} S&=-R\cos\delta=-R\frac{e\sin v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}},\\ T&=-R\sin\delta=-R\frac{1+e\cos v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}.\end{aligned}\right\}\qquad(12.49)$$

Теперь, обращаясь к уравнениям Ньютона (12.42), мы имеем, прежде всего,

$$\frac{d\Omega}{dt}=0,\quad \frac{di}{dt}=0,$$

т. е., так же как и в случае центральной возмущающей силы,

$$\Omega=\Omega_0=\text{const},\quad i=i_0=\text{const}.\qquad(12.49')$$

Равенства (12.49′) являются, очевидно, интегралами уравнений (12.42) и показывают, что эффект сопротивления атмосферы, в которой движется точка, *не изменяет положения плоскости орбиты*, так что движение происходит в неизменной плоскости, определяемой начальным радиусом-вектором и направлением начальной скорости.

*) См. сноску на стр. 585.

Это свойство движения в сопротивляющейся среде можно вывести также из уравнений (12.1), которые в рассматриваемом случае также должны допускать два первых интеграла, аналогичных интегралам площадей задачи о движении в центральном поле сил.

Действительно, напишем уравнения движения точки, имея в виду формулы (12.48), в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=-\frac{\mu x}{r^3}-R\frac{\dot{x}}{V},\\ \ddot{y}&=-\frac{\mu y}{r^3}-R\frac{\dot{y}}{V},\\ \ddot{z}&=-\frac{\mu z}{r^3}-R\frac{\dot{z}}{V}.\end{aligned}\right\}\tag{12.50}$$

Составляя из этих уравнений такие же комбинации, как и при выводе интегралов площадей в задаче о движении под действием центральной силы, мы легко получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y\dot{z}-z\dot{y})&=-\frac{R}{V}(y\dot{z}-z\dot{y}),\\ \frac{d}{dt}(z\dot{x}-x\dot{z})&=-\frac{R}{V}(z\dot{x}-x\dot{z}),\\ \frac{d}{dt}(x\dot{y}-y\dot{x})&=-\frac{R}{V}(x\dot{y}-y\dot{x}),\end{aligned}\right\}\tag{12.51}$$

исключая из которых величину $-\frac{R}{V}dt$, найдем

$$\frac{d(y\dot{z}-z\dot{y})}{y\dot{z}-z\dot{y}}=\frac{d(z\dot{x}-x\dot{z})}{z\dot{x}-x\dot{z}}=\frac{d(x\dot{y}-y\dot{x})}{x\dot{y}-y\dot{x}}.\tag{12.51$'$}$$

Интегрируя полученные уравнения, найдем следующие два интеграла, заменяющие собой интегралы площадей в задаче с центральной силой:

$$\frac{y\dot{z}-z\dot{y}}{c_1^0}=\frac{z\dot{x}-x\dot{z}}{c_2^0}=\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{c_3^0},\tag{12.52}$$

где c_1^0, c_2^0, c_3^0 суть произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям соотношениями

$$\frac{y_0\dot{z}_0-z_0\dot{y}_0}{c_1^0}=\frac{z_0\dot{x}_0-x_0\dot{z}_0}{c_2^0}=\frac{x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0}{c_3^0},$$

показывающими, что эти постоянные не независимы между собой.

Из уравнений (12.52) находим

$$\left.\begin{aligned} c_1^0 x + c_2^0 y + c_3^0 z = 0, \\ c_1^0 \dot{x} + c_2^0 \dot{y} + c_3^0 \dot{z} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{12.52'}$$

это показывает, что движение точки происходит в неизменной плоскости и что вектор скорости всегда лежит в этой плоскости.

Обозначая, как обычно, через c_1, c_2, c_3 проекции вектора момента скорости на оси координат, мы будем иметь из (12.51) и (12.52)

$$c_1 = c_1^0 \cdot \varphi(t), \quad c_2 = c_2^0 \cdot \varphi(t), \quad c_3 = c_3^0 \cdot \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ есть функция времени, определяемая формулой

$$\varphi(t) = e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{R}{V} dt} \qquad (e = 2{,}7182\ldots).$$

Таким образом, хотя направление вектора момента скорости в силу интегралов (12.52) остается неизменным, но его величина не остается постоянной и есть некоторая функция времени.

Возвращаясь теперь к уравнениям Ньютона (12.42) и имея в виду интегралы (12.49'), мы приведем уравнения, определяющие оскулирующие элементы, к системе только четырех уравнений, которые после замены S и T их выражениями (12.49) и некоторых очевидных упрощений, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -2\frac{R}{V}\cdot\frac{\sin v}{e}, \\ \frac{de}{dt} &= -2\frac{R}{V}(\cos v + e), \\ \frac{dp}{dt} &= -2p\frac{R}{V}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\cdot\frac{R}{V}\left[\frac{1}{e}N(1+2e\cos v+e^2)-\sin v\cos v\right], \end{aligned}\right\} \tag{12.53}$$

где скорость V определяется известной формулой

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\sqrt{1+2e\cos v+e^2}.$$

Из полученных уравнений можно сделать некоторые общие выводы. Рассмотрим сначала второе из уравнений (12.53) и предположим, что начальное значение оскулирующего эксцентриситета $e_0 > 1$. Тогда, по непрерывности, оскулирующий эксцентриситет обязательно будет некоторое время оставаться бо́льшим единицы, и сумма $\cos v+e$ в течение этого же времени будет оставаться величиной положительной. Так как R всегда положительно, то второе из уравнений (12.53) показывает, что пока $e>1$, производная $\frac{de}{dt}$ остается отрицательной, а следовательно, эксцентриситет e есть убывающая функция времени. Поэтому в конце концов эксцентриситет может сделаться меньшим единицы, но дальнейшее его изменение проследить при помощи одного этого уравнения затруднительно, так как множитель $\cos v+e$ при $e<1$ может принимать и положительные и отрицательные значения.

Более ясно поведение оскулирующего параметра. Действительно, третье из уравнений (12.53) сразу показывает, что $\frac{dp}{dt}<0$ всегда (т. е. при любом законе сопротивления), т. е. что параметр есть всегда монотонно убывающая функция времени. Таким образом, каковы бы ни были начальные условия, оскулирующая орбита постоянно как бы сжимается к своей фокальной оси.

Заметим, что если сила сопротивления просто пропорциональна скорости движущейся точки, то третье уравнение легко интегрируется. В самом деле, пусть $R=\varkappa V$, где $\varkappa$ — некоторая постоянная. Тогда

$$\frac{dp}{dt}=-2\varkappa p,$$

откуда находим, опять обозначая буквой e основание натуральных логарифмов, новый первый интеграл системы (12.53)

$$p=p_0e^{-2\varkappa(t-t_0)},$$

и система (12.53) приводится в рассматриваемом частном случае к системе только третьего порядка.

3. Общие уравнения Ньютона (12.42) пригодны, как уже было отмечено выше, для любого типа возмущенного движения.

Однако в большинстве случаев, встречающихся в приложениях как при изучении движений естественных, так и искусственных небесных тел, все время (или по крайней мере длительное время) сохраняется эллиптический тип движения.

В этом случае постоянно выполняется неравенство

$$V^2-\frac{2\mu}{r}<0,$$

и оскулирующий эксцентриситет всегда остается меньшим единицы. Таким образом, оскулирующая орбита постоянно (или длительное время) остается эллипсом, вследствие чего целесообразно вместо общих оскулирующих элементов рассматривать такие, которые лучше характеризуют эллиптическую орбиту и более удобны для вычислений эфемерид. Для этого нужно вместо параметра орбиты взять большую полуось оскулирующего эллипса или среднее движение n и вместо момента прохождения через перицентр — среднюю аномалию эпохи M_0 или среднюю долготу эпохи ε.

Остальные элементы можно сохранить без изменения, но обычно вместо углового расстояния перицентра от узла рассматривают долготу перицентра π.

Итак, будем считать оскулирующую орбиту эллипсом и вместо элементов (12.10) будем рассматривать следующие:

$$\Omega, \quad i, \quad a, \quad e, \quad \pi, \quad \varepsilon. \tag{12.54}$$

Чтобы получить уравнения, определяющие эти эллиптические оскулирующие элементы, нужно в системе (12.42) заменить третье, четвертое и шестое уравнения новыми уравнениями, определяющими скорости изменения большой полуоси a, долготы перицентра π и средней долготы эпохи ε (или средней аномалии эпохи M_0).

Вывести первые два уравнения не представляет никакого труда. Действительно, для эллиптической орбиты

$$p = a(1 - e^2), \tag{12.55}$$

и кроме того, для всякого типа движения,

$$\pi = \Omega + \omega. \tag{12.55'}$$

Дифференцируя эти равенства, считая все элементы величинами переменными, мы имеем

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{a}\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt}$$

и

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt},$$

откуда с помощью уравнений (12.42) найдем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2 e \sin v}{p}\tilde{S} + \frac{2a^2}{r}\tilde{T} \tag{12.56}$$

и

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\cos v}{e}\tilde{S} + \frac{\sin v}{e}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\tilde{T} + \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}. \tag{12.56'}$$

Кроме того, из соотношения

$$n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2} \tag{12.55''}$$

находим еще дополнительно

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3nae \sin v}{p}\tilde{S} - \frac{3na}{r}\tilde{T}. \tag{12.56''}$$

Заметим еще, что уравнение (12.56) можно вывести и непосредственно, применяя основную операцию к интегралу живой силы эллиптического движения, который можно представить в виде

$$\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Применение основной операции к этому соотношению дает следующее уравнение:

$$\frac{\mu}{a^2}\frac{da}{dt} = 2(\dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z).$$

Подставляя сюда вместо $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ их выражения из формул (12.5) и воспользовавшись затем формулами (12.24), мы легко получим из предыдущего соотношения снова уравнение (12.56).

Кроме того, для случая эллиптического движения уравнение, определяющее скорость изменения эксцентриситета, можно несколько упростить. В самом деле, по формулам эллиптического движения мы имеем

$$r\cos v + er = a(\cos E - e) + ae(1 - e\cos E) = p\cos E,$$

так что пятое из уравнений (12.42) можно переписать еще в виде

$$\frac{de}{dt} = \tilde{S}\sin v + (\cos v + \cos E)\cdot\tilde{T}. \tag{12.57}$$

Остается получить уравнение, определяющее скорость изменения средней аномалии эпохи M_0 или средней долготы эпохи ε.

Рассмотрим для этого последнее уравнение из системы (12.42), которое для случая эллиптического движения напишем в несколько ином виде. Для этого заменим N его выражением (12.40), а величину I_1 исключим при помощи тождества (12.40′). Заменяя еще p на $a(1-e^2)$ и имея в виду, что $na^{3/2} = \sqrt{\mu}$, мы получим для скорости изменения величины τ следующее выражение:

$$n\frac{d\tau}{dt} = (1-e^2)^{3/2} I\left\{-\frac{3ae\sin v}{p}\cdot\tilde{S} - \frac{3a}{r}\cdot\tilde{T}\right\} + A\tilde{S} + B\tilde{T}, \tag{12.58}$$

где введены временно для краткости следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{e}\left[\frac{e\sin^2 v}{1-e^2}\cdot\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right) - \frac{r^2}{p^2}\cos v\right],\\ B &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v. \end{aligned}\right\} \tag{12.58′}$$

Величина I, входящая в уравнение (12.58), легко вычисляется. Действительно, делая подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{v'}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

мы найдем

$$I=(1-e^2)^{-3/2}[E-e\sin E]=(1-e^2)^{-3/2}\cdot M.$$

Используя еще уравнение (12.56″), мы перепишем равенство (12.58) в следующем простом виде:

$$n\frac{d\tau}{dt}=\frac{M}{n}\frac{dn}{dt}+A\tilde{S}+B\tilde{T}. \qquad (12.58'')$$

Теперь заметим, что средняя аномалия эпохи M_0 связана с элементом τ следующей простой формулой:

$$M_0=n(t_0-\tau), \qquad (12.59)$$

откуда

$$\frac{dM_0}{dt}=\frac{M_0}{n}\frac{dn}{dt}-n\frac{d\tau}{dt}.$$

Это равенство и уравнение (12.58″) дают

$$\frac{dM_0}{dt}=-\frac{M-M_0}{n}\frac{dn}{dt}-A\tilde{S}-B\tilde{T}, \qquad (12.59')$$

где производная $\frac{dn}{dt}$ определяется формулой (12.56″).

Уравнение (12.59′) и есть искомое уравнение, определяющее скорость изменения элемента M_0 — средней аномалии эпохи.

Выражение для коэффициента A можно несколько упростить при помощи некоторых искусственных и неочевидных преобразований, которые мы здесь частично приведем.

В самом деле, используя формулы эллиптического движения, мы имеем

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}A=e\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r}{p}\sin^2 v-\frac{r}{p}\cdot\frac{r}{a}\cos v=$$
$$=e(1-\cos v\cos E)+\frac{r}{p}[2e-(1+e\cos v)\cos E]=$$
$$=e-\frac{p}{r}\cos E+2e\frac{r}{p},$$

так что в конце концов получим следующее, более простое выражение:

$$A=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(2e\frac{r}{p}-\cos v\right).$$

4. Выведенное в предыдущем разделе уравнение (12.59′) не очень удобно для практического использования, так как в него входит величина

$$\frac{M-M_0}{n}=t-t_0,$$

постоянно растущая вместе с временем. Поэтому даже в случае весьма малой возмущающей силы первое слагаемое в правой части равенства (12.59′) может в конце концов сделаться численно очень большим, что при вычислениях может привести к накоплению ошибок и этим самым к искажению действительной картины движения.

Во избежание этого неудобства обыкновенно вводят вместо элемента M_0 некоторый новый элемент $\overline{M}_0$, полагая

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{dn}{dt}, \tag{12.60}$$

так что вместо уравнения (12.59′) будем иметь новое уравнение,

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt} = -A\tilde{S} - B\tilde{T}. \tag{12.60′}$$

Зная для какого-либо момента времени величину $\overline{M}_0$, мы можем вычислить весьма просто и среднюю аномалию M в возмущенном движении.

Действительно, в невозмущенном движении средняя аномалия определяется формулой

$$M = M_0 + n(t - t_0), \tag{12.61}$$

которая, по смыслу метода Лагранжа, сохраняется также и в возмущенном движении. Дифференцируя в этом предположении формулу (12.61), мы имеем

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{dn}{dt} + n, \tag{12.61′}$$

или, в силу равенства (12.60),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\overline{M}_0}{dt} + n. \tag{12.62}$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от t_0 до t, мы получим

$$M = \overline{M}_0 + \int_{t_0}^{t} n\,dt. \tag{12.62′}$$

Если элементы $\overline{M}_0$ и n определены в зависимости от времени, то формула (12.62′) даст также и M.

Можно условиться, как это обыкновенно и делают на практике, всегда вычислять среднюю аномалию по формуле (12.62′), которая остается также справедливой и для невозмущенного движения.

Действительно, если возмущающая сила отсутствует, то имеем $\tilde{S}=0$, $\tilde{T}=0$, а следовательно, $n=\text{const}$, и $\overline{M}_0=\text{const}$, так что из (12.62′) опять получаем известную формулу $M=\overline{M}_0+$ $+n(t-t_0)$, где $\overline{M}_0$ есть средняя аномалия эпохи. В силу этого величину $\overline{M}_0$ можно просто обозначить буквой M_0, как это часто и делают.

Введем теперь в рассмотрение среднюю долготу в орбите l, для которой, имея в виду формулу (12.62′), получим следующее выражение (также пригодное и в возмущенном и в невозмущенном движении):

$$l = \pi + M = \pi + \overline{M}_0 + \int_{t_0}^{t} n\,dt, \tag{12.63}$$

где π есть долгота перицентра.

Полагая теперь

$$\varepsilon = \pi + \overline{M}_0, \tag{12.63′}$$

мы будем иметь для l следующую формулу:

$$l = \varepsilon + \int_{t_0}^{t} n\,dt, \tag{12.63″}$$

которой обычно и пользуются в приложениях

Беря за шестой элемент вместо средней аномалии эпохи $\overline{M}_0$ среднюю долготу эпохи ε, мы должны заменить шестое уравнение системы (12.45), т. е. уравнение (12.60′), уравнением, определяющим ε. Чтобы получить это уравнение, дифференцируем формулу (12.63′), что дает

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\pi}{dt} + \frac{d\overline{M}_0}{dt}.$$

Подставляя сюда вместо $\frac{d\pi}{dt}$ и $\frac{d\overline{M}_0}{dt}$ их выражения, мы получим, после некоторых упрощений, следующее уравнение:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\cdot\tilde{S} + \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W} + \\ + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v + \left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right]. \tag{12.64}$$

Наконец, заметим, что вместо элемента $\overline{M}_0$ можно принять за новую неизвестную среднюю аномалию M, для определения которой будем иметь в силу равенства (12.62) следующее уравнение:

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\cos v - 2e\frac{r}{p}\right)\tilde{S} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v. \tag{12.64′}$$

Вместо элемента ε можно взять среднюю долготу l, для которой будем иметь следующее уравнение, вытекающее из формулы (12.63′):

$$\frac{dl}{dt}=n-2\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\cdot\tilde{S}+\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}+ \\ +\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right]. \quad (12.64'')$$

Итак, если за неизвестные функции приняты элементы (12.54), то при произвольно заданной возмущающей силе мы будем иметь (для случая, когда выполняется неравенство $V^2<\frac{2\mu}{r}$, т. е. для случая эллиптического движения) следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{cosec}\,i\cdot\tilde{W},\\
&\frac{di}{dt}=\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W},\\
&\frac{da}{dt}=\frac{2ea^2\sin v}{p}\cdot\tilde{S}+\frac{2a^2}{r}\cdot\tilde{T},\\
&\frac{de}{dt}=\tilde{S}\sin v+(\cos v+\cos E)\cdot\tilde{T},\\
&\frac{d\pi}{dt}=-\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S}+\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\cdot\tilde{T}+\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}\cdot\tilde{W},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt}=-2\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\cdot\tilde{S}+\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}+\\
&\qquad+\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right],
\end{aligned}\right\} \quad (12.65)$$

в которой последнее уравнение может быть заменено также уравнением (12.64′) или (12.64″).

Полезно заметить еще, что если возмущающая сила не зависит явно от времени, а зависит только от координат и составляющих скорости, то порядок системы (12.65) можно понизить на одну единицу.

Действительно, в этом случае составляющие возмущающего ускорения также зависят только от координат и составляющих скорости, которые в эллиптическом движении являются функциями средней аномалии M. Поэтому и правые части всех уравнений (12.65) будут вполне определенными функциями средней аномалии M и элементов орбиты Ω, i, a, e, π и, следовательно, за независимую переменную можно принять вместо времени величину M, которая растет одновременно с временем.

Исключая из уравнений (12.65) элемент времени dt, мы получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dM} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W}', \\
\frac{di}{dM} &= \frac{r}{p}\cos u \cdot \tilde{W}', \\
\frac{da}{dt} &= \frac{2ea^2\sin v}{p}\cdot\tilde{S}' + \frac{2a^2}{r}\cdot\tilde{T}', \\
\frac{de}{dM} &= \tilde{S}'\sin v + (\cos v + \cos E)\,\tilde{T}', \\
\frac{d\pi}{dM} &= -\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S}' + \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}' + \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}',
\end{aligned}\right\} \qquad (12.65')$$

где положено для краткости

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{S}' &= \frac{\tilde{S}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}, \\
\tilde{T}' &= \frac{\tilde{T}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}, \\
\tilde{W}' &= \frac{\tilde{W}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.65'')$$

Если система (12.65′) проинтегрирована, то величины Ω, i, a, e, π будут известными функциями средней аномалии M и пяти произвольных постоянных, за которые можно принять начальные значения элементов, соответствующие моменту t_0. Тогда правая часть равенства (12.64′) также будет известной функцией от M и пяти произвольных постоянных, и, интегрируя это уравнение, мы получим

$$t - t_0 = \int\limits_{M_0}^{M} \frac{dM}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}},$$

т. е. выразим время t также в зависимости от средней аномалии M, причем шестой произвольной постоянной будет M_0, которая здесь является начальным значением средней аномалии, соответствующим моменту t_0.

Можно, если угодно, принять за независимую переменную среднюю долготу l, которая определяется уравнением (12.64″), или истинную аномалию v, определяемую формулой (12.44), или, наконец, эксцентрическую аномалию E, определяемую легко выводимым уравнением

$$\frac{dE}{dt}=\frac{a}{r}\sin E\frac{de}{dt}+\frac{a}{r}\frac{dM}{dt},$$

где нужно еще заменить $\frac{de}{dt}$ и $\frac{dM}{dt}$ их выражениями.

5. Отметим некоторые частные случаи уравнений (12.65). Если возмущающая сила есть сила центральная, то, как мы уже видели ранее,

$$\tilde{S}\neq 0,\quad \tilde{T}=0,\quad \tilde{W}=0,$$

так что

$$\Omega=\Omega_0=\text{const},\quad i=i_0=\text{const},$$

и система (12.65) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\frac{2ea^2\sin v}{p}\cdot\tilde{S},\\
\frac{de}{dt}&=\tilde{S}\sin v,\\
\frac{d\pi}{dt}&=-\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S},\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=-\left[2\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}+\frac{e\cos v}{1+\sqrt{1-e^2}}\right]\tilde{S}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.66)$$

Эти уравнения имеют еще один очевидный интеграл, который нетрудно получить. Действительно, исключая из двух первых уравнений величину $\tilde{S}\sin v$, мы найдем

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt}-\frac{2e}{1-e^2}\frac{de}{dt}=0,$$

откуда

$$a(1-e^2)=p_0=\text{const},$$

в согласии с последним интегралом (12.46′).

Если, далее, возмущающая сила такова, что мы имеем всегда

$$\tilde{S}=0,\quad \tilde{T}\neq 0,\quad \tilde{W}=0,$$

то уравнения (12.65) дают опять

$$\Omega=\Omega_0=\text{const},\quad i=i_0=\text{const}.$$

и мы придем к системе четвертого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{r}\tilde{T},\\
\frac{de}{dt} &= (\cos v + \cos E)\tilde{T},\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{e\sin v}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.66')$$

Наконец, если возмущающая сила такова, что мы имеем всегда

$$\tilde{S}=0, \quad \tilde{T}=0, \quad \tilde{W}\neq 0,$$

то уравнения (12.65) дают

$$a=a_0=\text{const}, \quad e=e_0=\text{const}.$$

В этом случае оскулирующая орбита не изменяет своей формы и размеров, но меняется ее положение в пространстве. Система (12.65) приводится в рассматриваемом случае к такому виду:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{cosec} i\cdot\tilde{W},\\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W},\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.66'')$$

Эта система имеет очевидный интеграл

$$\varepsilon-\pi=\bar{M}_0=\text{const},$$

в силу которого средняя аномалия M вычисляется в этом случае совершенно так же, как и в невозмущенном движении.

Примечание. Последние два частных случая не могут встретиться в тех задачах, в которых все действующие силы суть силы «естественные», т. е. силы, действующие в космическом пространстве.

Если же мы рассматриваем движение искусственного объекта не только под действием сил природы, но и при участии дополнительных «искусственных» сил, возникающих вследствие работы двигателей, установленных на борту объекта, то последние два случая действительно могут иметь место.

Для осуществления таких случаев нужно, очевидно, так распорядиться работой двигателей, чтобы дополнительная возмущающая сила всегда сохраняла заданное направление, либо перпендикулярное к радиусу-вектору в плоскости мгновенной орбиты, либо перпендикулярное одновременно и к радиусу-вектору и к скорости, т. е. перпендикулярное к плоскости мгновенной орбиты.

Разумеется, сделанное примечание относится также и к случаю движения любого типа, когда оскулирующая орбита не остается всегда эллипсом, а может превращаться в параболу или в гиперболу.

§ 4. Уравнения Лагранжа

1. Рассмотрим теперь весьма важный для приложений случай, когда прямоугольные составляющие возмущающего ускорения являются частными производными по соответствующим координатам от одной и той же функции координат движущейся точки и времени.

Пусть

$$X=\frac{\partial R}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial R}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial R}{\partial z}, \tag{12.67}$$

где

$$R=R(x,\ y,\ z,\ t) \tag{12.67'}$$

есть заданная функция координат x, y, z и времени t.

Тогда, как показал Лагранж *), дифференциальные уравнения Ньютона, определяющие изменения оскулирующих элементов, можно преобразовать таким образом, чтобы в эти уравнения вместо составляющих S, T, W возмущающего ускорения на подвижные оси входили частные производные от функции R по элементам оскулирующей орбиты.

Функция R называется *возмущающей* или *пертурбационной* функцией.

Преобразование Лагранжа можно провести для общего случая какого угодно возмущенного движения, но мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу и когда уравнения возмущенного движения определяются формулами (12.65).

Пусть буква э обозначает какой-нибудь из элементов эллиптической оскулирующей орбиты. Подставляя в выражение функции R вместо координат их выражения, даваемые формулами невозмущенного эллиптического движения, мы сделаем ее

*) См. Лагранж, Аналитическая механика, т. 2.