Для осуществления таких случаев нужно, очевидно, так распорядиться работой двигателей, чтобы дополнительная возмущающая сила всегда сохраняла заданное направление, либо перпендикулярное к радиусу-вектору в плоскости мгновенной орбиты, либо перпендикулярное одновременно и к радиусу-вектору и к скорости, т. е. перпендикулярное к плоскости мгновенной орбиты.

Разумеется, сделанное примечание относится также и к случаю движения любого типа, когда оскулирующая орбита не остается всегда эллипсом, а может превращаться в параболу или в гиперболу.

§ 4. Уравнения Лагранжа

1. Рассмотрим теперь весьма важный для приложений случай, когда прямоугольные составляющие возмущающего ускорения являются частными производными по соответствующим координатам от одной и той же функции координат движущейся точки и времени.

Пусть

$$X=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial R}{\partial z}, \tag{12.67}$$

где

$$R=R(x, y, z, t) \tag{12.67'}$$

есть заданная функция координат x, y, z и времени t.

Тогда, как показал Лагранж *), дифференциальные уравнения Ньютона, определяющие изменения оскулирующих элементов, можно преобразовать таким образом, чтобы в эти уравнения вместо составляющих S, T, W возмущающего ускорения на подвижные оси входили частные производные от функции R по элементам оскулирующей орбиты.

Функция R называется **возмущающей** или **пертурбационной** функцией.

Преобразование Лагранжа можно провести для общего случая какого угодно возмущенного движения, но мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу и когда уравнения возмущенного движения определяются формулами (12.65).

Пусть буква э обозначает какой-нибудь из элементов эллиптической оскулирующей орбиты. Подставляя в выражение функции R вместо координат их выражения, даваемые формулами невозмущенного эллиптического движения, мы сделаем ее

*) См. Лагранж, Аналитическая механика, т. 2.

функцией от времени и элементов (12.54), а поэтому можем написать

$$\frac{\partial R}{\partial э}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial э}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial э}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial э}, \tag{12.68}$$

откуда в силу формул (12.67) имеем также

$$\frac{\partial R}{\partial э}=X\frac{\partial x}{\partial э}+Y\frac{\partial y}{\partial э}+Z\frac{\partial z}{\partial э}. \tag{12.68$'$}$$

Так как X, Y, Z зависят от составляющих S, T, W возмущающего ускорения по формулам (12.24′), то каждое равенство вида (12.68′) представляет собой соотношение между этими составляющими (а также между величинами $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{W}$) и частными производными от возмущающей функции R по элементам (12.54).

Займемся составлением равенств (12.68), для чего нужно сначала найти выражения для частных производных от координат по элементам (12.54). Эти частные производные легко найти совершенно так же, как мы это делали в разделе 4 § 4 гл. X, где была взята система элементов (10.79′). Однако предпочтительнее получить все нужные формулы непосредственно для системы элементов (12.54).

Возьмем для прямоугольных координат невозмущенного движения формулы (9.52), которые выпишем здесь еще раз:

$$\left.\begin{aligned} x&=r(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i),\\ y&=r(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i),\\ z&=r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{12.69}$$

Эти формулы показывают, что x, y, z зависят от элементов и непосредственно, и через посредство полярных координат — радиуса-вектора r и аргумента широты u.

Выпишем частные производные по элементам от этих полярных координат.

Формулы невозмущенного эллиптического движения дают следующие соотношения:

$$r=a(1-e\cos E) \tag{12.69$'$}$$

и

$$E-e\sin E=M=n(t-t_0)+\varepsilon-\pi. \tag{12.69$''$}$$

Из (12.69′) имеем сразу

$$\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{r}{a}.$$

Далее, дифференцируя (12.69′) и (12.69″) по эксцентриситету e, имеем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos E + ae\sin E\,\frac{\partial E}{\partial e}, \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{a\sin E}{r},$$

откуда после упрощений найдем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos v.$$

Дифференцируя затем формулы (12.69′) и (12.69″) по элементам ε и π, найдем

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = ae\sin E\,\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} = +\frac{a}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial \pi} = ae\sin E\,\frac{\partial E}{\partial \pi}, \quad \frac{\partial E}{\partial \pi} = -\frac{a}{r},$$

откуда с помощью формулы

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

получим

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial \pi} = -\frac{ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Наконец, совершенно ясно, что

$$\frac{\partial r}{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial i} = 0.$$

Перейдем к аргументу широты. Так как

$$u = v + \omega = v + \pi - \Omega,$$

то мы имеем прежде всего

$$\frac{\partial u}{\partial \Omega} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial v}{\partial e}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial u}{\partial \pi} = \frac{\partial v}{\partial \pi} + 1.$$

Дифференцируя по e соотношение

$$r\cos v = a(\cos E - e),$$

имеем

$$\frac{\partial r}{\partial e}\cos v - r\sin v\,\frac{\partial v}{\partial e} = -a\sin E\,\frac{\partial E}{\partial e} - a,$$

откуда с помощью уже полученных выше выражений для $\frac{\partial r}{\partial e}$ и $\frac{\partial E}{\partial e}$ найдем после упрощений

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{a\sin v}{r}\left(1 + \frac{r}{p}\right).$$

Дифференцируя затем соотношение

$$r(1+e\cos v)=a(1-e^2)$$

по ε и π, получим

$$\frac{a(1-e^2)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}-re\sin v\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}=0,$$

$$\frac{a(1-e^2)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\pi}-re\sin v\frac{\partial v}{\partial\pi}=0,$$

откуда, зная уже выражения для $\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}$ и $\frac{\partial r}{\partial\pi}$, найдем

$$\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}=\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial\pi}=-\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial i}=0.$$

Собирая все полученные производные вместе, получим следующую группу формул:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial\Omega}=0, && \frac{\partial u}{\partial\Omega}=-1,\\
&\frac{\partial r}{\partial i}=0, && \frac{\partial u}{\partial i}=0,\\
&\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{r}{a}, && \frac{\partial u}{\partial a}=0,\\
&\frac{\partial r}{\partial e}=-a\cos v, && \frac{\partial u}{\partial e}=\frac{a\sin v}{r}\left(1+\frac{r}{p}\right),\\
&\frac{\partial r}{\partial\pi}=-\frac{ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}, && \frac{\partial u}{\partial\pi}=-\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}+1,\\
&\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}=+\frac{ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}, && \frac{\partial u}{\partial\varepsilon}=+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{12.70}$$

2. Положим теперь в формуле (12.68′) последовательно $э=a,\ e,\ i,\ \Omega,\ \varepsilon,\ \pi$. Так как ввиду (12.70)

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{x}{a},\quad \frac{\partial y}{\partial a}=\frac{y}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial a}=\frac{z}{a},$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{r}{a}(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)=\frac{r}{a}S,$$

откуда, имея в виду, что $na^{3/2}=\sqrt{\mu}$, получим

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{nr}{\sqrt{1-e^2}}\tilde{S}.$$

Далее, из формул (12.69) имеем

$$\frac{\partial x}{\partial e}=\alpha\frac{\partial r}{\partial e}+r\alpha'\frac{\partial u}{\partial e},$$
$$\frac{\partial y}{\partial e}=\beta\frac{\partial r}{\partial e}+r\beta'\frac{\partial u}{\partial e},$$
$$\frac{\partial z}{\partial e}=\gamma\frac{\partial r}{\partial e}+r\gamma'\frac{\partial u}{\partial e},$$

а поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial e}=\frac{\partial r}{\partial e}S+r\frac{\partial u}{\partial e}T,$$

откуда с помощью формул (12.70) найдем

$$\frac{\partial R}{\partial e}=\frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right].$$

Теперь имеем

$$\frac{\partial x}{\partial i}=\alpha''r\sin u,\quad \frac{\partial y}{\partial i}=\beta''r\sin u,\quad \frac{\partial z}{\partial i}=\gamma''r\sin u$$

откуда

$$\frac{\partial R}{\partial i}=r\sin u\cdot W,$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial i}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}r\sin u\cdot\tilde{W}.$$

Далее, дифференцирование формул (12.69) по Ω дает

$$\frac{\partial x}{\partial\Omega}=-r\alpha'-y,\quad \frac{\partial y}{\partial\Omega}=-r\beta'+x,\quad \frac{\partial z}{\partial\Omega}=-r\gamma',$$

вследствие чего получим

$$\frac{\partial R}{\partial\Omega}=-rT+xY-yX.$$

Заменяя здесь выражение $xY-yX$ его значением из третьего равенства (12.27) и исключая затем $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{di}{dt}$ при помощи уравнений (12.28), мы найдем после упрощений

$$\frac{\partial R}{\partial\Omega}=-\frac{2nar}{\sqrt{1-e^2}}\sin^2\frac{i}{2}\cdot\tilde{T}-\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\sin i\cos u\cdot\tilde{W}.$$

Наконец, дифференцируя формулы (12.69) по ε и по π, мы получим

$$\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}\alpha+r\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\alpha',\quad \frac{\partial x}{\partial\pi}=\frac{\partial r}{\partial\pi}\alpha+r\frac{\partial u}{\partial\pi}\alpha',$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}\beta+r\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\beta',\quad \frac{\partial y}{\partial\pi}=\frac{\partial r}{\partial\pi}\beta+r\frac{\partial u}{\partial\pi}\beta',$$
$$\frac{\partial z}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}\gamma+r\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\gamma',\quad \frac{\partial z}{\partial\pi}=\frac{\partial r}{\partial\pi}\gamma+r\frac{\partial u}{\partial\pi}\gamma',$$

вследствие чего найдем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}=\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}S+r\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}T, \quad \frac{\partial R}{\partial \pi}=\frac{\partial r}{\partial \pi}S+r\frac{\partial u}{\partial \pi}T,$$

откуда при помощи формул (12.70) будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}&=+\frac{na^2e\sin v}{1-e^2}\cdot\tilde{S}+\frac{na^3}{r}\cdot\tilde{T},\\ \frac{\partial R}{\partial \pi}&=-\frac{na^2e\sin v}{1-e^2}\cdot\tilde{S}-\frac{na^3}{r}\cdot\tilde{T}+\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\tilde{T}.\end{aligned}$$

Выписывая все полученные выражения для частных производных функции R вместе, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial \Omega}&=-\frac{2nar}{\sqrt{1-e^2}}\sin^2\frac{i}{2}\cdot\tilde{T}-\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\sin i\cos u\cdot\tilde{W},\\ \frac{\partial R}{\partial i}&=+\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}r\sin u\cdot\tilde{W},\\ \frac{\partial R}{\partial a}&=+\frac{nr}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\tilde{S},\\ \frac{\partial R}{\partial e}&=+\frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right],\\ \frac{\partial R}{\partial \pi}&=-\frac{na^2e\sin v}{1-e^2}\tilde{S}-\frac{na^3}{r}\tilde{T}+\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\tilde{T},\\ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}&=+\frac{na^2e\sin v}{1-e^2}\tilde{S}+\frac{na^2}{r}\tilde{T},\end{aligned}\right\} \quad (12.71)$$

откуда выводим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\tilde{T}=\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{a^2e\sin v}{p}\tilde{S}+\frac{a^2}{r}\tilde{T}=\frac{1}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\ &\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\,\tilde{S}=\frac{1}{na}\frac{\partial R}{\partial a}, \quad \frac{r}{p}\sin u\cdot\tilde{W}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i},\\ &\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W}=-\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega}-\\ &\qquad\qquad-\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\ &-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}.\end{aligned}\right\} \quad (12.71')$$

Подставляя выражения (12.71′) в уравнения (12.65), мы получим уравнения для определения оскулирующих эллиптических элементов, называемые **уравнениями Лагранжа**.

Эти уравнения обычно принято писать в следующем порядке:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= +\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right), \\
\frac{d\Omega}{dt} &= +\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{d\pi}{dt} &= +\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}, \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (12.72)
$$

Заметим свойство этих уравнений, напоминающее известные свойства канонической системы. Распределяя оскулирующие элементы на две группы следующим образом:

$$a,\ e,\ i,$$
$$\Omega,\ \pi,\ \varepsilon,$$

мы видим, что скорости изменения элементов первой группы содержат линейно частные производные от возмущающей функции по элементам второй группы, а скорости изменения элементов второй группы, наоборот, содержат линейно частные производные от R по элементам первой группы. Кроме того, коэффициенты при частных производных во всех уравнениях зависят только от элементов первой группы.

Выпишем еще дополнительно уравнения, вытекающие из первого уравнения системы (12.28) и из уравнения (12.56) и определяющие скорости изменения среднего движения и параметра оскулирующей эллиптической орбиты. Эти уравнения имеют вид

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)
\end{aligned}
\right\} \qquad (12.72')
$$

и ими можно заменить, если угодно, первые два уравнения системы (12.72).

Последнее уравнение системы (12.72) также можно заменить уравнением, определяющим скорость изменения средней аномалии эпохи $\overline{M}_0$. Это уравнение получится из уравнения (12.60′) с помощью формул (12.71′) и напишется следующим образом:

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt} = -\frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}. \tag{12.72″}$$

Если вместо $\overline{M}_0$ или ε желательно взять среднюю аномалию M или среднюю долготу l, то последнее уравнение системы (12.72) должно быть заменено одним из следующих:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dl}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \\ &\qquad + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned}\right\} \tag{12.72‴}$$

которые выводятся из уравнений (12.64′) и (12.64″) соответственно.

§ 5. Общий метод Лагранжа

1. Уравнения Лагранжа (12.72) получены нами путем преобразования уравнений Ньютона для случая эллиптического типа движения, т. е. уравнений (12.65). Однако сам Лагранж вывел эти уравнения непосредственно из уравнений (12.1) более общим способом *).

Так как уравнения Лагранжа являются весьма важным аппаратом для небесной механики, то полезно рассмотреть и непосредственный их вывод, к которому мы теперь и перейдем.

Следуя Лагранжу, рассмотрим вместо системы (12.1) или (12.12) более общую систему уравнений первого порядка вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} - \frac{\partial H}{\partial x'} - X' = 0, \quad \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} + \tilde{X} = 0, \\ &\frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial y'} - Y' = 0, \quad \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} + \tilde{Y} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{12.73}$$

где $x, x', y, y', \ldots$ обозначают неизвестные функции, число которых $2k$ может быть каким угодно.

Величины X', $\tilde{X}$, Y', $\tilde{Y}$, ..., а также величина H суть данные функции времени и $2k$ величин $x, x', y, y', \ldots$

*) См. сноску на стр. 568.