аномалии эпохи $\overline{M}_0$. Это уравнение получится из уравнения (12.60′) с помощью формул (12.71′) и напишется следующим образом:

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt} = -\frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}. \qquad (12.72'')$$

Если вместо $\overline{M}_0$ или $\varepsilon$ желательно взять среднюю аномалию $M$ или среднюю долготу $l$, то последнее уравнение системы (12.72) должно быть заменено одним из следующих:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dl}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \\ &\qquad + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.72''')$$

которые выводятся из уравнений (12.64′) и (12.64″) соответственно.

## § 5. Общий метод Лагранжа

1. Уравнения Лагранжа (12.72) получены нами путем преобразования уравнений Ньютона для случая эллиптического типа движения, т. е. уравнений (12.65). Однако сам Лагранж вывел эти уравнения непосредственно из уравнений (12.1) более общим способом *).

Так как уравнения Лагранжа являются весьма важным аппаратом для небесной механики, то полезно рассмотреть и непосредственный их вывод, к которому мы теперь и перейдем.

Следуя Лагранжу, рассмотрим вместо системы (12.1) или (12.12) более общую систему уравнений первого порядка вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} - \frac{\partial H}{\partial x'} - X' = 0, \qquad \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} + \widetilde{X} = 0, \\ &\frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial y'} - Y' = 0, \qquad \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} + \widetilde{Y} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (12.73)$$

где $x$, $x'$, $y$, $y'$, ... обозначают неизвестные функции, число которых $2k$ может быть каким угодно.

Величины $X'$, $\widetilde{X}$, $Y'$, $\widetilde{Y}$, ..., а также величина $H$ суть данные функции времени и $2k$ величин $x$, $x'$, $y$, $y'$, ...

*) См. сноску на стр. 568.

Рассмотрим сначала уравнения, получающиеся из уравнений (12.73) отбрасыванием всех величин $X'$, $\tilde{X}$, $Y'$, $\tilde{Y}$, ..., т. е. так называемые **упрощенные уравнения**, которые можно назвать также **уравнениями невозмущенного движения**:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}-\frac{\partial H}{\partial x'}=0, \quad \frac{dx'}{dt}+\frac{\partial H}{\partial x}=0,\\ &\frac{dy}{dt}-\frac{\partial H}{\partial y'}=0, \quad \frac{dy'}{dt}+\frac{\partial H}{\partial y}=0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{12.73'}$$

и допустим, что эти упрощенные уравнения могут быть полностью проинтегрированы.

Тогда мы будем иметь общее решение уравнений (12.73′) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &x=\Phi_1(t;\ a,\ b,\ \dots,\ g), \quad x'=\Psi_1(t;\ a,\ b,\ \dots,\ g),\\ &y=\Phi_2(t;\ a,\ b,\ \dots,\ g), \quad y'=\Psi_2(t;\ a,\ b,\ \dots,\ g),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{12.74}$$

где $a$, $b$, ..., $g$ суть $2k$ произвольных постоянных интегрирования.

Ясно, что функции (12.74) удовлетворяют уравнениям (12.73′), каковы бы ни были произвольные постоянные.

Чтобы получить общее решение первоначальных уравнений (12.73), сохраним те же аналитические выражения (12.74) для функций $x$, $x'$, $y$, $y'$, ..., но будем рассматривать величины $a$, $b$, ..., $g$ уже не как постоянные, а как некоторые функции времени, подлежащие определению*).

В этом предположении мы имеем

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{db}{dt}+\dots+\frac{\partial x}{\partial g}\frac{dg}{dt},\\ &\frac{dx'}{dt}=\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{db}{dt}+\dots+\frac{\partial x'}{\partial g}\frac{dg}{dt},\\ &\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{db}{dt}+\dots+\frac{\partial y}{\partial g}\frac{dg}{dt},\\ &\frac{dy'}{dt}=\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{db}{dt}+\dots+\frac{\partial y'}{\partial g}\frac{dg}{dt},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

*) Здесь опять излагается в несколько иной форме метод Лагранжа изменения произвольных постоянных.

Внесем эти выражения в уравнения (12.73) и потребуем, чтобы эти последние уравнения удовлетворялись. Имея в виду, что при этом

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial x}{\partial t}-\dfrac{\partial H}{\partial x'}\equiv 0, & \dfrac{\partial x'}{\partial t}+\dfrac{\partial H}{\partial x}\equiv 0,\\ \dfrac{\partial y}{\partial t}-\dfrac{\partial H}{\partial y'}\equiv 0, & \dfrac{\partial y'}{\partial t}+\dfrac{\partial H}{\partial y}\equiv 0,\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\end{array}\right\} \tag{12.73''}$$

мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{db}{dt}+\ldots+\dfrac{\partial x}{\partial g}\dfrac{dg}{dt}-X'=0,\\ \dfrac{\partial x'}{\partial a}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{\partial x'}{\partial b}\dfrac{db}{dt}+\ldots+\dfrac{\partial x'}{\partial g}\dfrac{dg}{dt}+\tilde{X}=0,\\ \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{db}{dt}+\ldots+\dfrac{\partial y}{\partial g}\dfrac{dg}{dt}-Y'=0,\\ \dfrac{\partial y'}{\partial a}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{\partial y'}{\partial b}\dfrac{db}{dt}+\ldots+\dfrac{\partial y'}{\partial g}\dfrac{dg}{dt}+\tilde{Y}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\} \tag{12.75}$$

Эти $2k$ уравнений содержат $2k$ неизвестных производных $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots, \frac{dg}{dt}$, относительно которых эти уравнения линейны. Коэффициенты этих линейных уравнений и свободные члены суть вообще некоторые функции времени и величин $a, b, \ldots, g$. Прежде чем решать эти уравнения, Лагранж заменяет систему (12.75) другой, более простой, коэффициенты которой не зависят от $t$ и обладают свойством симметрии.

Введем для этого в рассмотрение величины, называемые **скобками Лагранжа** и определяемые равенствами вида

$$[a, b]=\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x'}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x'}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y'}{\partial a}+\ldots, \tag{12.76}$$

из которых следуют соотношения

$$[b, a]=-[a, b], \quad [a, a]=0. \tag{12.76'}$$

Положим, кроме того,

$$\left.\begin{array}{l}R_a=\tilde{X}\dfrac{\partial x}{\partial a}+\tilde{Y}\dfrac{\partial y}{\partial a}+\ldots+X'\dfrac{\partial x'}{\partial a}+Y'\dfrac{\partial y'}{\partial a}+\ldots,\\ R_b=\tilde{X}\dfrac{\partial x}{\partial b}+\tilde{Y}\dfrac{\partial y}{\partial b}+\ldots+X'\dfrac{\partial x'}{\partial b}+Y'\dfrac{\partial y'}{\partial b}+\ldots,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ R_g=\tilde{X}\dfrac{\partial x}{\partial g}+\tilde{Y}\dfrac{\partial y}{\partial g}+\ldots+X'\dfrac{\partial x'}{\partial g}+Y'\dfrac{\partial y'}{\partial g}+\ldots\end{array}\right\} \tag{12.77}$$

Тогда из уравнений (7.75) легко выведем следующие *):

$$\left.\begin{array}{l}
[a, a]\dfrac{da}{dt}+[a, b]\dfrac{db}{dt}+\ldots+[a, g]\dfrac{dg}{dt}+R_a=0,\\
[b, a]\dfrac{da}{dt}+[b, b]\dfrac{db}{dt}+\ldots+[b, g]\dfrac{dg}{dt}+R_b=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[g, a]\dfrac{da}{dt}+[g, b]\dfrac{db}{dt}+\ldots+[g, g]\dfrac{dg}{dt}+R_g=0,
\end{array}\right\} \qquad (12.78)$$

которые и нужно затем разрешить относительно производных $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots, \frac{dg}{dt}$.

Покажем теперь, что коэффициенты уравнений (12.78) не зависят явно от времени, что позволяет значительно упростить их вычисление.

В самом деле, составим выражение для частной производной от любой скобки Лагранжа по времени $t$ и убедимся, что эта производная тождественно равна нулю. Мы имеем, дифференцируя формулу (12.76),

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\frac{\partial x'}{\partial b}+\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x'}{\partial b\,\partial t}-\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t}\frac{\partial x'}{\partial a}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x'}{\partial a\,\partial t}+\ldots,$$

что можно, как нетрудно проверить, представить также в виде

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial b}-\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial a}-\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}\right)+\ldots$$

Принимая во внимание равенства (12.73), мы напишем последнее равенство следующим образом:

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial b}+\ldots\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a}+\ldots\right),$$

откуда, замечая, что $H$ зависит от $a$ или $b$ только через посредство $x, x', \ldots$, выводим

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial H}{\partial b}-\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial H}{\partial a}=\frac{\partial^2 H}{\partial a\,\partial b}-\frac{\partial^2 H}{\partial b\,\partial a}=0.$$

В каждом частном случае функция $H$ имеет определенное значение и функции $\Phi_1, \Psi_1, \ldots$, входящие в общее решение уравнений невозмущенного движения (12.73), предполагаются известными функциями времени и произвольных постоянных.

*) Для этого нужно умножить уравнения (12.75) соответственно на $-\frac{\partial x'}{\partial a}, +\frac{\partial x}{\partial a}, -\frac{\partial y'}{\partial a}, +\frac{\partial y}{\partial a}, \ldots$, и затем сложить все уравнения. Заменяя $a$ на $b, \ldots$, получим все уравнеиия системы (12.78).

Поэтому величины скобок Лагранжа, входящих в уравнения (12.78), могут быть найдены при помощи совершенно элементарных операций.

Вычислив все эти скобки, число которых в силу соотношений (12.76′) сводится к $k(2k-1)$, и разрешая затем уравнения (12.78) относительно производных $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots$, мы получим, очевидно, $2k$ уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= A(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g),\\ \frac{db}{dt} &= B(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dg}{dt} &= G(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g), \end{aligned}\right\} \tag{12.78′}$$

которые и нужно будет интегрировать.

Найдя величины $a, b, \ldots, g$ в зависимости от времени и $2k$ произвольных постоянных, мы получим затем общее решение первоначальных уравнений (уравнений возмущенного движения) по формулам (12.74).

2. Применим теперь теорию, изложенную в предыдущем разделе, к уравнениям (12.12), где составляющие возмущающего ускорения определяются формулами (12.67).

Тогда $k=3$; $x, y, z$ суть обычные прямоугольные координаты;

$$x'=\dot{x}, \quad y'=\dot{y}, \quad z'=\dot{z}$$

являются составляющими скорости; функция $H$ определится формулой

$$H=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{\mu}{r};$$

все $X', Y', Z'$ равны нулю, а

$$\tilde{X}=-\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \tilde{Y}=-\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \tilde{Z}=-\frac{\partial R}{\partial z}$$

суть известные функции времени и координат $x, y, z$.

Уравнения упрощенной системы (12.73′) в данном случае являются обычными уравнениями невозмущенного кеплеровского движения, общее решение которых известно. Это общее решение мы возьмем здесь в виде (9.59), где $\xi$ и $\eta$ суть прямоугольные орбитальные координаты. Произвольными постоянными являются элементы кеплеровой орбиты

$$\Omega, \quad i, \quad \omega, \quad p, \quad e, \quad \tau, \tag{12.79}$$

которая может быть и эллипсом, и гиперболой.

Если $\text{э}$ обозначает какой-либо из элементов (12.79), то мы имеем по формулам (12.77)

$$R_{\text{э}} = -\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \text{э}} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \text{э}} - \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \text{э}} = -\frac{\partial R}{\partial \text{э}}. \qquad (12.79')$$

Теперь, чтобы составить уравнения (12.78), которые в рассматриваемом случае представляют собой систему шести линейных уравнений относительно производных от элементов (12.79), нужно сначала вычислить скобки Лагранжа, число которых в данном случае равно 30, что в силу свойств скобок приводится к 15.

Для вычисления этих 15 скобок, которые содержат частные производные от координат и составляющих скоростей невозмущенного движения по элементам (12.79), мы можем воспользоваться готовыми формулами, выписанными в конце гл. X.

Пусть $L_1$ и $L_2$ — два различных элемента из группы $\Omega$, $i$, $\omega$. Тогда мы имеем

$$[L_1, L_2] = \frac{\partial x}{\partial L_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial L_2} - \frac{\partial x}{\partial L_2}\frac{\partial \dot{x}}{\partial L_1} + \ldots \qquad (12.80)$$

По формулам гл. X

$$\frac{\partial x}{\partial L} = \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\xi + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\eta, \qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial L} = \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\dot{\xi} + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\dot{\eta},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

так что из (12.80) мы находим

$$[L_1, L_2] = (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})\left[\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_1}\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_2}\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_1} + \ldots\right].$$

Но в невозмущенном движении

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = c = \sqrt{\mu}\sqrt{p},$$

а поэтому

$$[L_1, L_2] = \sqrt{\mu}\sqrt{p}\left[\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_1}\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_2}\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L_1}\frac{\partial \beta'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L_2}\frac{\partial \beta'_\tau}{\partial L_1} + \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L_1}\frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L_2}\frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial L_1}\right]. \qquad (12.80')$$

Подставляя сюда вместо производных от направляющих косинусов по элементам первой группы их выражения, даваемые формулами (10.106), (10.106′) и (10.106″) гл. X, мы найдем

$$[\Omega, \omega] = 0, \quad [\Omega, i] = -\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i, \quad [\omega, i] = 0. \qquad (12.80'')$$

Подразумевая далее, как и в гл. X, под $L$ любой из элементов первой группы и под $P$ любой из элементов второй группы (элементы: $p$, $e$, $\tau$), мы имеем

$$[L, P]=\frac{\partial x}{\partial L}\frac{\partial \dot{x}}{\partial P}-\frac{\partial x}{\partial P}\frac{\partial \dot{x}}{\partial L}+\ldots \tag{12.81}$$

Но по формулам гл. X

$$\frac{\partial x}{\partial P}=\alpha_\tau \frac{\partial \xi}{\partial P}+\alpha'_\tau \frac{\partial \eta}{\partial P}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial P}=\alpha_\tau \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P}+\alpha'_\tau \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

а производные по элементам первой группы написаны выше, и мы получаем

$$[L, P]=\left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\xi+\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\eta\right)\left(\alpha_\tau \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P}+\alpha'_\tau \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P}\right)-$$
$$-\left(\alpha_\tau \frac{\partial \xi}{\partial P}+\alpha'_\tau \frac{\partial \eta}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\dot{\xi}+\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\dot{\eta}\right)+\ldots$$

После упрощений найдем

$$[L, P]=\left(\alpha'_\tau \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}+\beta'_\tau \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L}+\gamma'_\tau \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L}\right)\cdot\frac{\partial(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})}{\partial P},$$

откуда

$$[L, P]=\sqrt{\mu}\left(\alpha'_\tau \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}+\beta'_\tau \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L}+\gamma'_\tau \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L}\right)\frac{\partial \sqrt{p}}{\partial P}. \tag{12.81'}$$

Из этой формулы имеем

$$[L, e]=0, \quad [L, \tau]=0 \tag{12.81''}$$

и

$$[L, p]=\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\left(\alpha'_\tau \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}+\beta'_\tau \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L}+\gamma'_\tau \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L}\right). \tag{12.82}$$

Полагая здесь последовательно $L=\Omega$, $i$, $\omega$ и воспользовавшись опять формулами (10.106), мы найдем

$$[\Omega, p]=\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\cos i, \quad [i, p]=0, \quad [\omega, p]=\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}. \tag{12.82'}$$

Наконец, пусть $P_1$ и $P_2$ — два различных элемента второй группы. Тогда

$$[P_1, P_2]=\frac{\partial x}{\partial P_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial P_2}-\frac{\partial x}{\partial P_2}\frac{\partial \dot{x}}{\partial P_1}+\ldots, \tag{12.83}$$

откуда

$$[P_1, P_2]=\left(\alpha_\tau \frac{\partial \xi}{\partial P_1}+\alpha'_\tau \frac{\partial \eta}{\partial P_1}\right)\left(\alpha_\tau \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P_2}+\alpha'_\tau \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P_2}\right)-$$
$$-\left(\alpha_\tau \frac{\partial \xi}{\partial P_2}+\alpha'_\tau \frac{\partial \eta}{\partial P_2}\right)\left(\alpha_\tau \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P_1}+\alpha'_\tau \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P_1}\right).$$

После упрощений будем иметь

$$[P_1, P_2] = \frac{\partial\xi}{\partial P_1}\frac{\partial\dot\xi}{\partial P_2} - \frac{\partial\xi}{\partial P_2}\frac{\partial\dot\xi}{\partial P_1} + \frac{\partial\eta}{\partial P_1}\frac{\partial\dot\eta}{\partial P_2} - \frac{\partial\eta}{\partial P_2}\frac{\partial\dot\eta}{\partial P_1}. \quad (12.83')$$

Сюда нужно подставить вместо частных производных от орбитальных координат и орбитальных составляющих скорости их выражения из формул (10.108) и (10.109′).

При этом при вычислении производных, входящих в формулу (12.83′), мы можем придать времени $t$ любое значение, так как, по свойству скобок Лагранжа,

$$\frac{\partial [P_1, P_2]}{\partial t} \equiv 0.$$

Проще всего положить $t = \tau$, так как для этого значения $t$ истинная аномалия $v$ равна нулю.

Формулы (10.107′), (10.107″), (10.108) и (10.109′) дают при $t = \tau$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial p} = \frac{1}{1+e}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial\dot\xi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial\dot\eta}{\partial p} = -\frac{\sqrt{\mu}\,(1+e)}{2p\sqrt{p}},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial e} = -\frac{p}{(1+e)^2}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial\dot\xi}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial\dot\eta}{\partial e} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\tau} = -\frac{\sqrt{\mu}\,(1+e)}{\sqrt{p}}, \quad \frac{\partial\dot\xi}{\partial\tau} = \frac{\mu\,(1+e)^2}{p^2}, \quad \frac{\partial\dot\eta}{\partial\tau} = 0.$$

С помощью этих выражений по (12.83′) находим без труда

$$[p, e] = 0, \quad [p, \tau] = \frac{\mu\,(1-e^2)}{2p^2}, \quad [e, \tau] = \frac{\mu e}{p}. \quad (12.83'')$$

Подставляя теперь выражения для скобок Лагранжа (12.80″), (12.81″), (12.82′) и (12.83″) в уравнения вида (12.78), мы получим следующие уравнения:

$$-\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i\,\frac{di}{dt} + \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\cos i\,\frac{dp}{dt} - \frac{\partial R}{\partial\Omega} = 0,$$

$$+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i\,\frac{d\Omega}{dt} - \frac{\partial R}{\partial i} = 0,$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt} - \frac{\partial R}{\partial\omega} = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt} - \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\mu\,(1-e^2)}{2p^2}\frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial R}{\partial p} = 0,$$

$$+\frac{\mu e}{p}\frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial R}{\partial e} = 0,$$

$$-\frac{\mu\,(1-e^2)}{2p^2}\frac{dp}{dt} - \frac{\mu e}{p}\frac{de}{dt} - \frac{\partial R}{\partial\tau} = 0.$$

Разрешая эти уравнения относительно производных от элементов, мы получим окончательные уравнения Лагранжа для системы элементов (12.79) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= +\frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}+\frac{\cos i}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}-\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial R}{\partial p}+\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{dp}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial \tau},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial \tau},\\
\frac{d\tau}{dt} &= +\frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.84)$$

Эти уравнения, как уже было замечено, справедливы для любого типа движения (эллиптического или гиперболического) и от них нетрудно перейти к уравнениям для какой-либо другой системы элементов и, в частности, к уравнениям (12.72) для элементов эллиптического движения *).

## § 6. Основные методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения

1. Мы уже неоднократно замечали, что дифференциальные уравнения возмущенного движения, например, уравнения вида (12.1) или равносильные им уравнения (12.12), при современном состоянии математики не могут быть строго проинтегрированы.

Это замечание относится также к уравнениям движения в каких-либо других координатах (сферических, цилиндрических и т. д.), так как невозможность полного интегрирования обусловливается отсутствием нужного количества первых интегралов задачи. Также не могут быть строго проинтегрированы и

*) Лагранж в своей «Аналитической механике», выводит сначала уравнения (12.84), но только для случая движения эллиптического типа, после чего замечает, что из полученных уравнений можно, наоборот, вывести уравнения Ньютона.