Разрешая эти уравнения относительно производных от элементов, мы получим окончательные уравнения Лагранжа для системы элементов (12.79) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= +\frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}+\frac{\cos i}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}-\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial R}{\partial p}+\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{dp}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial \tau},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial \tau},\\
\frac{d\tau}{dt} &= +\frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\} \quad (12.84)$$

Эти уравнения, как уже было замечено, справедливы для любого типа движения (эллиптического или гиперболического) и от них нетрудно перейти к уравнениям для какой-либо другой системы элементов и, в частности, к уравнениям (12.72) для элементов эллиптического движения *).

§ 6. Основные методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения

1. Мы уже неоднократно замечали, что дифференциальные уравнения возмущенного движения, например, уравнения вида (12.1) или равносильные им уравнения (12.12), при современном состоянии математики не могут быть строго проинтегрированы.

Это замечание относится также к уравнениям движения в каких-либо других координатах (сферических, цилиндрических и т. д.), так как невозможность полного интегрирования обусловливается отсутствием нужного количества первых интегралов задачи. Также не могут быть строго проинтегрированы и

*) Лагранж в своей «Аналитической механике», выводит сначала уравнения (12.84), но только для случая движения эллиптического типа, после чего замечает, что из полученных уравнений можно, наоборот, вывести уравнения Ньютона.

уравнения Ньютона или уравнения Лагранжа, получающиеся из уравнений (12.12) путем замены переменных.

Можно, конечно, поставить математическую задачу об отыскании такого преобразования переменных, чтобы новые уравнения оказались интегрируемыми в строгом смысле слова Однако эта задача в громадном большинстве случаев оказывается неразрешимой, но применяемые в ней методы могут оказаться полезными для чисто теоретических исследований. Поэтому главное внимание астрономов-теоретиков издавна было обращено на приемы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения, основные принципы которых мы рассмотрим в настоящем параграфе. При этом мы будем рассматривать исключительно аналитические методы, имеющие целью получить буквенные приближенные формулы для тех неизвестных функций, которые определяются заданными уравнениями, совершенно не касаясь численных методов интегрирования *).

Рассмотрим сначала первоначальные уравнения возмущенного движения (12.1) в прямоугольных координатах и допустим, что составляющие возмущающего ускорения, являясь заданными функциями от координат, составляющих скорости и времени, зависят еще от некоторого малого параметра σ и могут быть представлены в форме рядов, расположенных по целым положительным степеням этого параметра **):

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k X^{(k)}(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ Y &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Y^{(k)}(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ Z &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Z^{(k)}(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}). \end{aligned}\right\} \tag{12.85}$$

Предположим, что эти ряды сходятся абсолютно для всех значений времени t, содержащихся в некотором промежутке $(t_0 - \bar{t}_1,\ t_0 + \bar{t}_2)$, для всех значений координат и их производных, содержащихся в некоторой области шестимерного пространства, и при значениях параметра, не превосходящих по абсолютной величине некоторого малого предела $\bar{\sigma}$.

*) О численном интегрировании дифференциальных уравнений небесной механики см.: М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, Д. Брауэр, Дж. Клеменс. Методы небесной механики.

**) Возможны случаи, когда эти ряды расположены по дробным степеням параметра.

Уравнения (12.1) напишем в этом случае следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k X^{(k)},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k Y^{(k)},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k Z^{(k)},\end{aligned}\right\} \tag{12.86}$$

и поставим задачу о нахождении общего решения этой системы также в виде рядов, расположенных по степеням параметра σ.

Для этого положим

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k x^{(k)},\quad y=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k y^{(k)},\quad z=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k z^{(k)}, \tag{12.87}$$

где $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ суть неизвестные коэффициенты, которые нужно определить в функции времени так, чтобы ряды (12.87) удовлетворяли формально уравнениям (12.86).

Очевидно, что функции $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$, представляющие *нулевое приближение*, определяются уравнениями, которые получим из (12.86), полагая $\sigma=0$, и которые, следовательно, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x^{(0)}}{dt^2}+\frac{\mu x^{(0)}}{r^{(0)3}}&=0,\\ \frac{d^2y^{(0)}}{dt^2}+\frac{\mu y^{(0)}}{r^{(0)3}}&=0,\\ \frac{d^2z^{(0)}}{dt^2}+\frac{\mu z^{(0)}}{r^{(0)3}}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{12.88}$$

Но уравнения (12.88), очевидно, суть просто уравнения невозмущенного кеплеровского движения, общее решение которых, содержащее шесть произвольных постоянных, известно и дается формулами, полученными в третьей части этой книги.

Чтобы получить уравнения, определяющие коэффициенты рядов (12.87), можно идти двумя разными путями. Во-первых, мы можем просто подставить вместо x, y, z ряды (12.87) в уравнения (12.86), затем расположить результаты подстановок по степеням параметра σ и (имея в виду, что уравнения должны удовлетворяться этими рядами тождественно) сравнить затем коэффициенты при одинаковых степенях σ в левых и правых частях равенств.

Во-вторых, ряды (12.87) можно рассматривать как ряды Тейлора (или Маклорена), расположенные по степеням независимой переменной σ. Тогда, по формулам Тейлора, имеем

$$x^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^kx}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0}, \quad \dot{x}^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\dot{x}}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0}, \ \ldots \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (12.87')$$

Предполагая, что ряды (12.87) подставлены вместо x, y, z в уравнения (12.86), мы превращаем эти уравнения в тождества по σ, и имеем право, следовательно, дифференцировать эти тождества по параметру σ любое число раз, получая после каждого дифференцирования опять тождества.

Второй путь для определения коэффициентов рядов (12.87) является более простым и мы будем следовать именно ему.

Дифференцируя равенства (12.86) по σ, имея в виду, что x, y, z суть функции σ, определяемые рядами (12.87), мы получим следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)+\frac{\mu}{r^3}\frac{dx}{d\sigma}-\frac{3\mu x}{r^5}\left(x\frac{dx}{d\sigma}+y\frac{dy}{d\sigma}+z\frac{dz}{d\sigma}\right)=\\
&\qquad\qquad=\sum_{k=1}^{\infty}k\sigma^{k-1}X^{(k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\frac{dX^{(k)}}{d\sigma},\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)+\frac{\mu}{r^3}\frac{dy}{d\sigma}-\frac{3\mu y}{r^5}\left(x\frac{dx}{d\sigma}+y\frac{dy}{d\sigma}+z\frac{dz}{d\sigma}\right)=\\
&\qquad\qquad=\sum_{k=1}^{\infty}k\sigma^{k-1}Y^{(k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\frac{dY^{(k)}}{d\sigma},\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)+\frac{\mu}{r^3}\frac{dz}{d\sigma}-\frac{3\mu z}{r^5}\left(x\frac{dx}{d\sigma}+y\frac{dy}{d\sigma}+z\frac{dz}{d\sigma}\right)=\\
&\qquad\qquad=\sum_{k=1}^{\infty}k\sigma^{k-1}Z^{(k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\frac{dZ^{(k)}}{d\sigma},
\end{aligned}\right\} \qquad (12.89)$$

где $\frac{dX^{(k)}}{d\sigma}, \ldots$ есть полная частная производная от функции $X^{(k)}$ по параметру σ, определяемая формулой

$$\frac{dX^{(k)}}{d\sigma}=\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma}+\ldots+\frac{\partial X^{(k)}}{\partial\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{d\sigma}+\ldots$$

Полагая теперь в уравнениях (12.89) $\sigma=0$ и имея в виду формулы (12.87'), мы получим для определения функций $x^{(1)}$

$y^{(1)}$, $z^{(1)}$, составляющих первое приближение, следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+p_{11}x^{(1)}+p_{12}y^{(1)}+p_{13}z^{(1)}=X_1,\\
&\frac{d^2y^{(1)}}{dt^2}+p_{21}x^{(1)}+p_{22}y^{(1)}+p_{23}z^{(1)}=Y_1,\\
&\frac{d^2z^{(1)}}{dt^2}+p_{31}x^{(1)}+p_{32}y^{(1)}+p_{33}z^{(1)}=Z_1,
\end{aligned}\right\}\qquad(12.90)$$

коэффициенты которых являются известными функциями времени, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned}
&p_{11}=\frac{\mu}{r^{(0)3}}-\frac{3\mu x^{(0)2}}{r^{(0)5}},\quad p_{12}=-\frac{3\mu x^{(0)}y^{(0)}}{r^{(0)5}},\quad p_{13}=-\frac{3\mu x^{(0)}z^{(0)}}{r^{(0)5}},\\
&p_{21}=-\frac{3\mu y^{(0)}x^{(0)}}{r^{(0)5}},\quad p_{22}=\frac{\mu}{r^{(0)3}}-\frac{3\mu y^{(0)2}}{r^{(0)5}},\quad p_{23}=-\frac{3\mu y^{(0)}z^{(0)}}{r^{(0)5}},\\
&p_{31}=-\frac{3\mu z^{(0)}x^{(0)}}{r^{(0)5}},\quad p_{32}=-\frac{3\mu z^{(0)}y^{(0)}}{r^{(0)5}},\quad p_{33}=\frac{\mu}{r^{(0)3}}-\frac{3\mu z^{(0)2}}{r^{(0)5}},
\end{aligned}\right\}\qquad(12.91)$$

и где

$$\begin{aligned}
X_1&=X^{(1)}(t;\ x^{(0)},\ y^{(0)},\ z^{(0)},\ \dot{x}^{(0)},\ \dot{y}^{(0)},\ \dot{z}^{(0)}),\\
Y_1&=Y^{(1)}(t;\ x^{(0)},\ y^{(0)},\ z^{(0)},\ \dot{x}^{(0)},\ \dot{y}^{(0)},\ \dot{z}^{(0)}),\\
Z_1&=Z^{(1)}(t;\ x^{(0)},\ y^{(0)},\ z^{(0)},\ \dot{x}^{(0)},\ \dot{y}^{(0)},\ \dot{z}^{(0)}),
\end{aligned}$$

также суть известные функции времени, так как общее решение уравнений нулевого приближения нам известно из теории невозмущенного кеплеровского движения.

Дифференцируя теперь уравнения (12.89) по параметру σ второй, третий, четвертый и вообще $(k-1)$-й раз и полагая после каждого дифференцирования $\sigma=0$, мы будем получать последовательно уравнения, определяющие второе, третье и т. д. приближения. Нетрудно убедиться, что в каждом последующем приближении мы будем получать уравнения такого же вида, как и уравнения (12.90) и притом с теми же самыми коэффициентами p_{ij}, но отличающиеся правыми частями.

Таким образом, уравнения, определяющие функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$, или k-е приближение, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{(k)}}{dt^2}+p_{11}x^{(k)}+p_{12}y^{(k)}+p_{13}z^{(k)}=X_k,\\
&\frac{d^2y^{(k)}}{dt^2}+p_{21}x^{(k)}+p_{22}y^{(k)}+p_{23}z^{(k)}=Y_k,\\
&\frac{d^2z^{(k)}}{dt^2}+p_{31}x^{(k)}+p_{32}y^{(k)}+p_{33}z^{(k)}=Z_k.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.90')$$

Правые части X_k, Y_k, Z_k этих уравнений суть некоторые многочлены относительно величин

$$\begin{array}{cccccc} x^{(1)}, & y^{(1)}, & z^{(1)}, & \dot{x}^{(1)}, & \dot{y}^{(1)}, & \dot{z}^{(1)}, \\ x^{(2)}, & y^{(2)}, & z^{(2)}, & \dot{x}^{(2)}, & \dot{y}^{(2)}, & \dot{z}^{(2)}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{(k-1)}, & y^{(k-1)}, & z^{(k-1)}, & \dot{x}^{(k-1)}, & \dot{y}^{(k-1)}, & \dot{z}^{(k-1)}, \end{array}$$

коэффициенты которых суть функции времени и величин

$$x^{(0)}, \quad y^{(0)}, \quad z^{(0)}, \quad \dot{x}^{(0)}, \quad \dot{y}^{(0)}, \quad \dot{z}^{(0)}.$$

Если первое, второе, ..., $(k-1)$-е приближения уже определены, то правые части уравнений (12.90′) будут *известными функциями времени*. Поэтому для нахождения каждого приближения, начиная с первого, нужно интегрировать *однотипную систему линейных дифференциальных уравнений*, коэффициенты которой и правые части суть известные функции времени.

2. Для интегрирования системы линейных уравнений (12.90′), где $k=1, 2, \ldots$, нужно прежде всего, как хорошо известно, найти фундаментальную систему решений соответствующих однородных уравнений, которые получаются из системы (12.90′) заменой всех правых частей нулями.

Вообще нет никакого общего способа для интегрирования системы линейных уравнений с переменными коэффициентами, но в нашем случае это интегрирование может быть полностью выполнено при помощи одной замечательной теоремы, принадлежащей Пуанкаре*). Мы не будем здесь доказывать теорему Пуанкаре в ее общем виде и покажем только ее справедливость для данного случая.

Пусть решение уравнений невозмущенного движения (12.88) определяется следующими формулами:

$$x^{(0)} = f(t \mid C_s), \quad y^{(0)} = \varphi(t \mid C_s), \quad z^{(0)} = \psi(t \mid C_s), \tag{12.92}$$

где Cs $(s=1, 2, \ldots, 6)$ суть произвольные постоянные, за которые можно принять либо начальные значения неизвестных функций либо какие-нибудь элементы кеплеровского движения, либо, вообще, какие-либо произвольно задаваемые постоянные. Тогда теорема Пуанкаре утверждает, что функции, определяемые равенствами

$$x_s = \frac{\partial f}{\partial C_s}, \quad y_s = \frac{\partial \varphi}{\partial C_s}, \quad z_s = \frac{\partial \psi}{\partial C_s}, \tag{12.92′}$$

*) Доказательство теоремы Пуанкаре в общем виде приведено в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы». «Наука», 1964.

удовлетворяют системе линейных однородных уравнений, получаемых отбрасыванием правых частей в системе (12.90′).

Сказанное легко доказать. Действительно, функции (12.92) представляют решение уравнений (12.88), а поэтому, подставляя в эти уравнения выражения (12.92), мы получим тождества, каковы бы ни были значения произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$.

Продифференцируем теперь полученные тождества по какой-либо из величин C_s, в результате чего получим, очевидно, опять тождества. Эти тождества, как нетрудно проверить, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f}{\partial C_s}\right)+p_{11}\frac{\partial f}{\partial C_s}+p_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial C_s}+p_{13}\frac{\partial \psi}{\partial C_s}\equiv 0,\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial C_s}\right)+p_{21}\frac{\partial f}{\partial C_s}+p_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial C_s}+p_{23}\frac{\partial \psi}{\partial C_s}\equiv 0,\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial C_s}\right)+p_{31}\frac{\partial f}{\partial C_s}+p_{32}\frac{\partial \varphi}{\partial C_s}+p_{33}\frac{\partial \psi}{\partial C_s}\equiv 0,
\end{aligned}\right\}\qquad(12.92'')$$

где коэффициенты p_{ij} определяются опять формулами (12.91).

Полученные тождества и доказывают теорему Пуанкаре для нашего случая.

Если за произвольные постоянные взять кеплеровские элементы, то для нахождения производных от координат и составляющих скорости по этим элементам можно воспользоваться формулами, приведенными в § 5 этой главы и выписать, следовательно, все равенства (12.92′) в конечном виде. Составляя из 36 найденных таким образом функций определитель шестого порядка, мы убедимся при помощи громоздкого, но не сложного вычисления, что этот определитель отличен от нуля и, следовательно, что найденные функции образуют фундаментальную систему решений линейных однородных уравнений.

Таким образом, общее решение линейных однородных уравнений может быть написано следующим образом:

$$x^{(k)}=\sum_{s=1}^{6}C_s^{(k)}x_s,\quad y^{(k)}=\sum_{s=1}^{6}C_s^{(k)}y_s,\quad z^{(k)}=\sum_{s=1}^{6}C_s^{(k)}z_s,\qquad(12.93)$$

где $C_s^{(k)}$ обозначают произвольные постоянные интегрирования.

Чтобы получить теперь общее решение неоднородной системы (12.90′), нужно применить метод вариации постоянных, требуя, чтобы для неоднородной системы функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ и их первые производные по времени $\dot{x}^{(k)}$, $\dot{y}^{(k)}$, $\dot{z}^{(k)}$ определялись такими же формулами, как и для однородной системы.

Первое условие приводит нас снова к формулам (12.93), где величины $C_s^{(k)}$ рассматриваются уже как некоторые функции времени. Второе условие дает следующие три соотношения:

$$\sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} x_s = 0, \quad \sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} y_s = 0, \quad \sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} z_s = 0. \qquad (12.93')$$

Требуя, чтобы уравнения (12.90′) удовлетворялись формулами (12.93) и имея в виду соотношения (12.93′), мы получим в силу тождеств (12.92″) еще три соотношения:

$$\sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} \dot{x}_s = X_k, \quad \sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} \dot{y}_s = Y_k, \quad \sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} \dot{z}_s = Z_k. \qquad (12.93'')$$

Соотношения (12.93′) и (12.93″) составляют систему шести уравнений относительно производных $\dot{C}_s^{(k)}$, главный определитель которых есть определитель, составленный из функций (и их производных) фундаментальной системы линейных уравнений, отличный, как замечено выше, от нуля.

Пусть этот определитель составлен так, что первые его три строки состоят последовательно из функций x_s, y_s, z_s $(s=1, 2, \ldots, 6)$, а последние три строки из производных $\dot{x}_s$, $\dot{y}_s$, $\dot{z}_s$, и обозначим его величину через D.

Обозначим, далее, через D_{4s}, D_{5s}, D_{6s} алгебраические дополнения элементов четвертой, пятой и шестой строк определителя D. Тогда, решая уравнения (12.93′) и (12.93″) относительно $\dot{C}_s^{(k)}$, мы найдем

$$\dot{C}_s^{(k)} = \frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k, \qquad (12.94)$$

где правые части будут известными функциями времени.

Интегрируя равенства (12.94), мы получим все величины $C_s^{(k)}$ как известные функции времени, после чего по формулам (12.93) найдем функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$, удовлетворяющие неоднородной системе (12.90′).

При интегрировании равенств (12.94) появятся (и притом для каждого k) шесть произвольных постоянных, а поэтому полученные формулы будут содержать бесчисленное множество произвольных постоянных.

После подстановки функций (12.93) в ряды (12.87) мы получим общее решение уравнений (12.86), которое будет содержать, как нетрудно убедиться, всего двенадцать произвольных постоянных, из которых шесть постоянных суть величины C_s, входящие в формулы нулевого приближения, шесть других являются комбинациями произвольных постоянных, получающихся при интегрировании равенств (12.94).

Так как общее решение уравнений (12.86) должно содержать только шесть произвольных постоянных, то другие шесть являются лишними и их можно выбирать произвольно.

Этот произвольный выбор шести постоянных (из двенадцати) можно осуществлять бесчисленным множеством способов, лишь бы ряды (12.87) были сходящимися. В частности, можно потребовать, чтобы все функции (12.93) и их первые производные по времени обращались в нуль при $t=t_0$. Тогда все произвольные постоянные, возникающие при интегрировании равенств (12.94), будут равны нулю, и мы получим следующие формулы:

$$C_s^{(k)} = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k\right] dt. \qquad (12.94')$$

Подставляя эти выражения для $C_s^{(k)}$ в формулы (12.93), мы будем иметь следующие общие формулы для вычисления последовательных приближений, т. е. для определения коэффициентов рядов (12.87):

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)} &= \sum_{s=1}^{6} x_s \int_{t_0}^{t} \left[\frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k\right] dt, \\ y^{(k)} &= \sum_{s=1}^{6} y_s \int_{t_0}^{t} \left[\frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k\right] dt, \\ z^{(k)} &= \sum_{s=1}^{6} z_s \int_{t_0}^{t} \left[\frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k\right] dt. \end{aligned}\right\} \qquad (12.95)$$

Можно доказать, что при достаточно общих предположениях относительно величин $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$, $Z^{(k)}$, ряды (12.87), коэффициенты которых определяются формулами (12.95), сходятся абсолютно и равномерно для всякого значения t в промежутке $(t_0 - \bar{t},\ t_0 + \bar{t})$, где $\bar{t}$ не превосходит наименьшего из двух чисел, $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$, и притом зависят от $\bar{\sigma}$. Это доказательство, вытекающее из более общей теоремы А. М. Ляпунова, мы здесь приводить не будем *).

Фактические вычисления последовательных приближений по формулам (12.95), конечно, довольно громоздки, но все же могут быть выполнены, по крайней мере для первого приближения, которым во многих случаях можно и ограничиться. Исходными формулами при этих вычислениях являются формулы

*) А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950. Эта теорема изложена также в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы».

(12.92), получаемые дифференцированием формул невозмущенного движения по произвольным постоянным C_s.

Если за произвольные постоянные невозмущенного движения взять кеплеровские элементы оскулирующей орбиты (12.79), то для производных (12.92′) мы имеем уже готовые формулы, полученные и выписанные в конце гл. X, которыми мы уже пользовались в предыдущем параграфе для вычисления скобок Лагранжа.

Мы не будем приводить развернутых формул для вычисления последовательных приближений, так как нашей целью было только разъяснение сущности изложенного метода. Отметим только еще, что формулы (12.87) могут быть написаны в виде

$$x = x^{(0)} + \delta x, \quad y = y^{(0)} + \delta y, \quad z = z^{(0)} + \delta z, \tag{12.96}$$

где, как уже было выяснено, $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ представляют собой невозмущенные значения координат, определяемые общими формулами кеплеровского движения.

Величины

$$\delta x = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k x^{(k)}, \quad \delta y = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k y^{(k)}, \quad \delta z = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k z^{(k)} \tag{12.96′}$$

представляют собой **полные возмущения координат**, вызываемые действием возмущающей силы.

Величины

$$\delta^{(k)} x = \sigma^k x^{(k)}, \quad \delta^{(k)} y = \sigma^k y^{(k)}, \quad \delta^{(k)} z = \sigma^k z^{(k)},$$

называются **возмущениями k-го порядка** прямоугольных координат относительно параметра σ.

Можно еще заметить, что возможны случаи, когда полная возмущающая сила складывается из нескольких возмущающих сил различной природы и содержит не один малый параметр σ, а два или несколько. Рассмотренный способ может быть распространен на этот более общий случай без всякого труда и вычисление последовательных приближений производится опять при помощи интегрирования систем линейных уравнений, общее решение которых составляется почти совершенно так же, как и выше.

3. Вычисление последовательных приближений координат, являющееся, как уже было замечено, весьма громоздким и трудоемким, может быть значительно упрощено и облегчено либо путем соответствующего выбора прямоугольной системы координат, либо путем использования цилиндрических или сферических координат вместо прямоугольных.

Действительно, ничто не может нам помешать выбрать основную систему координат таким образом, чтобы невозмущенное движение (которое происходит в некоторой неизменной плоскости) происходило в плоскости xOy. Иными словами, рассматривая уравнения возмущенного движения (12.86), мы можем заранее принять плоскость невозмущенной орбиты за плоскость $z=0$, а тогда мы будем иметь для всякого значения t

$$z^{(0)} \equiv 0, \qquad \dot{z}^{(0)} \equiv 0.$$

Из формул (12.91) для коэффициентов $p_{s\sigma}$ мы найдем тогда, что

$$p_{13} = p_{23} = p_{31} = p_{32} = 0,$$

вследствие чего всякая система (12.90) расщепится (или распадется) на две независимые системы, одна из которых определяет две неизвестные функции $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$, а вторая только одну — $z^{(k)}$. Такое же упрощение, как было замечено, может быть достигнуто и путем перехода к криволинейным координатам.

Рассмотрим, например, уравнения возмущенного движения в цилиндрических координатах ρ, λ, z, получающиеся из первоначальных уравнений (12.86) путем преобразования

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda, \tag{12.97}$$

причем

$$r^2 = \rho^2 + z^2. \tag{12.97'}$$

Используя общий метод Лагранжа, изложенный в гл. VI, или производя преобразование уравнений непосредственным путем, мы получим вместо уравнений (12.86) следующую систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{\mu\rho}{r^3} = \mathrm{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \mathrm{P}^{(k)},\\
&\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\lambda}{dt}\right) = \Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \Lambda^{(k)},\\
&\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \mathrm{Z} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \mathrm{Z}^{(k)},
\end{aligned}\right\} \tag{12.98}$$

где P, Λ, Z суть ряды такого же типа, как и ряды (12.85), т. е. суть ряды, расположенные по целым положительным степеням параметра σ, обращающиеся в нули при $\sigma=0$ и коэффициенты которых суть заданные функции времени, цилиндрических координат (12.97) и их первых производных по t.

Прежде всего заменим систему (12.98) другой системой, более удобной для приближенного интегрирования. Для этого проинтегрируем второе из уравнений (12.98) по t, заменяя, таким образом, дифференциальное уравнение для долготы λ уравнением интегральным, или даже интегро-дифференциальным.

Мы будем иметь после интегрирования

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = c + \int_{t_0}^{t} \Lambda\, dt = c + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^{t} \Lambda^{(k)}\, dt, \tag{12.99}$$

где c есть произвольная постоянная, представляющая собой, очевидно, постоянную площадей уравнений невозмущенного движения.

Исключая теперь из первого уравнения системы (12.98) производную $\frac{d\lambda}{dt}$, мы получим следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{c^2}{\rho^3} + \frac{\mu\rho}{r^3} = R = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k R^{(k)}, \\ &\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = Z = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Z^{(k)}, \\ &\frac{d\lambda}{dt} = \frac{c}{\rho^2} + L = \frac{c}{\rho^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k L^{(k)}, \end{aligned}\right\} \tag{12.98'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &R = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \left[P^{(k)} + \frac{2c^2}{\rho^3} \int_{t_0}^{t} \Lambda^{(k)}\, dt \right] + \frac{1}{\rho^3} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^{t} \Lambda^{(k)}\, dt \right\}^2, \\ &L = \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^{t} \Lambda^{(k)}\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{12.98''}$$

Так же как и в первом разделе этого параграфа, будем искать решение системы (12.98) в виде рядов, расположенных по степеням параметра σ, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \rho^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \rho^{(k)} = \rho^0 + \sigma\rho^{(1)} + \sigma^2\rho^{(2)} + \ldots, \\ &z = z^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k z^{(k)} = z^{(0)} + \sigma z^{(1)} + \sigma^2 z^{(2)} + \ldots, \\ &\lambda = \lambda^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \lambda^{(k)} = \lambda^{(0)} + \sigma\lambda^{(1)} + \sigma^2\lambda^{(2)} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{12.100}$$

где коэффициенты опять определяются формулами Тейлора, так что

$$\rho^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0},\quad z^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^kz}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0},\quad \lambda^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\lambda}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0}, \tag{12.100'}$$

а $\rho^{(0)}$, $z^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$ представляют решение уравнений невозмущенного движения и являются известными функциями времени и произвольных постоянных.

Для определения коэффициентов при σ^k в рядах (12.100) применяем такой же прием, как и выше, а именно, дифференцируем каждое из уравнений (12.98′) по параметру σ последовательно один, два, и т. д. раз, и вообще k раз.

В результате k-кратного дифференцирования получим следующие уравнения, которые должны выполняться тождественно, если ряды (12.100) удовлетворяют уравнениям (12.98′):

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}\right)+\frac{3c^2}{\rho^4}\left[\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}+\ldots\right]+\frac{\mu}{r^3}\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}-\\ -\frac{3\mu\rho}{r^5}\left[\rho\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}+z\frac{d^kz}{d\sigma^k}+\ldots\right]=\frac{d^kR}{d\sigma^k},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^kz}{d\sigma^k}\right)-\frac{3\mu z}{r^5}\left[\rho\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}+z\frac{d^kz}{d\sigma^k}+\ldots\right]=\frac{d^kZ}{d\sigma^k},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^k\lambda}{d\sigma^k}\right)=-\frac{2c^2}{\rho^3}\left[\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}+\ldots\right]+\frac{d^kL}{d\sigma^k}.$$

Невыписанные члены в этих уравнениях содержат производные ниже k-го порядка.

Полагая теперь в этих равенствах $\sigma=0$ и имея в виду формулы (12.100), мы получим уравнения, определяющие коэффициенты при k-й степени σ в рядах (12.100):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\rho^{(k)}}{dt^2}+\left(\frac{3c^2}{\rho^{(0)4}}+\frac{\mu}{r^{(0)3}}\right)\rho^{(k)}-\frac{3\mu\rho^{(0)}}{r^{(0)5}}\left[\rho^{(0)}\rho^{(k)}+z^{(0)}z^{(k)}\right]=R_k,\\ &\frac{d^2z^{(k)}}{dt^2}-\frac{3\mu z^{(0)}}{r^{(0)5}}\left[\rho^{(0)}\rho^{(k)}+z^{(0)}z^{(k)}\right]=Z_k,\\ &\frac{d\lambda^{(k)}}{dt}=-\frac{2c^2}{\rho^{(0)3}}\rho^{(k)}+L_k.\end{aligned}\right\} \tag{12.101}$$

Если все коэффициенты рядов (12.100) при степенях σ, меньших k, уже определены, то правые части последних уравнений суть известные функции времени и уравнения (12.101) представляют собой систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными функциями $\rho^{(k)}$ и $z^{(k)}$ и одно уравнение, определяющее $\lambda^{(k)}$ простой квадратурой.

Решение системы двух линейных уравнений может быть получено при помощи теоремы Пуанкаре таким же путем, как и решение более сложной системы (12.90′). Если же за плоскость xOy принять плоскость невозмущенной орбиты, то $z^{(0)}=0$, и система (12.101) приведется к следующей:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho^{(k)}}{dt^2}+\left(\frac{3c^2}{\rho^{(0)^4}}-\frac{2\mu}{\rho^{(0)^3}}\right)\rho^{(k)}=R_k,\\ &\frac{d^2z^{(k)}}{dt^2}=Z_k,\\ &\frac{d\lambda^{(k)}}{dt}=-\frac{2c^2}{\rho^{(0)^3}}\rho^{(k)}+L_k. \end{aligned}\right\} \qquad (12.101')$$

Таким образом, вся задача сводится к интегрированию одного-единственного линейного уравнения, определяющего $\rho^{(k)}$, зная которое мы найдем $z^{(k)}$ и $\lambda^{(k)}$ простыми квадратурами. Решение линейного уравнения второго порядка с неизвестной $\rho^{(k)}$ может быть написано сразу, в явном виде, опять-таки при помощи использования теоремы Пуанкаре.

Разумеется, интегрирование уравнений (12.98) может быть произведено аналогичным образом и в том случае, когда имеется несколько возмущающих сил различной природы.

§ 7. Приближенное интегрирование уравнений Ньютона

1. Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения в виде (12.42) или (12.84), определяющие кеплеровские элементы оскулирующей орбиты движущейся точки.

Обозначим для краткости элементы орбиты одной буквой $э_s$ ($s=1, 2, \ldots, 6$), так что система дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов запишется в сжатом виде следующим образом:

$$\frac{dэ_s}{dt}=F_s(t\,|\,э_j), \qquad (12.102)$$

где правые части суть известные функции времени и всех элементов $э_1, э_2, \ldots, э_6$.

Предположим сначала, что составляющие возмущающего ускорения определяются формулами типа (12.85), т. е. разложимы в ряды, расположенные по целым возрастающим степеням параметра σ. Тогда, очевидно, и величины $\widetilde{S}$, $\widetilde{T}$, $\widetilde{W}$ в силу (12.24) и (12.25) также могут быть представлены в виде рядов, расположенных по степеням σ, а следовательно, и все правые части уравнений (12.42) являются функциями, обладающими тем же свойством.