Решение системы двух линейных уравнений может быть получено при помощи теоремы Пуанкаре таким же путем, как и решение более сложной системы (12.90′). Если же за плоскость xOy принять плоскость невозмущенной орбиты, то $z^{(0)}=0$, и система (12.101) приведется к следующей:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\rho^{(k)}}{dt^2}+\left(\frac{3c^2}{\rho^{(0)4}}-\frac{2\mu}{\rho^{(0)3}}\right)\rho^{(k)}=R_k,\\
&\frac{d^2z^{(k)}}{dt^2}=Z_k,\\
&\frac{d\lambda^{(k)}}{dt}=-\frac{2c^2}{\rho^{(0)3}}\rho^{(k)}+L_k.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.101')$$

Таким образом, вся задача сводится к интегрированию одного-единственного линейного уравнения, определяющего $\rho^{(k)}$, зная которое мы найдем $z^{(k)}$ и $\lambda^{(k)}$ простыми квадратурами. Решение линейного уравнения второго порядка с неизвестной $\rho^{(k)}$ может быть написано сразу, в явном виде, опять-таки при помощи использования теоремы Пуанкаре.

Разумеется, интегрирование уравнений (12.98) может быть произведено аналогичным образом и в том случае, когда имеется несколько возмущающих сил различной природы.

§ 7. Приближенное интегрирование уравнений Ньютона

1. Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения в виде (12.42) или (12.84), определяющие кеплеровские элементы оскулирующей орбиты движущейся точки.

Обозначим для краткости элементы орбиты одной буквой $э_s$ ($s=1, 2, \ldots, 6$), так что система дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов запишется в сжатом виде следующим образом:

$$\frac{dэ_s}{dt}=F_s(t\,|\,э_j),\qquad(12.102)$$

где правые части суть известные функции времени и всех элементов $э_1, э_2, \ldots, э_6$.

Предположим сначала, что составляющие возмущающего ускорения определяются формулами типа (12.85), т. е. разложимы в ряды, расположенные по целым возрастающим степеням параметра σ. Тогда, очевидно, и величины $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{W}$ в силу (12.24) и (12.25) также могут быть представлены в виде рядов, расположенных по степеням σ, а следовательно, и все правые части уравнений (12.42) являются функциями, обладающими тем же свойством.

Поэтому мы можем положить

$$F_s(t \mid э_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{(k)} F_s^{(k)}(t \mid э_j), \tag{12.102'}$$

где все коэффициенты суть известные функции времени и элементов. Ряды (12.102'), так же как и ряды (12.85), будут абсолютно сходящимися в некотором промежутке изменения t и в некоторой области изменения величин $э_j$, содержащей в себе начальную точку $э_j^{(0)}$ (начальные значения оскулирующих элементов для начального момента t_0).

Решение системы (12.102) будем искать (так же как и в предыдущем параграфе) в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням параметра σ, т. е. положим

$$э_s = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k э_s^{(k)} = э_s^{(0)} + \sigma э_s^{(1)} + \sigma^2 э_s^{(2)} + \ldots \tag{12.103}$$

Легко видеть, что все коэффициенты этих рядов определяются последовательно, в порядке возрастания k, квадратурами и притом гораздо более простыми, чем, например, квадратуры (12.95). Для нахождения этих коэффициентов применим тот же прием, как и выше, замечая, что ряды (12.103) суть ряды Тейлора и что, следовательно,

$$э_s^{(k)} = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k э_s}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0}. \tag{12.103'}$$

Прежде всего очевидно, что все $э_s^{(0)}$ суть постоянные, за которые можно принять начальные значения кеплеровских элементов, соответствующих начальной эпохе t_0.

Далее, дифференцируя уравнения (12.102) по σ, предполагая, что $э_s$ суть функции σ, определяемые формулами (12.103), и полагая $\sigma=0$, мы получим уравнения первого приближения:

$$\frac{dэ_s^{(1)}}{dt} = F_s^{(1)}(t \mid э_j^{(0)}), \tag{12.104}$$

правые части которых суть, очевидно, известные функции времени.

Будем считать для простоты, что в начальный момент t_0 все величины $э_s^{(k)}$ обращаются в нуль. Тогда из (12.104) мы имеем

$$э_s^{(1)} = \int_{t_0}^{t} F_s^{(1)}(t \mid э_j^{(0)})\, dt. \tag{12.104'}$$

Поэтому в первом приближении выражения для неизвестных функций (оскулирующих элементов) имеют вид

$$э_s \cong \tilde{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \delta^{(1)} э_s. \qquad (12.104'')$$

Величины

$$\delta^{(1)} э_s = \sigma э_s^{(1)}$$

называются возмущениями первого порядка оскулирующих кеплеровских элементов $э_s$ относительно параметра σ.

Дифференцируя уравнения (12.102) по параметру σ два раза подряд и полагая после дифференцирования опять $\sigma=0$, мы получим уравнения для второго приближения, которые, как нетрудно видеть, имеют следующий вид:

$$\frac{dэ_s^{(2)}}{dt} = F_s^{(2)}(t \mid э_j^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} э_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial э_i}\right]_{\sigma=0}. \qquad (12.105)$$

Так как величины $э_i^{(1)}$ уже определены и даются формулами (12.104′), то (считая, как условлено, что в начальный момент все $э_s^{(2)}$ равны нулю) мы найдем из (12.105)

$$э_s^{(2)} = \int_{t_0}^{t} \left\{ F_s^{(2)}(t \mid э_j^{(0)}) + \sum_{i=1}^{6} э_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial э_i}\right]_{\sigma=0} \right\} dt. \qquad (12.105')$$

Поэтому во втором приближении мы имеем

$$э_s \cong \tilde{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \delta^{(1)} э_s + \delta_s^{(2)} э_s, \qquad (12.105'')$$

и величины

$$\delta^{(2)} э_s = \sigma^2 э_s^{(2)}$$

называются возмущениями второго порядка относительно σ.

Подобным же образом можно определить третье, четвертое и сколько угодно последующих приближений. Легко видеть, что уравнения какого-либо k-го приближения вообще будут иметь следующую форму:

$$\frac{dэ_s^{(k)}}{dt} = E_s^{(k)}(t \mid э_j^{(0)} \mid э_j^{(1)} \mid \ldots \mid э_j^{(k-1)}), \qquad (12.106)$$

причем правые части этих уравнений будут многочленами относительно величин $э_j^{(1)}, э_j^{(2)}, \ldots, э_j^{(k-1)}$, коэффициенты которых суть известные функции времени. Поэтому если предыдущие $k-1$ приближений уже определены, то правые части уравнений (12.106) являются известными функциями времени, и мы получим (считая опять, что в начальный момент все величины $э_s^{(k)}$ — нули)

$$э_s^{(k)} = \int_{t_0}^{t} E_s^{(k)}(t \,|\, э_j^{(0)} \,|\, э_j^{(1)} \,|\, \ldots \,|\, э_j^{(k-1)})\,dt. \qquad (12.106')$$

Таким образом, мы определим k-е приближение формулами

$$э_s \cong \tilde{э}_s^{(k)} = э_s^{(0)} + \sigma э_s^{(1)} + \ldots + \sigma^k э_s^{(k)}, \qquad (12.106'')$$

и величины

$$\delta^{(k)} э_s = \sigma^k\, э_s^{(k)}$$

назовем возмущениями k-го порядка относительно σ.

К полученным рядам опять можно применить уже упомянутую общую теорему А. М. Ляпунова, вследствие которой ряды (12.103) заведомо будут абсолютно и равномерно сходящимися в некотором промежутке $(t_0 - \bar{t},\ t_0 + \bar{t})$, где предел $\bar{t}$ зависит от σ, вообще увеличиваясь при уменьшении σ.

Но обыкновенно на практике пользуются большей частью одним только первым приближением, иногда вторым и очень редко третьим, дальше которого уже почти никогда не идут. Это объясняется не только громоздкостью выкладок, сложность которых быстро растет по мере увеличения числа приближений, но также и тем, что в большинстве конкретных случаев уже одно первое приближение дает результаты, достаточно близкие к действительности.

2. Если уравнения (12.102) не содержат никакого малого параметра, то последний всегда можно ввести искусственно, разумеется, в таких задачах, в которых возмущающая сила мала по сравнению с основной движущей силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния движущейся точки от начала координат.

Но для приближенного интегрирования уравнений (12.102) можно также применить метод последовательных приближений Пикара; к рассмотрению этого метода мы и переходим *).

Процедура применения метода Пикара может быть описана следующим образом: заменим в правых частях уравнений (12.102) все неизвестные функции $э_s$ их начальными значениями $э_s^{(0)}$.

---

*) См., например, В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е, Гостехиздат, 1953, а также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3 (любое издание).

Тогда уравнения (12.102) превратятся в уравнения первого приближения, которые напишем следующим образом:

$$\frac{d\bar{э}_s^{(1)}}{dt} = F_s\left(t \mid э_j^{(0)}\right). \tag{12.107}$$

Так как правые части этих равенств — известные функции времени, то простое интегрирование дает следующие формулы для вычисления первого приближения:

$$\bar{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} F_s\left(t \mid э_j^{(0)}\right) dt. \tag{12.107'}$$

Подставляя теперь в правые части уравнений (12.102) вместо $э_s$ их значения $\bar{э}_s^{(1)}$, полученные в первом приближении, мы будем иметь уравнения второго приближения

$$\frac{d\bar{э}_s^{(2)}}{dt} = F_s\left(t \mid \bar{э}_j^{(1)}\right), \tag{12.108}$$

правые части которых опять являются известными функциями времени.

Поэтому, интегрируя эти равенства, мы найдем второе приближение в виде

$$\bar{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} F_s\left(t \mid \bar{э}_j^{(1)}\right) dt. \tag{12.108'}$$

Таким же образом поступаем и далее. Вообще, зная значения неизвестных функций $э_s$ в некотором $(k-1)$-м приближении, мы определим k-е приближение по формулам такого же типа, как (12.107') и (12.108'):

$$\bar{э}_s^{(k)} = э_s^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} F_s\left(t \mid \bar{э}_j^{(k-1)}\right) dt. \tag{12.109}$$

На практике опять-таки обыкновенно ограничиваются получением одного только первого приближения (иногда рассматривается также второе), но с принципиальной стороны можно получить сколько угодно приближений.

На основании теоремы Пикара *) мы можем утверждать, что при достаточно общих предположениях относительно функций $F_s(t \mid э_j)$ процесс последовательных приближений, определяемый

*) См. уже указанные выше учебники, а также любой современный курс теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

рекуррентным соотношением (12.109), будет сходящимся при $k \to \infty$ и предельные функции

$$э_s = \lim_{k\to\infty} \bar{э}_s^{(k)},$$

обращаясь при $t=t_0$ в $э_s^{(0)}$, будут удовлетворять уравнениям (12.102), каковы бы ни были допустимые числовые значения величин $э_s^{(0)}$ играющих роль произвольных постоянных.

Таким образом, метод Пикара даст нам общее решение уравнений возмущенного движения вида (12.102).

3. Способ Пикара может быть, конечно, применен и в том случае, когда правые части уравнений (12.102) содержат малый параметр, например, когда функции $F_s(t \mid э_j)$ определяются рядами вида (12.102′). Но полезно заметить, что приближения одного и того же номера k, полученные независимо двумя рассмотренными способами, вовсе не совпадают, что выясняется уже при рассмотрении первого приближения. Действительно, по способу малого параметра первое приближение определится формулами

$$\tilde{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^{t} F_s^{(1)}(t \mid э_j^{(0)})\,dt,$$

правые части которых суть линейные функции параметра σ, а по способу Пикара первое приближение нужно вычислять по формулам

$$\bar{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^{t} F_s^{(k)}(t \mid э_j^{(0)})\,dt,$$

правые части которых суть бесконечные ряды, расположенные по степеням параметра σ.

Разумеется и во всех последующих приближениях эти два способа будут приводить к различным результатам, так как по способу малого параметра k-е приближение приводит нас к многочленам степени k относительно параметра σ, а способ Пикара в любом приближении дает бесконечные ряды, расположенные по степеням σ.

Рассмотрим теперь один частный случай, когда правые части уравнений (12.102) содержат параметр σ только множителем, т. е. когда в формулах (12.102′) все $F_s^{(k)}$ для $k>1$ равны нулю, так что мы имеем

$$F_s(t \mid э_j) = \sigma F_s^*(t \mid э_j). \tag{12.110}$$

Тогда по способу малого параметра первое приближение определится формулами $(F_s^{(1)} \equiv F_s^*)$

$$\tilde{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)})\, dt, \qquad (12.110')$$

а по способу Пикара мы получим

$$\bar{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)})\, dt. \qquad (12.110'')$$

Ясно, что

$$\tilde{э}_s^{(1)} \equiv \bar{э}_s^{(1)},$$

так что для первого приближения оба способа дают одинаковые результаты.

Для второго приближения в случае (12.110) мы имеем из (12.105′) следующие формулы:

$$\tilde{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)})\, dt + \sigma^2 \sum_{i=1}^{6} \int_{t_0}^{t} э_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^*}{\partial э_i}\right]_{\sigma=0} dt, \qquad (12.111)$$

а по способу Пикара имеем по формулам (12.108′)

$$\bar{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)} + \sigma э_j^{(1)})\, dt, \qquad (12.111')$$

откуда следует, что в рассматриваемом частном случае уже для второго приближения два способа дают разные результаты.

Однако если правые части равенства (12.111′) разложить в ряды по степеням σ, то мы получим

$$\bar{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)})\, dt + \sigma^2 \sum_{i=1}^{6} \int_{t_0}^{t} э_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^*}{\partial э_i}\right]_{\sigma=0} dt + \ldots, \qquad (12.111'')$$

так что если ограничиться рассмотрением членов только первого и второго порядков относительно σ, то оба способа опять дадут одинаковые результаты.

Но вообще нужно иметь в виду, что термин «k-е приближение» в способе малого параметра и в способе Пикара имеет *разный смысл*, а поэтому и неудивительно, что для приближения одного и того же номера разными способами получаются разные результаты.

Заметим еще, что способ Пикара, конечно, является более общим, чем способ малого параметра, и может быть применен, например, и в том случае, когда возмущающая сила зависит от малого параметра не аналитическим путем и первый способ непосредственно не применим.

4. В заключение этого параграфа рассмотрим в общих чертах, какова аналитическая структура функций $э_s$ в случае (наиболее часто встречающемся), когда возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу, т. е. когда мы имеем постоянно (или по крайней мере в течение некоторого промежутка времени) неравенство

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} < 0.$$

Тогда за величины $э_s$ удобнее взять оскулирующие элементы эллиптической орбиты Ω, i, a, e, π, ε, определяемые дифференциальными уравнениями (12.65) или (12.72).

Предположим сначала, что возмущающая сила не зависит явно от времени t и содержит простейшим образом (т. е. в виде множителя) некоторый малый параметр σ. Тогда составляющие возмущающего ускорения будут функциями только от координат и составляющих скорости движущейся точки, имея множителем малый параметр σ. Но координаты и составляющие скорости невозмущенного эллиптического движения разложимы, как показано в гл. II, в ряды Фурье, расположенные по синусам и косинусам средней аномалии M. Поэтому таким же характером будут обладать и функции F_s^*, и уравнения (12.102) могут быть написаны для рассматриваемого случая в следующем общем виде:

$$\frac{dэ_s}{dt} = \sigma\left\{A_s^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_s^{(k)}\cos kM + B_s^{(k)}\sin kM\right]\right\}, \qquad (12.112)$$

где величины $A_s^{(0)}$, $A_s^{(k)}$, $B_s^{(k)}$ суть некоторые функции от элементов Ω, i, a, e, π, но не зависят от средней долготы эпохи ε, которая входит в правые части уравнений (12.112) только через посредство средней аномалии M.

Функциональный характер коэффициентов рядов (12.112) мы уточнять здесь не будем и заметим только, что долготы узла и перицентра входят в эти коэффициенты только под знаками синусов и косинусов, а относительно e и i эти коэффициенты можно представить в виде степенных рядов, расположенных по целым положительным степеням этих величин.

Рассмотрим получение первого приближения в задаче интегрирования уравнений (12.112), которое, как установлено выше, в данном случае определяется одними и теми же формулами независимо от применяемого способа.

Итак, заменим в правых частях уравнений (12.112) все элементы их постоянными начальными значениями, вследствие чего все коэффициенты в уравнениях (12.112) сделаются постоянными величинами, которые обозначим соответственно через $A_{s0}^{(0)}$, $A_{s0}^{(k)}$, $B_{s0}^{(k)}$; тогда уравнения первого приближения напишутся следующим образом:

$$\frac{d\bar{э}_s^{(1)}}{dt} = \sigma\left\{A_{s0}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{s0}^{(k)}\cos kM + B_{s0}^{(k)}\sin kM\right],\right. \tag{12.112'}$$

где $M = n_0(t - t_0) + \varepsilon_0 - \pi_0$.

Интегрируя эти равенства, мы получим, очевидно,

$$\bar{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \delta^{(1)}э_s = \bar{э}_s^{(0)} + \sigma A_{s0}^{(0)}(t - t_0) + \\ + \sigma\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_{s0}^{(k)}}{kn_0}\sin kM - \frac{B_{s0}^{(k)}}{kn_0}\cos kM\right], \tag{12.112''}$$

где положено для краткости

$$\bar{э}_s^{(0)} = э_s^{(0)} + \sigma\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{A_{s0}^{(k)}}{kn_0}\sin k(\varepsilon_0 - \pi_0) + \frac{B_{s0}^{(k)}}{kn_0}\cos k(\varepsilon_0 - \pi_0)\right].$$

Формула (12.112″) показывает, что возмущение первого порядка элемента состоит из трех аналитически различных частей.

Первая из этих частей есть величина постоянная, зависящая от начальных значений элементов, и ее можно назвать *постоянной частью возмущения первого порядка* и можно объединить с начальным значением элемента $э_s^{(0)}$; вторая часть, состоящая из одного-единственного члена $\sigma A_{s0}^{(0)}(t - t_0)$, монотонно возрастает по числовой величине вместе с временем; ее называют *вековой частью возмущения первого порядка* или, короче, *вековым неравенством*; наконец, третья часть, состоящая из бесчисленного множества тригонометрических членов, является периодической функцией от M, а следовательно, и периодической функцией от времени, и называется *периодической частью возмущения первого порядка*, или просто *периодическим возмущением*.

Периодическое возмущение первого порядка состоит, как уже сказано, из бесчисленного множества членов, каждый из которых называется *периодическим неравенством*.

Каждое периодическое неравенство является периодической функцией времени с периодом $2\pi/n_0$ или, если говорить только о наименьшем периоде, с периодом $2\pi/kn_0$.

Итак, возмущение первого порядка каждого элемента оскулирующей эллиптической орбиты состоит из постоянного неравенства, векового неравенства и бесчисленного множества периодических неравенств.

Иногда каждый член формулы (12.112″) называют возмущением первого порядка, и в таком случае говорят, что полное возмущение первого порядка состоит из векового возмущения и из бесчисленного множества периодических возмущений *).

Если мы рассмотрим теперь возмущения второго порядка относительно параметра σ, то легко убедимся, что такое возмущение, кроме вековых и периодических членов такого же характера, как и в первом приближении, будет содержать еще члены вида

$$\sigma^2 A(t-t_0)^2, \quad \sigma^2(t-t_0)\left\{\begin{matrix} A\cos \\ B\sin \end{matrix}(kM)\right\},$$

где A и B обозначают какие-то постоянные.

Члены первого рода называются вековыми неравенствами второго порядка и второй степени, а члены второго рода называют смешанными неравенствами второго порядка.

Далее, при рассмотрении возмущений более высоких порядков, мы будем получать, как нетрудно сообразить, исключительно члены вида

$$\sigma^{k_1}(t-t_0)^{k_2}\left\{\begin{matrix} A\cos \\ B\sin \end{matrix}(kM)\right\} \qquad (k_1 \geqslant 1, \quad k_2 \geqslant 0, \quad k \geqslant 0),$$

где, как и выше, A и B обозначают какие-то постоянные, зависящие от начальных значений долгот узлов и перицентров, от начальных значений больших полуосей, эксцентриситетов и наклонностей, а также от параметров, характеризующих возмущающую силу.

Таким образом, мы видим, что каждый элемент в возмущенном движении будет состоять из бесчисленного множества вековых (когда $k=0$), периодических (когда $k_2=0$) и смешанных неравенств. Следовательно, общее выражение для любого элемента представится формулой вида

$$э_s = \overline{э}_s^{(0)} + \sum_{k,\, k_1,\, k_2} \sigma^{k_1}(t-t_0)^{k_2}[A\cos kM + B\sin kM]. \qquad (12.113)$$

На основании общих теорем существования обыкновенных дифференциальных уравнений мы можем утверждать, что ряды типа (12.113) будут оставаться сходящимися по крайней мере в течение некоторого, вообще небольшого, промежутка времени. Однако, основываясь на рассмотрении отдельных членов этих рядов, нельзя делать каких-либо общих выводов и заключений о поведении функций, являющихся

*) Совершенно такая же терминология употребляется и при рассмотрении возмущений первого порядка прямоугольных или полярных координат.

суммами этих рядов на больших промежутках времени, а тем более для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Тем не менее рассмотренная классификация отдельных членов рядов (12.113) оказывается полезной на практике, так как позволяет из множества членов всякого рода отбирать наиболее влиятельные в числовом отношении, с чем неизбежно приходится встречаться в практических приложениях теории возмущенного движения.

Отметим еще некоторую интересную особенность случая, когда существует возмущающая функция R, не зависящая явно от времени. Тогда изменения оскулирующих элементов определяются уравнениями (12.72), а возмущающая функция R также может быть представлена рядом вида

$$R=\sigma\left\{A^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A^{(k)}\cos kM+B^{(k)}\sin kM\right]\right\}, \qquad (12.114)$$

коэффициенты которого, так же как и в общем случае, не зависят от средней долготы эпохи ε.

Поэтому из (12.114) имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}=\sigma\sum_{k=1}^{\infty}\left[-kA^{(k)}\sin kM+kB^{(k)}\cos kM\right]; \qquad (12.114')$$

эта производная не содержит свободного члена, т. е. члена, не зависящего от средней аномалии, а тем самым и от времени.

Отсюда следует, что для большой полуоси оскулирующего эллипса мы имеем в первом приближении ($\bar{a}_0=\mathrm{const}$)

$$a=\bar{a}_0+\frac{2\sigma}{n_0 a_0}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_0^{(k)}}{n_0}\cos kM-\frac{B_0^{(k)}}{n_0}\sin kM\right]. \qquad (12.114'')$$

Таким образом, мы приходим к важному заключению, которое можно назвать теоремой Лапласа.

Теорема Лапласа. Если возмущающая сила допускает силовую функцию (возмущающую функцию R), не зависящую явно от времени, то полное возмущение первого порядка большой полуоси не содержит в себе векового неравенства.

Возмущения первого порядка (а тем более и следующих порядков) всех остальных элементов оскулирующей орбиты вообще содержат вековые члены, так как в уравнениях (12.112) свободный член $A_s^{(0)}$ не равен нулю.

Если ограничиться только рассмотрением этих вековых членов в возмущениях первого порядка, то в первом приближении оскулирующие элементы $э_s$ можно представить следующими простыми формулами:

$$э_s \cong э_s^{(0)} + \sigma A_{s0}^{(0)} (t - t_0), \tag{12.115}$$

где все $A_{s0}^{(0)}$ имеют определенные числовые значения.

Если окажется, что какой-нибудь из коэффициентов $A_{s0}^{(0)}$ равен нулю, или настолько численно мал, что его можно принять равным нулю, то соответствующий элемент не будет иметь векового неравенства (в первом приближении!) и его можно рассматривать как величину постоянную.

5. Рассмотрим теперь случай, когда возмущающая сила зависит явно от времени, являясь некоторой периодической функцией от некоторой величины M', пропорциональной времени, так что

$$M' = n_0'(t - t_0) + M_0'.$$

Тогда составляющие возмущающего ускорения и возмущающая функция (в случае, когда последняя существует) являются периодическими функциями от двух независимых аргументов M и M' и могут быть разложены в двойные ряды Фурье по синусам и косинусам линейных комбинаций с целыми коэффициентами величин M и M'.

Таким же характером будут обладать и функции $F_s(t | э_j)$, и уравнения (12.102) могут быть написаны для этого случая в следующем общем виде:

$$\frac{dэ_s}{dt} = \sigma \Big\{ A_s^{(0,\,0)} + \sum \big[A_s^{(k,\,k')} \cos(kM + k'M') + \\ + B_s^{(k,\,k')} \sin(kM + k'M') \big] \Big\}, \tag{12.116}$$

где суммирование распространяется на все целые значения индексов k и k', за исключением случая $k = k' = 0$, соответствующего свободному члену, а все коэффициенты являются некоторыми известными функциями от элементов оскулирующего эллипса a, e, i, Ω, π, но так же как и выше, не зависят от средней долготы эпохи ε, которая входит в уравнения (12.116) только посредством средней аномалии $M = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi$. Эти коэффициенты зависят также от некоторых параметров, характеризующих возмущающую силу и считающихся здесь величинами постоянными, так же как и величины n_0' и M_0'.

Рассмотрим опять первое приближение, для чего нужно заменить в правых частях уравнений (12.116) все элементы $э_s$ их постоянными начальными значениями, вследствие чего все коэффициенты двойного ряда сделаются величинами постоянными, а аргументы тригонометрических членов примут следующий вид:

$$kM + k'M' = (kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D. \tag{12.116'}$$

где положено для краткости

$$D = k(\varepsilon_0 - \pi_0) + k' M_0'.$$

Уравнения первого приближения напишутся тогда следующим образом:

$$\frac{d\bar{э}_s^{(1)}}{dt} = \sigma\Big\{A_{s0}^{(0,\,0)} + \sum \big[A_{s0}^{(k,\,k')} \cos\left[(kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D\right] + $$
$$+ B_{s0}^{(k,\,k')} \sin\left[(kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D\right]\big]\Big\}. \qquad (12.117)$$

Переходя теперь к выполнению интегрирования, заметим, что мы должны различать два случая.

1-й случай. Средние движения n_0 и n_0' суть числа несоизмеримые. Тогда сумма $kn_0 + k'n_0'$ может обратиться в нуль только при $k = k' = 0$, что соответствует свободному члену ряда Фурье $A_{s0}^{(0,\,0)}$. Поэтому если $A_{s0}^{(0,\,0)} \neq 0$, то после интегрирования мы получим в выражении соответствующего элемента один вековой член (т. е. член, пропорциональный времени) и бесчисленное множество периодических членов, происходящих от интегрирования синусов и косинусов. Аналитическое выражение для элемента $э_s$ в первом приближении будет иметь следующий вид:

$$\bar{э}_s^{(1)} = \bar{э}_s^{(0)} + \delta_c^{(1)} э_s + \delta_p^{(1)} э_s, \qquad (12.118)$$

где

$$\bar{э}_s^{(0)} = э_s^{(0)} + \sigma \sum \frac{B_{s0}^{(k,\,k')} \cos D - A_{s0}^{(k,\,k')} \sin D}{kn_0 + k'n_0'} \qquad (12.118')$$

есть величина постоянная,

$$\delta_c^{(1)} э_s = \sigma A_{s0}^{(0,\,0)} (t - t_0) \qquad (12.118'')$$

есть вековая часть возмущения первого порядка (вековое неравенство или вековое возмущение) и

$$\delta_p^{(1)} э_s = \sigma \sum \left[\frac{A_{s0}^{(k,\,k')}}{kn_0 + k'n_0'} \sin\left[(kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{B_{s0}^{(k,\,k')}}{kn_0 + k'n_0'} \cos\left[(kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D\right]\right] \qquad (12.118''')$$

представляет собой периодическую часть возмущения первого порядка, состоящую из суммы бесчисленного множества периодических неравенств.

Различные периодические неравенства разделяют обычно на две группы, в зависимости от величины делителя $kn_0 + k'n_0'$.

а значит, и от величины периода соответствующего неравенства, который определяется формулой

$$T_{k,\,k'} = \frac{2\pi}{kn_0 + k'n'_0}. \qquad (12.118^{IV})$$

Действительно, если k и k' таковы, что этот делитель есть величина конечная, или даже достаточно большая, то период соответствующего неравенства будет конечным, или даже весьма малым. Соответствующие неравенства называются по этой причине к о р о т к о п е р и о д и ч е с к и м и. Их амплитуды, как видно из (12.118‴) также вообще весьма малы и такие члены могут играть роль только в течение очень небольшого промежутка времени.

Если же индексы k и k' имеют такие значения, что сумма $kn_0 + k'n'_0$ есть величина численно малая (такие делители называются м а л ы м и д е л и т е л я м и), то период соответствующего неравенства будет весьма большим и по этой причине такие неравенства называются д о л г о п е р и о д и ч е с к и м и. Периоды таких долгопериодических неравенств из-за малого знаменателя могут иметь заметные значения, вследствие чего такие неравенства играют значительную роль в теории возмущений, особенно когда рассматриваются большие промежутки времени.

2-й случай. Средние движения n_0 и n'_0 соизмеримы, т. е. отношение $n_0 : n'_0$ равно отношению двух целых чисел $r : r'$. Тогда при значениях индексов $\bar{k} = \nu r'$ и $\bar{k}' = -\nu r$, где $\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ мы будем иметь

$$\bar{k}n_0 + \bar{k}'n'_0 = \nu(n_0 r' - n'_0 r) = 0,$$

и соответствующие члены в (12.117) суть величины постоянные, которые можно присоединить к свободному члену, что изменит коэффициент векового неравенства.

После интегрирования равенства (12.117) в этом случае мы опять получим для элемента ϑ_s в первом приближении выражение вида (12.118), но в формулах (12.118′) и (12.118‴) суммы распространяются на все значения индексов, за исключением значений $k = \bar{k}$ и $k' = \bar{k}'$, а вековое неравенство представится формулой

$$\delta_c^{(1)} \vartheta_s = \sigma A_{s0}(t - t_0), \qquad (12.119)$$

где

$$A_{s0} = A_{s0}^{(0,\,0)} + \sum \left[A_{s0}^{(\bar{k},\,\bar{k}')} \cos \bar{D} + B_{s0}^{(\bar{k},\,\bar{k}')} \sin \bar{D}\right] \qquad (12.119')$$

и

$$\bar{D} = \bar{k}(\varepsilon_0 - \pi_0) + \bar{k}'M'_0.$$

Периодические неравенства в этом случае также можно подразделить на короткопериодические и долгопериодические, в зависимости от величины периода.

В заключение рассмотрим случай, когда возмущающая сила, зависящая от времени, допускает, кроме того, силовую (возмущающую) функцию. Тогда возмущающая функция представится рядом вида

$$R=\sigma\left\{A^{(0,\,0)}+\sum\left[A^{(k,\,k')}\cos(kM+k'M')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B^{(k,\,k')}\sin(kM+k'M')\right]\right\}, \qquad (12.120)$$

коэффициенты которого не зависят от средней долготы эпохи.

Поэтому из (12.120) мы имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}=\sigma\sum\left[-kA^{(k,\,k')}\sin(kM+k'M')+\right.$$
$$\left.+kB^{(k,\,k')}\cos(kM+k'M')\right]. \qquad (12.120')$$

Заменяя здесь все элементы их постоянными начальными значениями и обозначая соответствующее значение частной производной через $\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)_0$, мы получим, интегрируя равенство

$$\frac{d\bar{a}^{(1)}}{dt}=\frac{2}{n_0 a_0}\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)_0,$$

аналитическое выражение для большой полуоси в первом приближении.

Если средние движения несоизмеримы, то в результате интегрирования мы получим только периодические члены, и рассмотренная выше теорема Лапласа об отсутствии вековых возмущений большой полуоси останется справедливой.

Но в случае, когда средние движения соизмеримы, в выражении для $\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)_0$ будет присутствовать бесчисленное множество членов, не зависящих от времени, в результате чего в возмущении первого порядка большой полуоси появится **вековой член**, и теорема Лапласа не имеет в этом случае места.