ГЛАВА XIII

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в основной задаче небесной механики

1. Основной задачей небесной механики мы назвали в первой части этой книги задачу о движении системы, состоящей из $n+1$ материальных точек M_0, M_1, M_2, ..., M_n, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Так как главная задача заключается в определении относительных движений небесных тел, то отнесем n точек M_1, ..., M_n к системе прямоугольных декартовых координат с неизменными направлениями осей и с началом в точке M_0, которую, по тем или иным причинам, нам удобно рассматривать как главную.

Обозначим, как и ранее, относительные координаты точки M_s в этой системе координат через x_s, y_s, z_s, а через

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}$$

ее радиус-вектор, т. е. расстояние $\overline{M_0 M_s}$.

Дифференциальные уравнения относительного движения мы можем написать в следующем общем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_s &= -\frac{\mu_s x_s}{r_s^3} + X_s, \\ \ddot{y}_s &= -\frac{\mu_s y_s}{r_s^3} + Y_s, \\ \ddot{z}_s &= -\frac{\mu_s z_s}{r_s^3} + Z_s, \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

где μ_s — постоянные, определяемые формулой

$$\mu_s = f(m_0 + m_s),$$

причем m_0 есть масса главного гела — точки M_s, а m_s — масса движущейся точки M_s.

Величины X_s, Y_s, Z_s суть составляющие возмущающего ускорения для точки M_s, которые определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} X_s &= f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left(\frac{x_j - x_s}{\Delta_{sj}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right), \\ Y_s &= f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left(\frac{y_j - y_s}{\Delta_{sj}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right), \\ Z_s &= f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left(\frac{z_j - z_s}{\Delta_{sj}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right), \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

где

$$\Delta_{sj} = \sqrt{(x_s - x_j)^2 + (y_s - y_j)^2 + (z_s - z_j)^2}$$

есть взаимное расстояние между точками M_s и M_j.

Как показано в гл. VII, составляющие возмущающего ускорения для точки M_s можно рассматривать как частные производные по координатам этой точки от возмущающей функции R_s, которая определяется формулой

$$R_s = f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j R_{sj}, \tag{13.3}$$

где

$$R_{sj} = \frac{1}{\Delta_{sj}} - \frac{x_s x_j + y_s y_j + z_s z_j}{r_j^3}. \tag{13.3'}$$

Таким образом, задача о поступательном движении системы тел-точек приводится к интегрированию системы совместных дифференциальных уравнений (13.1) при заданных начальных условиях, которыми являются начальные значения

$$x_s^{(0)}, \quad y_s^{(0)}, \quad z_s^{(0)}, \quad \dot{x}_s^{(0)}, \quad \dot{y}_s^{(0)}, \quad \dot{z}_s^{(0)} \tag{13.4}$$

относительных координат и составляющих относительных скоростей точек M_s.

В главе VII было показано, что для уравнений (13.1) известны только четыре первых интеграла, а поэтому эти уравнения не могут быть полностью проинтегрированы. Следовательно, мы можем только ставить вопрос о приближенном интегрировании системы (13.1), основываясь на малости возмущающих сил, т. е. на малости числовых значений величин X_s, Y_s, Z_s.

Действительно, в конкретных задачах астрономии эти величины будут численно малы по сравнению с числовыми значениями величин

$$X_s^{(0)} = -\frac{\mu_s x_s}{r_s^3}, \quad Y_s^{(0)} = -\frac{\mu_s y_s}{r_s^3}, \quad Z_s^{(0)} = -\frac{\mu_s z_s}{r_s^3},$$

являющихся составляющими основных ускорений, возникающих от притяжения главного тела, либо вследствие чрезвычайной малости масс m_s по сравнению с центральной массой m_0 (как это имеет место для больших планет солнечной системы), либо вследствие весьма больших расстояний между точками системы, либо по той и по другой причине одновременно.

Таким образом, к уравнениям (13.1) вполне можно применить общий метод Лагранжа изменения (или вариации) произвольных постоянных, основы которого были подробно разобраны в предыдущей главе.

2. Отбросим в правых частях всех уравнений (13.1) составляющие возмущающих ускорений, которые являются численно малыми в конкретных задачах небесной механики по сравнению с составляющими основных ускорений. Тогда мы получим упрощенную систему уравнений, или уравнения первого приближения, в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_s &= -\frac{\mu_s x_s}{r_s^3}, \\ \ddot{y}_s &= -\frac{\mu_s y_s}{r_s^3}, \\ \ddot{z}_s &= -\frac{\mu_s z_s}{r_s^3}, \end{aligned}\right\} \tag{13.1'}$$

которая распадается, очевидно, на n независимых друг от друга систем, каждая из которых содержит только три уравнения, определяющие три координаты x_s, y_s, z_s каждой из точек M_s.

Но для каждого значения s ($s=1, 2, \ldots, n$) система (13.1′) представляет собой систему дифференциальных уравнений *невозмущенного движения* точки M_s, определяющих движение этой точки только под действием силы притяжения центрального тела-точки M_0 так, как будто бы во всем пространстве существовали только две точки M_0 и M_s.

Теория невозмущенного движения (кеплеровского) подробно разобрана в части третьей нашей книги, где выведены все необходимые формулы, дающие общее решение системы уравнений, которой совершенно подобна каждая из систем (13.1′).

Поэтому мы можем воспользоваться всеми формулами части третьей, снабжая только все величины, относящиеся к невозмущенному движению точки M_s, значком s. Принимая за шесть произвольных постоянных общего решения каждой из систем (13.1) шесть элементов невозмущенного кеплеровского движения точки M_s, т. е. величины

$$\Omega_s, \quad i_s, \quad \omega_s, \quad p_s, \quad e_s, \quad \tau_s, \tag{13.5}$$

мы получим общее решение полной упрощенной системы (13.1′), например, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x_s &= r_s(\cos u_s \cos\Omega_s - \sin u_s \sin\Omega_s \cos i_s),\\ y_s &= r_s(\cos u_s \sin\Omega_s + \sin u_s \cos\Omega_s \cos i_s),\\ z_s &= r_s \sin u_s \sin i_s, \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

где

$$u_s = v_s + \omega_s, \quad r_s = \frac{p_s}{1 + e_s \cos v_s}, \tag{13.6′}$$

и истинная аномалия v_s точки M_s связана с временем t-соотношением

$$\frac{\sqrt{\mu_s}}{p_s^{3/2}}(t - \tau_s) = \int_0^{v_s} \frac{dv'}{(1 + e_s \cos v')^2}. \tag{13.6′}$$

Итак, в первом приближении каждая из точек M_s описывает относительно точки M_0 кеплеровскую орбиту, элементы которой (величины (13.5)) однозначно определяются начальными значениями (13.4) и которая есть эллипс или гипербола (в частности, окружность, парабола или прямая), в зависимости от знака величины

$$h_s = V_s^{(0)2} - \frac{2\mu_s}{r_s^{(0)}}, \tag{13.7}$$

т. е. начальной (для $t = t_0$) энергии точки M_s в ее относительном движении вокруг точки M_0, которая является общим фокусом для всех невозмущенных орбит точек M_s.

Может случиться (как это и есть на самом деле для больших планет солнечной системы), что $h_s < 0$ для всякого значения s из ряда $1, 2, \ldots, n$. Тогда невозмущенная орбита каждой из точек M_s есть эллипс, и за элементы невозмущенного движения удобнее взять вместо (13.5) следующие величины:

$$\Omega_s, \quad i_s, \quad a_s, \quad e_s, \quad \pi_s, \quad \varepsilon_s. \tag{13.5′}$$

В этом случае истинная аномалия каждой из точек M_s определится в зависимости от времени следующими формулами:

$$\operatorname{tg}\frac{v_s}{2} = \sqrt{\frac{1+e_s}{1-e_s}}\operatorname{tg}\frac{E_s}{2}, \tag{13.8}$$

$$E_s - e_s \sin E_s = M_s \tag{13.8′}$$

и

$$M_s = n_s(t - t_0) + \varepsilon_s - \pi_s, \tag{13.8″}$$

где

$$n_s = \frac{\sqrt{\mu_s}}{a_s^{3/2}} \tag{13.8‴}$$

есть среднее движение точки M_s.

Заметим, что вместо формулы (13.8″) можно пользоваться эквивалентной ей формулой

$$M_s = \varepsilon_s - \pi_s + \int_{t_0}^{t} n_s dt, \tag{13.8*}$$

которая одинаково справедлива для возмущенного и невозмущенного движений.

Если невозмущенное движение точки M_s происходит по эллиптической орбите, то, как было показано в части третьей, координаты и составляющие скорости точки M_s суть периодические функции от средней аномалии M_s этой точки *) с общим периодом 2π (здесь $\pi = 3{,}141592653\ldots$) или периодические функции времени t с периодом

$$T_s = \frac{2\pi}{n_s}. \tag{13.9}$$

В главе XI было показано, что в этом случае координаты и составляющие скорости (а также любые другие переменные величины эллиптического движения) разложимы в тригонометрические ряды, расположенные по синусам и косинусам кратных средней аномалии M_s, абсолютно сходящиеся для всякого момента времени, если $e_s < \bar{e} = 0{,}6627\ldots$ и не абсолютно (или условно) сходящиеся, если $\bar{e} \leqslant e_s < 1$.

Может, конечно, случиться, что для одних точек системы постоянная h_s положительна, а для других отрицательна, так что среди начальных (или невозмущенных) орбит точек системы могут быть, вообще говоря, и эллипсы и гиперболы.

Такие случаи могут встретиться в кратных звездных системах, а также в задаче о полете космического корабля к другим планетам солнечной системы.

3. Возвратимся теперь к уравнениям возмущенного движения, т. е. к уравнениям (13.1). По основной идее метода изменения произвольных постоянных мы можем сохранить для общего решения системы (13.1) все формулы (13.6), (13.6′) и (13.6″), содержащие $6n$ произвольных постоянных (13.5) ($s = 1, 2, \ldots, n$), рассматривая в этих формулах все величины (13.5) как некоторые неизвестные функции времени.

Иными словами, мы можем сделать преобразование переменных, переходя в уравнениях (13.1) от $6n$ переменных x_s, y_s, z_s, $\dot{x}_s$, $\dot{y}_s$, $\dot{z}_s$ к такому же количеству новых переменных (13.5),

*) Координаты невозмущенного эллиптического движения являются также периодическими функциями от истинной аномалии, а также от эксцентрической аномалии и от средней долготы. Обратим еще внимание на то, что буква M_s обозначает здесь и среднюю аномалию движущейся точки и саму точку.

связанных со старыми переменными формулами кеплеровского движения, которые и являются в этом случае формулами преобразования переменных.

Так как формулы преобразования распадаются на n групп формул, причем каждая группа связывает старые и новые переменные с одним и тем же значком, то дифференциальные уравнения, определяющие новые переменные, могут быть записаны в виде n групп уравнений, каждая из которых выводится при помощи основной операции совершенно так же, как это было сделано в предыдущей главе для преобразования уравнений возмущенного движения одной-единственной точки.

Точно так же для вывода уравнений, определяющих новые переменные, можно воспользоваться методом скобок Лагранжа, в результате чего получить соответствующие уравнения Лагранжа для системы взаимно притягивающихся материальных точек.

На основе сделанных замечаний дифференциальные уравнения, определяющие новые переменные (13.5), могут быть написаны самым общим образом в виде n групп уравнений Ньютона ($s = 1, 2, \ldots, n$):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega_s}{dt} &= \frac{r_s}{p_s}\sin u_s \operatorname{cosec} i_s \cdot \tilde{W}_s,\\
\frac{di_s}{dt} &= \frac{r_s}{p_s}\cos u_s \cdot \tilde{W}_s,\\
\frac{d\omega_s}{dt} &= -\frac{\cos v_s}{e_s}\cdot \tilde{S}_s + \frac{\sin v_s}{e_s}\left(1+\frac{r_s}{p_s}\right)\tilde{T}_s -\\
&\qquad\qquad -\frac{r_s}{p_s}\sin u_s \operatorname{ctg} i_s \cdot \tilde{W}_s,\\
\frac{de_s}{dt} &= \tilde{S}_s \sin v_s + \left[\cos v_s + (\cos v_s + e_s)\frac{r_s}{p_s}\right]\cdot \tilde{T}_s,\\
\frac{dp_s}{dt} &= 2r_s\tilde{T}_s,\\
\frac{d\tau_s}{dt} &= \frac{p_s}{e_s}\sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}}\left[(e_sN_s\sin v_s - \cos v_s)\tilde{S}_s + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{p_s}{r_s}N_sT_s\right]\frac{r_s^2}{p_s^2},
\end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

где

$$\tilde{S}_s = \sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}}\,S_s,\quad \tilde{T}_s = \sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}}\,T_s,\quad \tilde{W}_s = \sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}}\,W_s.$$

Проекции возмущающего ускорения S_s, T_s, W_s на подвижные оси, связанные с точкой M_s, определяются формулами, совершенно аналогичными формулам (12.24), в которых нужно только снабдить все величины значком s.

Поэтому и направляющие косинусы подвижных осей, связанных с точкой M_s, получатся тоже из формул (12.23) и (12.23′), в которых ко всем величинам нужно приписать значок s.

Величина N_s определится формулой

$$N_s = 2\frac{p_s^2}{r_s^2}\int\limits_0^{v_s}\frac{\cos v'\,dv'}{(1+e_s\cos v')^3},$$

а составляющие возмущающего ускорения X_s, Y_s, Z_s на неподвижные оси координат с началом в точке M_0 даются формулами (13.2). В эти формулы входят координаты всех точек M_s и эти координаты нужно заменить их выражениями (13.6) из формул невозмущенного движения. Поэтому правые части всех уравнений Ньютона (13.10) будут известными функциями времени и всех $6n$ переменных (13.5), являющихся оскулирующими элементами орбит точек M_s.

Заметим еще, что написанные уравнения (13.10) останутся справедливыми и в тех случаях, когда на точки M_s действуют, кроме сил взаимных притяжений, и какие-либо другие силы, например, силы сопротивления среды, или силы, возникающие вследствие отличий форм рассматриваемых тел от сферических и т. п.

В этих случаях нужно только к составляющим возмущающих ускорений X_s, Y_s, Z_s прибавить члены, соответствующие дополнительным силам, а вид уравнений (13.10) останется без изменения.

В дальнейшем в этой главе мы будем рассматривать исключительно тот случай, когда составляющие возмущающего ускорения определяются формулами (13.2). Кроме того, будем предполагать, что движение каждой из точек M_s остается (всегда или по крайней мере в течение некоторого промежутка времени) движением эллиптического типа, т. е. что постоянно выполняются неравенства

$$V_s^2 - \frac{2\mu_s}{r_s} < 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда вместо переменных (13.5) мы можем воспользоваться переменными (13.5′). Учитывая еще, что

$$X_s = \frac{\partial R_s}{\partial x_s}, \qquad Y_s = \frac{\partial R_s}{\partial y_s}, \qquad Z_s = \frac{\partial R_s}{\partial z_s},$$

мы будем иметь для величин (13.5′) вместо уравнений Ньютона уравнения Лагранжа, которые для нашей задачи напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da_s}{dt} &= \frac{2}{n_s a_s}\frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s},\\
\frac{de_s}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s}\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} - \frac{e_s\sqrt{1-e_s^2}}{1+\sqrt{1-e_s^2}}\cdot\frac{1}{n_s a_s^2}\cdot\frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s},\\
\frac{d\Omega_s}{dt} &= \frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}\sin i_s}\frac{\partial R_s}{\partial i_s},\\
\frac{di_s}{dt} &= -\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}\sin i_s}\frac{\partial R_s}{\partial \Omega_s} -\\
&\qquad - \frac{\operatorname{tg}\frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\left(\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} + \frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s}\right),\\
\frac{d\pi_s}{dt} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s}\frac{\partial R_s}{\partial e_s},\\
\frac{d\varepsilon_s}{dt} &= -\frac{2}{n_s a_s}\frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\frac{\partial R_s}{\partial i_s} +\\
&\qquad + \frac{e_s\sqrt{1-e_s^2}}{1+\sqrt{1-e_s^2}}\cdot\frac{1}{n_s a_s^2}\cdot\frac{\partial R_s}{\partial e_s}.
\end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

В этих уравнениях возмущающие функции R_s определяются формулами (13.3) и (13.3′) и являются, следовательно, известными функциями от всех $3n$ координат точек M_s. Подставляя в выражение каждой возмущающей функции вместо координат точек M_s их выражения (13.6) из формул преобразования переменных, мы сделаем каждую из R_s функцией времени t и всех $6n$ переменных (13.5′). Поэтому и все правые части уравнений (13.11) будут известными функциями времени и $6n$ неизвестных величин, которыми являются оскулирующие элементы эллиптических орбит точек M_s.

Таким образом, задача об определении движения взаимно притягивающихся материальных точек приводится к интегрированию совместной системы $6n$ дифференциальных уравнений первого порядка с таким же числом неизвестных функций.

Очевидно, что такое интегрирование может быть выполнено только приближенно, например, по способу последовательных приближений Пикара или при помощи разложений в бесконечные ряды.

Способ Пикара, как было разъяснено в предыдущей главе, применим при любых значениях масс точек M_s и сходимость последовательных приближений обусловливается исключительно малостью составляющих возмущающих ускорений вследствие, например, больших расстояний между точками системы.

Если же массы всех точек M_s весьма малы по сравнению с массой точки M_0 (центрального тела), то удобнее применить для интегрирования уравнений (13.11) способ малых параметров и представлять неизвестные функции в виде бесконечных рядов, расположенных по целым возрастающим степеням этих параметров.

Впрочем, если ограничиться рассмотрением только первого приближения, то оба способа дают одинаковые выражения для приближенных значений неизвестных функций.

§ 2. Интегрирование уравнений возмущенного движения

1. Прежде чем заниматься интегрированием уравнений возмущенного движения в основной задаче небесной механики, рассмотрим структуру какой-либо из возмущающих функций R_s в предположении, что движение каждой из точек M_s принадлежит к эллиптическому типу. Кроме того, будем предполагать, что все отношения m_s/m_0 — малые величины одинакового порядка.

Такое предположение для случая задачи о движении больших планет солнечной системы не совсем соответствует действительности, так как из курса общей астрономии нам известно, что массы внутренних планет (Меркурия, Венеры, Земли и Марса) и Плутона значительно меньше масс внешних, крупных планет (Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна). Однако расстояния четырех последних планет от Солнца и их взаимные расстояния значительно больше соответствующих расстояний в системе внутренних планет. Поэтому сравнительно большие массы внешних планет до некоторой степени компенсируются малостью обратных расстояний в системе этих планет. Вследствие этого практически массы всех больших планет солнечной системы действительно можно считать величинами одного и того же порядка.

Рассматривая теперь выражение (13.3) для возмущающей функции R_s, заметим прежде всего, что эта функция есть линейная функция $n-1$ малых параметров, которыми являются $n-1$ масс из совокупности

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_s,\ \ldots,\ m_{n-1},\ m_n, \tag{13.12}$$

за исключением массы m_s.