приближений Пикара или при помощи разложений в бесконечные ряды.

Способ Пикара, как было разъяснено в предыдущей главе, применим при любых значениях масс точек M_s и сходимость последовательных приближений обусловливается исключительно малостью составляющих возмущающих ускорений вследствие, например, больших расстояний между точками системы.

Если же массы всех точек M_s весьма малы по сравнению с массой точки M_0 (центрального тела), то удобнее применить для интегрирования уравнений (13.11) способ малых параметров и представлять неизвестные функции в виде бесконечных рядов, расположенных по целым возрастающим степеням этих параметров.

Впрочем, если ограничиться рассмотрением только первого приближения, то оба способа дают одинаковые выражения для приближенных значений неизвестных функций.

§ 2. Интегрирование уравнений возмущенного движения

1. Прежде чем заниматься интегрированием уравнений возмущенного движения в основной задаче небесной механики, рассмотрим структуру какой-либо из возмущающих функций R_s в предположении, что движение каждой из точек M_s принадлежит к эллиптическому типу. Кроме того, будем предполагать, что все отношения m_s/m_0 — малые величины одинакового порядка.

Такое предположение для случая задачи о движении больших планет солнечной системы не совсем соответствует действительности, так как из курса общей астрономии нам известно, что массы внутренних планет (Меркурия, Венеры, Земли и Марса) и Плутона значительно меньше масс внешних, крупных планет (Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна). Однако расстояния четырех последних планет от Солнца и их взаимные расстояния значительно больше соответствующих расстояний в системе внутренних планет. Поэтому сравнительно большие массы внешних планет до некоторой степени компенсируются малостью обратных расстояний в системе этих планет. Вследствие этого практически массы всех больших планет солнечной системы действительно можно считать величинами одного и того же порядка.

Рассматривая теперь выражение (13.3) для возмущающей функции R_s, заметим прежде всего, что эта функция есть линейная функция $n-1$ малых параметров, которыми являются $n-1$ масс из совокупности

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_s,\ \ldots,\ m_{n-1},\ m_n, \tag{13.12}$$

за исключением массы m_s.

Таким образом, различные группы уравнений (12.11) (т. е. группы, отличающиеся значком s) содержат различные группы малых параметров, но вся система (13.11) в целом содержит, очевидно, в качестве параметров все массы (13.12).

Следует заметить, впрочем, что в каждую группу уравнений (13.11) входит неявным образом и своя собственная масса m_s, например, через посредство среднего движения n_s, которое равно $\sqrt{\mu_s}a_s^{-3/2}$, а $\mu_s=f_s(m_0+m_s)$.

Однако величину m_s, входящую в уравнения (13.11) через посредство величины μ_s, мы не будем считать параметром, так что все величины $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ будут рассматриваться как некоторые фиксированные постоянные, не зависящие от выбранных нами малых параметров.

Такой прием, когда некоторая величина, входящая в дифференциальные уравнения двояким образом, считается переменным параметром, если она входит одним способом, и неизменной постоянной, если она входит другим способом, весьма широко используется и в небесной механике и во многих других дисциплинах и не должен вызывать каких-либо сомнений в правильности такой процедуры.

Далее, так как R_s есть линейная функция $n-1$ малых параметров, то и всякая ее частная производная по любому из элементов (13.5′) также есть линейная функция тех же параметров, а следовательно, и правая часть каждого из уравнений (13.11) имеет точно такую же структуру.

Перепишем уравнения (13.11) в более краткой и удобной форме, обозначая, так же как это мы делали и в предыдущей главе, элементы оскулирующей орбиты точки M_s соответственно через

$$Э_{s1},\ Э_{s2},\ Э_{s3},\ Э_{s4},\ Э_{s5},\ Э_{s6}. \tag{13.13}$$

Обратим теперь внимание на множители R_{sj} в формуле (13.3), определяемые формулами (13.3′). Каждая из величин R_{sj} зависит только от координат двух точек M_s и M_j. После перехода от прямоугольных координат к оскулирующим элементам величина R_{sj} сделается, очевидно, некоторой функцией времени и двенадцати оскулирующих элементов $Э_{sk}$ и $Э_{jk}$ $(k=1, 2, \ldots, 6)$, так что мы можем записать выражение для возмущающей функции R_s следующим образом *):

$$R_s=f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j R_{sj}(t\,|\,Э_{sk}\,|\,Э_{jk}). \tag{13.14}$$

*) Напомним, что штрих при знаке суммы указывает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j=s$.

Дифференцируя формулу (13.14) по какому-либо из элементов орбиты точки M_s, мы получим, очевидно, выражение, имеющее такую же структуру, как и (13.14), т. е.

$$\frac{\partial R_s}{\partial Э_{sk}} = f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j R_{sj}^{(k)}(t \mid Э_{sk} \mid Э_{jk}). \tag{13.14'}$$

В уравнениях (13.11) частные производные от R_s по элементам $Э_{sh}$ умножаются на величины, зависящие от a_s, e_s, ..., т. е. от элементов $Э_{sk}$, а поэтому правые части этих уравнений будут иметь такую же структуру, как и (13.14) или (13.14′), и мы можем записать всю систему $6n$ уравнений (13.11) следующим образом:

$$\frac{dЭ_{sk}}{dt} = \sum_{j=1}^{n}{}' m_j E_{sj}^{(k)}(t \mid Э_{sk} \mid Э_{jk}), \tag{13.15}$$

где каждая из $6n(n-1)$ величин $E_{sj}^{(k)}$ есть некоторая функция времени и двенадцати оскулирующих элементов $Э_{sk}$ и $Э_{jk}$ $(k=1, 2, \ldots, 6)$, но не зависит от параметров m_s $(s=1, 2, \ldots, n)$.

Уточним теперь зависимость величин $E_{sj}^{(k)}$ от времени t, для чего нужно опять обратиться к формулам (13.3′), определяющим величины R_{sj}. Так как мы предполагаем, что движение каждой из точек M_s принадлежит к эллиптическому типу, то координаты каждой из этих точек являются периодическими функциями от своей средней аномалии M_s и могут быть представлены в виде рядов Фурье, расположенных по синусам и косинусам кратных M_s. Следовательно, величина R_{sj} есть периодическая функция от двух средних аномалий M_s и M_j, а поэтому может быть разложена в двойной ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам аргумента

$$k_s M_s + k_j M_j,$$

где k_s и k_j обозначают целые числа.

Коэффициенты этих рядов зависят от всех элементов $Э_{sk}$ и $Э_{jk}$, за исключением средних долгот эпохи ε_s и ε_j, которые входят в разложения координат только через посредство средних аномалий.

Очевидно, что каждая из величин $E_{sj}^{(k)}$ может быть представлена рядом такого же характера, и мы можем написать

$$E_{sj}^{(k)} = \sum_{k_s, k_j=-\infty}^{+\infty} \{A_{sj}^{(k, k_s, k_j)} \cos(k_s M_s + k_j M_j) + \\ + B_{sj}^{(k, k_s, k_j)} \sin(k_s M_s + k_j M_j)\}. \tag{13.15'}$$

где коэффициенты не зависят от средних долгот эпохи ε_s и ε_j.

Величины $E_{sj}^{(k)}$ можно представить еще в несколько ином виде. Действительно, координаты невозмущенного движения, как это видно из формул (13.6), зависят еще тригонометрическим образом от долготы узла и долготы перицентра.

Поэтому эти координаты можно рассматривать как периодические функции от трех переменных —M_s, Ω_s и π_s, с общим периодом 2π по каждому из этих аргументов.

В силу этого функция R_{sj} может рассматриваться как периодическая функция от шести аргументов и, следовательно, может быть разложена в шестикратный ряд Фурье по синусам и косинусам сложного аргумента

$$D = k_s M_s + k_j M_j + k_s' \Omega_s + k_j' \Omega_j + k_s'' \pi_s + k_j'' \pi_j,$$

где k_s, k_j, k_s', k_j', k_s'' и k_j'' обозначают целые числа (положительные, отрицательные или нули). Поэтому и каждая из $6n(n-1)$ величин $E_{sj}^{(k)}$ также может быть представлена таким шестикратным рядом, и мы можем написать (в сокращенных обозначениях)

$$E_{sj}^{(k)} = \sum_{\bar{k}} \left\{ A_{sj}^{(k,\,\bar{k})} \cos D + B_{sj}^{(k,\,\bar{k})} \sin D \right\}, \tag{13.15''}$$

где коэффициенты зависят только от больших полуосей a_s и a_j, от эксцентриситетов e_s и e_j и от наклонностей i_s и i_j *).

Эти коэффициенты A и B в свою очередь могут быть разложены в степенные ряды, расположенные по целым положительным степеням эксцентриситетов и наклонностей. Действительно, из результатов гл. II прямо следует, что коэффициенты рядов Фурье, представляющих величины эллиптического движения, суть ряды, расположенные по степеням эксцентриситета эллиптической орбиты. Кроме того, координаты эллиптического движения содержат либо косинус, либо синус наклонности, а поэтому упомянутые координаты разлагаются в ряды по степеням наклонности. Таким образом, функция R_{sj} может быть разложена в четырехкратный ряд, расположенный по степеням эксцентриситетов и наклонностей двух орбит точек M_s и M_j. Следовательно, и всякая из величин $E_{sj}^{(k)}$ также разложима в ряд такого же характера, а значит, коэффициенты A и B в формуле

---

*) Буквой $\bar{k}$ обозначена для сокращения вся совокупность шести индексов и суммирование производится по всем этим индексам, так что каждый из них принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

(13.15″) могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{matrix} A_{sj}^{(k,\,\bar{k})} \\ B_{sj}^{(k,\,\bar{k})} \end{matrix}\right\} = \sum_{\tilde{k}} \begin{matrix} A_{sj}^{(k,\,\bar{k},\,\tilde{k})} \\ B_{sj}^{(k,\,\bar{k},\,\tilde{k})} \end{matrix} \times e_s^{\tilde{k}_s} e_j^{\tilde{k}_j} i_s^{\tilde{k}'_s} i_j^{\tilde{k}'_j},$$

где коэффициенты зависят только от полуосей a_s и a_j *).

Так как во многих задачах небесной механики (например, в задаче о движении больших планет солнечной системы) эксцентриситеты и наклонности орбит вообще малы, то ряды, расположенные по степеням этих величин, сходятся достаточно быстро и с ними удобно производить все необходимые вычисления.

Для фактического получения всех упомянутых разложений достаточно, как следует из сказанного выше, вывести разложение только одной функции R_{sj} для какой-либо пары взаимно возмущающих точек M_s и M_j. Получив такое разложение, мы будем иметь также разложения всех $n(n-1)$ функций этого типа, которые получатся из найденного разложения простой заменой значков.

Дифференцируя каждое из $n(n-1)$ разложений функций R_{sj} по всем элементам $э_{sk}$ и умножая разложения производных на соответствующие коэффициенты, мы будем иметь все нужные для дальнейшего разложения вида (13.15′) или (13.15″).

Мы не будем здесь развивать технику получения разложения какой-либо функции R_{sj}. Это разложение неоднократно осуществлялось, и соответствующие буквенные выражения для его коэффициентов с точностью, отвечающей точности современных наблюдений, опубликованы; их можно брать для каждой конкретной задачи прямо в готовом виде **).

2. Обращаясь теперь к интегрированию системы (13.15), будем искать решение этих уравнений в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням малых параметров (возмущающих масс) $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ***).

Для этого положим

$$э_{sk} = э_{sk}^{(0)} + \delta^{(1)} э_{sk} + \delta^{(2)} э_{sk} + \ldots + \delta^{(r)} э_{sk} + \ldots, \qquad (13.16)$$

---

*) Буквой k обозначена вся совокупность четырех индексов и суммирование производится по каждому из них от нуля до $+\infty$.

**) Некоторые детали техники подобных разложений изложены в известном «Курсе небесной механики» М. Ф. Субботина, т. 2. См. также Tisserand F., Traité de Mécanique Céleste, t. I; Leverrier, Annales de l'Observatoire de Paris, t. 1, 1855; Zeipel H., Entwicklung der Störungsfunktion, Encuklopadie der Mathem. Wissenschaften, Bd VI, 1912

***) Обычно масса главного тела m_0 принимается за единицу массы, так что каждая из величин m_s представляет собой отношение массы точки M_s к массе центральной точки M_0.

где $э_{sk}^{(0)}$ – постоянные, за которые можно принять начальные значения элементов $э_{sk}$, соответствующие начальной эпохе $t=t_0$, а $\delta^{(r)}э_{sk}$ — целые, однородные функции степени r величин (13.12), коэффициенты которых суть некоторые подлежащие определению функции времени, обращающиеся в нуль при $t=t_0$. Поэтому величины $\delta^{(r)}э_{sk}$, которые назовем **возмущениями** r-**го порядка**, представятся в виде

$$\delta^{(r)}э_{sk}=\sum{}^{(r_1, r_2, \ldots, r_n)} э_{sk}(t)m_1^{r_1}m_2^{r_2}\ldots m_n^{r_n}, \tag{13.17}$$

где сумма распространяется на все целые неотрицательные значения индексов $r_1, r_2, \ldots, r_n$, сумма которых равна r.

Каждый из N_r членов*) суммы (13.17) можно назвать **частным возмущением** r-**го порядка**, коэффициент которого, по свойству кратных рядов Тейлора, определяется формулой

$$э_{sk}^{(r_1, r_2, \ldots, r_n)}=\frac{r!}{r_1!\,r_2!\cdots r_n!}\left[\frac{\partial^{r_1+r_2+\ldots+r_n}э_{sk}}{\partial m_1^{r_1}\partial m_2^{r_2}\cdots\partial m_n^{r_n}}\right]_{m_1=m_2=\ldots=m_n=0}. \tag{13.17'}$$

Для определения коэффициентов многочленов (13.17) проще всего применить тот же прием, который мы использовали в предыдущей главе при интегрировании любой системы уравнений возмущенного движения. Таким образом, будем дифференцировать уравнения (13.15) по параметрам (13.12), предполагая все $э_{sk}$ функциями этих параметров, определяемыми рядами (13.16), и полагая после каждого дифференцирования все параметры равными нулю.

В результате такой процедуры мы будем получать системы уравнений, из которых последовательно, в порядке возрастания r, сможем определить сколько угодно неизвестных коэффициентов. При этом все коэффициенты одной и той же группы r, т. е. коэффициенты одного и того же многочлена (13.17), определятся независимо друг от друга при помощи простых квадратур. Однако нужно иметь в виду, что коэффициенты группы r зависят от коэффициентов всех предыдущих групп, т. е. возмущения какого-либо порядка r зависят от возмущений первого, второго, ... $(r-1)$-го порядков. Таким образом, мы построим формальные ряды, расположенные по

---

*) N_r есть число всех (различных) членов однородного многочлена степени r с n переменными, так что

$$N_r=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}.$$

возрастающим степеням параметров (13.12) и удовлетворяющие уравнениям (13.15).

Применяя теперь теорему А. М. Ляпунова *), мы можем быть уверенными в том, что все полученные ряды будут абсолютно сходящимися в *некотором промежутке времени*, пока численные значения параметров (13.12) не превосходят некоторого предела, отличного от нуля и зависящего вообще от упомянутого промежутка времени.

Определение этого предела в задачах небесной механики весьма затруднительно, но еще бо́льшие затруднения представляет задача о нахождении решения системы (13.15) в таком виде, в каком оно было бы пригодно *для всех значений времени*.

В классической небесной механике вопрос о сходимости получаемых в теории возмущений рядов вообще не ставился, и пригодность получаемых приближений проверялась исключительно путем сравнения результатов вычислений с данными, получаемыми при помощи наблюдений.

Рассмотрим теперь несколько более подробно определение первого приближения, т. е. нахождение возмущений первого порядка.

Для того чтобы избавиться от громоздких общих обозначений, принятых в формуле (13.17), представим совокупность членов первой степени относительно параметров (13.12) в рядах (13.16) в следующем виде:

$$\delta^{(1)}э_{sk} = \sum_{j=1}^{n} m_j э_{sk}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \delta^{(1,\, j)} э_{sk}, \tag{13.18}$$

где

$$\delta^{(1,\, j)} э_{sk} = m_j э_{sk}^{(j)} \tag{13.18'}$$

есть частное возмущение первого порядка в элементе $э_{sk}$, вызываемое действием массы m_j на массу m_s.

Для определения функций $э_{sk}^{(j)}$ продифференцируем уравнения (13.15) по какому-либо из параметров (13.12), считая все элементы $э_{sk}$ функциями этих параметров, определяемыми рядами (13.16), и положим после дифференцирований все параметры равными нулю. Эта процедура даст нам, как легко видеть, следующие уравнения:

$$\frac{dэ_{sk}^{(s)}}{dt} = 0, \qquad \frac{dэ_{sk}^{(j)}}{dt} = E_{sj}^{(k)}\left(t \mid э_{sk}^{(0)} \mid э_{jk}^{(0)}\right). \tag{13.19}$$

*) См. сноску на стр. 634. Подробное доказательство теоремы Ляпунова приведено в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы».

Интегрируя эти равенства при условии, чтобы все искомые функции обращались в нуль при $t=t_0$, мы имеем $э_{sk}^{(s)}=0$, что само собой очевидно, а для $j \neq s$ получаем *)

$$э_{sk}^{(j)} = \int_{t_0}^{t} E_{sj}^{(k)} \left(t \,|\, э_{sk}^{(0)} \,|\, э_{jk}^{(0)}\right) dt. \tag{13.19'}$$

Итак, частные возмущения первого порядка действительно определяются независимо друг от друга, а полное возмущение первого порядка есть просто сумма всех частных возмущений. Таким образом, в теории возмущений больших планет солнечной системы возмущения первого порядка элементов оскулирующей орбиты Марса, например, найдутся сложением возмущений первого порядка элементов орбиты Марса от каждой из остальных планет в отдельности.

Подобным же образом можно определить и возмущения второго и более высокого порядков, чем мы здесь заниматься не будем. Заметим только, что в возмущении любого порядка r элемента $э_{sk}$ член, содержащий множителем m_s^r, всегда равен нулю. Действительно, коэффициент этого члена определится из уравнения, получающегося r-кратным дифференцированием уравнения (13.15) по параметру m_s и заменой затем всех параметров (13.12) нулями. Но масса m_s не входит в правые части уравнений (13.15) и поэтому описанная процедура всегда даст в результате нуль, т. е.

$$\frac{d э_{sk}^{(0, \ldots, r, \ldots, 0)}}{dt} = 0,$$

где индекс r стоит на месте, имеющем порядковый номер s. Отсюда, при принятом условии относительно постоянных интегрирования, мы имеем

$$э_{sk}^{(0, \ldots, r, \ldots, 0)} = 0.$$

В другие частные возмущения r-го порядка элемента $э_{sh}$ масса m_s обязательно будет входить, но в степенях, не превышающих $r-1$.

3. Чтобы выполнить квадратуры в формуле (13.19), определяющей возмущения первого порядка кеплеровских элементов оскулирующих орбит точек M_s, рассмотрим выражения для подынтегральных функций $E_{sj}^{(k)}$, исходя из общих выражений этих функций, даваемых формулами (13.15') или (13.15'').

*) Можно принять и какое-либо другое условие для определения произвольных постоянных, возникающих при нахождении возмущений различных порядков, но мы будем для простоты придерживаться уже принятого условия.

Для этого нужно заменить в этих формулах все элементы $э_{sk}$ и $э_{jk}$ их постоянными начальными значениями $э_{sk}^{(0)}$ и $э_{jk}^{(0)}$, вследствие чего все коэффициенты A и B этих формул сделаются некоторыми известными постоянными *), а время t будет входить только через средние аномалии M_s и M_j.

В рассматриваемом первом приближении аргумент в (13.15′) или часть аргумента в (13.15″) примет следующий вид:

$$k_sM_s+k_jM_j=(k_sn_s^{(0)}+k_jn_j^{(0)})(t-t_0)+k_s(\varepsilon_s-\pi_s)+k_j(\varepsilon_j-\pi_j). \tag{13.20}$$

Дальнейшие рассуждения вполне подобны тем, которые проводились в конце предыдущей главы при рассмотрении случая возмущающей функции, зависящей от времени явно.

Действительно, так как индексы k_s и k_j могут принимать всевозможные целые значения — положительные, отрицательные и нулевые, а начальные средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ — известные постоянные числа, то коэффициент при t в формуле (13.20) (или, иначе, частота колебания, определяемого соответствующим тригонометрическим членом) есть действительное число, которое, в частности, может быть равно нулю. Этот коэффициент заведомо равен нулю при $k_s=k_j=0$, каковы бы ни были $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$, но он может также быть нулем и в некоторых других случаях.

Эти случаи не будут иметь места, если числа $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ несоизмеримы, что, вообще говоря, и имеет место в действительности, так как $n=\sqrt{\mu}a^{-3/2}$.

Если же средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ соизмеримы, т. е. если их отношение $n_s^{(0)}:n_j^{(0)}$ равно отношению двух целых чисел $r_s:r_j$, то найдется бесчисленное множество пар таких чисел k_s и k_j (не равных одновременно нулю), что будет выполняться следующее равенство:

$$k_sn_s^{(0)}+k_jn_j^{(0)}=0. \tag{13.20′}$$

Обозначая соответствующие значения индексов буквами $\varkappa_s$ и $\varkappa_j$, мы будем иметь, как и в предыдущей главе,

$$\varkappa_s=\nu r_j, \quad \varkappa_j=-\nu r_s,$$

где $\nu=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Таким образом, в разложении (13.15′) или (13.15″) найдется, вообще говоря, бесчисленное множество членов, не зави-

*) Начальные значения всех элементов в рассматриваемой задаче мы предполагаем заданными числами. Определение этих начальных элементов составляет задачу той части небесной механики, которую называют часто «теоретической астрономией».

сящих от времени и являющихся поэтому некоторыми постоянными (в первом приближении!). Такие члены мы будем называть, согласно установившейся традиции, **вековыми членами**, и будем их выделять заранее из разложения соответствующей функции $E_{sj}^{(k)}$. Поэтому, принимая для определенности форму разложения (13.15″), мы можем написать в первом приближении

$$E_{sj}^{(k)}\left(t \mid \text{э}_{sk}^{(0)} \mid \text{э}_{jk}^{(0)}\right) = A_{sj}^{(k,\,0)} + \sum_{\bar{k}}{}^{*} \left\{A_{sj}^{(k,\,\bar{k})} \cos D^{*} + B_{sj}^{(k,\,\bar{k})} \sin D^{*}\right\}, \tag{13.21}$$

где звездочка при знаке суммы будет указывать, что индексы суммирования k_s и k_j принимают всевозможные значения, за исключением нулевых и значений, равных $\varkappa_s$ и $\varkappa_j$, а аргумент тригонометрических функций определяется формулой

$$D^{*} = \left(k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}\right)\left(t - t_0\right) + D_0^{*}, \tag{13.22}$$

где

$$D_0^{*} = k_s \varepsilon_s^{(0)} + k_j \varepsilon_j^{(0)} + k_s' \Omega_s^{(0)} + k_j' \Omega_j^{(0)} + \left(k_s - k_s''\right) \pi_s^{(0)} + \left(k_j - k_j''\right) \pi_j^{(0)}. \tag{13.22′}$$

Коэффициент $A_{sj}^{(k,\,0)}$ в общем случае не равен нулю, так что, вообще говоря, каждое из равенств (13.19) для $j \neq s$ обязательно будет содержать вековой член. Но в одном важном частном случае этот коэффициент заведомо будет равен нулю. Действительно, расположим элементы (13.5′) в том же порядке, в котором написаны дифференциальные уравнения (13.11), так что $\text{э}_{s1} = a_s$ и $\text{э}_{s6} = \varepsilon_s$.

Пусть средние движения $n_1^{(0)}, n_2^{(0)}, \ldots, n_n^{(0)}$ таковы, что для любой пары $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ условие (13.20′) выполняется только при $k_s = k_j = 0$, т. е. что все начальные средние движения попарно между собой несоизмеримы. Тогда в разложении функции R_{sj} (которое имеет такую же структуру, что и (13.15″)) совокупность членов, для которых $k_s = k_j = 0$, т. е. вековой член разложения R_{sj}, заведомо **не будет зависеть от средних долгот эпохи** ε_s и ε_j, т. е. от элементов э_{s6} и э_{j6}. Поэтому разложения частных производных $\dfrac{\partial R}{\partial \text{э}_{s6}}$ не будут содержать членов, не зависящих явно от времени, а отсюда следует, что в первом приближении все величины $A_{sj}^{(1,\,0)}$, которые пропорциональны частным производным $\dfrac{\partial R}{\partial \text{э}_{s6}}$, будут равны нулю, так что

$$A_{sj}^{(1,0)} = 0. \tag{13.23}$$

Следует иметь в виду, что этот важный результат справедлив только в том случае, когда средние движения удовлетворяют высказанному условию (т. е. все несоизмеримы между собой). В противном случае (в случае наличия соизмеримостей, или, как говорят иногда, резонансов) вековой член разложения функции R_{sj}, как видно из (13.22′), будет зависеть от ε_s и ε_j и величины $A_{sj}^{(1,\,0)}$ не будут равны нулю.

После этих необходимых замечаний перейдем к выполнению квадратур в формуле (13.19′), определяющей частные возмущения первого порядка элементов $э_{sk}$.

Заменяя подынтегральную функцию в этой формуле ее выражением (13.21), где все коэффициенты A и B и величина D_0^* суть величины постоянные, мы найдем после интегрирования:

$$э_{sk}^{(j)}(t) = A_{sj}^{(k,\,0)}(t-t_0) + \\ + \sum_{\bar{k}}{}^{*} \frac{A_{sj}^{(k,\,\bar{k})}\left(\sin D^* - \sin D_0^*\right) - B_{sj}^{(k,\,\bar{k})}\left(\cos D^* - \cos D_0^*\right)}{k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}}. \qquad (13.24)$$

Таким образом, всякое частное возмущение первого порядка любого из элементов (13.5′), как показывают формулы (13.18′) и (13.24), состоит из двух частей, из которых первая содержит множителем $t - t_0$ и постоянно растет по абсолютной величине *) вместе с временем, а вторая содержит только тригонометрические члены и является суммой периодических функций от времени. Положим

$$\delta_c^{(1,\,j)} э_{sk} = m_j A_{sj}^{(k,\,0)}(t-t_0) \qquad (13.25)$$

и назовем эту величину вековой частью частного возмущения первого порядка элемента $э_{sk}$ или вековым неравенством.

Тогда вековая часть полного возмущения первого порядка определится формулой

$$\delta_c^{(1)} э_{sk} = \sum_{j=1}^{n}{}' \delta_c^{(1,\,j)} э_{sk} = (t-t_0) \sum_{j=1}^{n}{}' m_j A_{sj}^{(k,\,0)}. \qquad (13.25')$$

Эта величина называется также часто просто вековым возмущением элемента $э_{sk}$.

Вторую часть частного возмущения первого порядка естественно назвать периодической частью частного возмущения, а сумма произведений этих величин на возмущающие массы дает периодическую часть полного возмущения пер-

---

*) Коэффициент векового неравенства может быть и положительным и отрицательным, так же как и множитель $t - t_0$, который при $t > t_0$ соответствует будущему, а при $t < t_0$ — прошлому.

вого порядка, которую называют также часто **периодическим возмущением элемента** э_{sk}.

Как показывает формула (13.24), периодическая часть возмущения первого порядка состоит из бесчисленного множества периодических членов, отличающихся друг от друга величинами амплитуд и периодов.

Каждый отдельный периодический член, амплитуда которого содержит **множителем** одну из возмущающих масс и **делителем** величину $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$, имеет период

$$T_{k_s, k_j} = \frac{2\pi}{k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}}. \tag{13.26}$$

Всякий такой член естественно назвать **периодическим неравенством** элемента э_{sk}, но его также называют (не совсем правильно) **периодическим возмущением**.

Заметим, что делитель $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ заведомо не равен нулю, но, независимо от соизмеримости или несоизмеримости средних движений $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$, может оказаться величиной весьма малой. Поэтому периодические неравенства разделяют по величине периода (13.26) на **неравенства короткопериодические**, период которых сравним с периодами обращений $2\pi/n_s^{(0)}$ и $2\pi/n_j^{(0)}$, в невозмущенных движениях точек M_s и M_j, и на **неравенства долгопериодические**, период которых может быть весьма большим.

Амплитуды долгопериодических неравенств также могут оказаться значительными вследствие того, что в знаменатель соответствующего периодического члена входит величина $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ (малый делитель).

Таким образом, возмущение первого порядка любого элемента (13.5′) состоит из векового неравенства и из бесчисленного множества периодических неравенств, разделяющихся на короткопериодические и долгопериодические.

Разумеется, при практических применениях теории возмущений невозможно вычислять бесчисленное множество членов, образующих возмущения даже только первого порядка. Поэтому на практике из всего бесчисленного множества неравенств рассматривают и учитывают только некоторые и представляют возмущение первого порядка каждого элемента в виде суммы векового неравенства и нескольких периодических, амплитуды которых являются наиболее ощутительными.

Но здесь имеется некоторое затруднение, на которое невозможно не обратить внимания. Дело в том, что амплитуды периодических неравенств (коротко- и долгопериодических) не могут быть определены конечными формулами, и мы вынуждены представлять их в свою очередь бесконечными рядами, расположенными, например, как отмечалось выше, по степеням эксцентриситетов и наклонностей.

Мы можем вычислить только некоторые первые члены этих бесконечных рядов и совершенно не можем быть уверенными, что сосчитанные члены дают нам с достаточной точностью сумму всего ряда. Поэтому, определяя возмущение первого порядка какого-либо элемента в виде суммы некоторого, не очень большого числа неравенств, мы получаем только некоторую приближенную формулу, об удовлетворительности которой мы можем судить только путем сравнения построенной таким образом аналитической теории с наблюдениями *).

Эти замечания показывают, что не следует преувеличивать ценность аналитической теории как совокупности приближенных формул, определяющих возмущения первого порядка, и во всяком случае не следует делать из этих приближенных формул необоснованные выводы, касающиеся эволюции рассматриваемой системы небесных тел в весьма далеком будущем (или прошлом).

4. Сделаем еще несколько существенных замечаний по поводу вековых неравенств в возмущениях первого порядка элементов оскулирующих орбит движущихся материальных точек, представляющих интересующие нас небесные тела.

Мы уже заметили, что если начальные средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ двух точек несоизмеримы между собой, то сумма $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ может обратиться в нуль только при $k_s = 0$, $k_j = 0$, вследствие чего соответствующий коэффициент $A_{sj}^{(1,0)}$ будет равен нулю, и вековое неравенство элемента $э_{s1}$, т. е. большой полуоси a_s оскулирующей орбиты точки M_s, вызываемое возмущающей массой m_j, также равно нулю, так что возмущение первого порядка большой полуоси эллиптической орбиты состоит только из периодической части.

Если начальные средние движения всех точек системы обладают попарно таким же свойством, то мы будем иметь по формуле (13.25′)

$$\delta_c^{(1)} э_{s1} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

и возмущения первого порядка больших полуосей всех орбит точек M_s будут содержать только периодические члены.

Это свойство возмущений первого порядка впервые замечено Лапласом для больших планет солнечной системы, но, оче-

*) Результаты построенной таким образом приближенной аналитической теории можно также сравнивать с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения, или с результатами какой-либо другой теории, построенной на иных принципах.

видно, имеет более общее значение и называется обычно теоремой Лапласа, хотя во всей общности оно установлено Лагранжем.

Приведем полную формулировку этой теоремы, которую мы будем называть в дальнейшем теоремой Лапласа.

Теорема Лапласа. Если начальные средние движения $n_s^{(0)}$ всех точек M_s таковы, что для любой их пары делитель $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ обращается в нуль только при $k_s = k_j = 0$, то возмущения первого порядка больших полуосей оскулирующих орбит точек M_s не содержат вековых членов.

Как следствие теоремы Лапласа, отметим, что средние движения n_s всех точек M_s, рассматриваемые как функции времени, также обладают этим же свойством, что видно и из формулы (13.8‴) и из уравнений

$$\frac{dn_s}{dt} = -\frac{3}{a_s^2}\frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s},$$

определяющих оскулирующие средние движения как функции времени.

Начальные средние движения $n_s^{(0)}$ в действительности определяются из наблюдений, так же как и большие полуоси $a_s^{(0)}$ и как все прочие элементы.

Числовые значения величин $n_s^{(0)}$ и $a_s^{(0)}$ в какой-либо конкретной задаче астрономии (например, в задаче о движении больших планет) выражаются десятичными дробями с определенным числом десятичных знаков *) и, следовательно, практически всегда оказываются рациональными числами. Поэтому всегда найдутся такие целые числа k_s и k_j (и притом в бесконечном количестве), для которых сумма $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ будет равна нулю. В самом деле, если σ есть число десятичных знаков (после запятой) в числах $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$, то все целые числа, определяемые формулами

$$k_s = \nu n_j^{(0)} \cdot 10^{\sigma}, \quad k_j = -\nu n_s^{(0)} \cdot 10^{\sigma},$$

где $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$, обратят сумму $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ в нуль и правые части равенств (13.21) все без исключения будут содержать не равные нулю вековые члены.

Но эти числа k_s и k_j, обусловливающие вековые неравенства всех элементов (не исключая и больших полуосей),

*) Число этих десятичных знаков зависит от точности производимых наблюдений, т. е. от качества измерительных астрономических инструментов, а также от характера и положения наблюдаемого небесного тела.

оказываются на практике весьма большими, и члены, им соответствующие, просто невозможно вычислить.

Действительно, возьмем, например, средние движения Юпитера и Сатурна, относящиеся к 1 января 1900 г. Мы имеем ($n=9$ есть число больших планет солнечной системы)

$$n_5^{(0)} = 299{,}1283, \quad n_6^{(0)} = 120{,}4547, \quad \sigma = 4,$$

а поэтому числа k_5 и k_6 будут равны соответственно

$$k_5 = 1\,204\,547\,\nu, \qquad k_6 = -2\,991\,283\,\nu,$$

и соответствующие им члены даже для $\nu = \pm 1$ фактически невычислимы. Поэтому мы можем считать средние движения $n_s^{(0)}$ планет солнечной системы такими, что для любой их пары всякая сумма $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ обращается в нуль только при $k_s = k_j = 0$.

С другой стороны, мы можем считать исходными данными начальные значения больших полуосей $a_s^{(0)}$ планетных орбит. Тогда средние движения, определяемые по формуле (13.8‴), заведомо будут иррациональными числами, отношение любой пары которых не равно отношению двух целых чисел. Поэтому, рассматривая вопрос с этой точки зрения, мы можем быть уверены в отсутствии вековых неравенств в возмущениях первого порядка больших полуосей и средних движений оскулирующих планетных орбит.

Подчеркнем еще раз, что теорема Лапласа говорит только о возмущениях первого порядка. Что касается возмущений высших порядков, то относительно их ничего определенного доказать не удается и, принципиально говоря, такие возмущения вообще заведомо будут содержать вековые члены. И в самом деле, для больших полуосей оскулирующих орбит больших планет такие вековые члены найдены в возмущениях уже третьего порядка.

Однако вопрос о действительном поведении больших полуосей с течением времени не может быть выяснен рассмотрением различных членов бесконечных рядов, даже если все эти члены включают в себя вековые неравенства, пропорциональные какой-либо степени времени.

Классическим примером, иллюстрирующим такое обстоятельство, является функция $\sin(\alpha m t)$, где m — малый параметр. Разложение этой функции по степеням этого параметра

$$\sin(\alpha m t) = \alpha t \cdot m - \frac{\alpha^3 t^3}{3!} m^3 + \ldots$$

содержит бесчисленное множество вековых членов; однако ряд сходится абсолютно для всякого значения $|t|$ и его сумма никогда не превосходит единицы по абсолютной величине.

Следовательно, наличие вековых членов в возмущениях оскулирующих элементов ничего еще не говорит о действительном поведении этих элементов и устанавливает только аналитическую структуру первых членов бесконечных рядов, формально представляющих элементы.

Возвращаясь к вековым возмущениям первого порядка, обратим внимание на то, что эти возмущения обусловлены свободными членами разложений функций $E_{sj}^{(k)}(t \mid э_{sk} \mid э_{jk})$ в тригонометрические ряды по кратным двух средних аномалий M_s и M_j.

Поэтому, если нас интересуют по какой-либо причине только вековые возмущения оскулирующих элементов первого порядка, то мы можем с самого начала отбросить в разложениях величин $E_{sj}^{(k)}$ все периодические члены, вследствие чего уравнения (13.15) заменятся следующими:

$$\frac{dэ_{sk}}{dt} = \sum_{j=1}^{n}{}' m_j A_{sj}^{(k,\,0)}(э_{sk} \mid э_{jk}), \tag{13.27}$$

правые части которых не зависят от времени и являются функциями только от элементов $э_{sk}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, 6$).

Чтобы получить первое приближение, нужно, как мы знаем, заменить в правых частях уравнений (13.27) все элементы $э_{sk}$ их постоянными начальными значениями $э_{sk}^{(0)}$. Тогда все правые части равенств (13.27) сделаются величинами постоянными и, производя непосредственное интегрирование, мы снова получим формулы (13.25), дающие вековые неравенства возмущений первого порядка.

Отбрасывание всех периодических членов разложений величин $E_{sj}^{(k)}$ равносильно, очевидно, замене этих величин свободными членами их рядов Фурье, которые вычисляются по следующим общим формулам:

$$A_{sj}^{(k,\,0)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} E_{sj}^{(k)}\, dM_s\, dM_j, \tag{13.28}$$

и называются средними значениями функций $E_{sj}^{(k)}$.

Поэтому переход от точных уравнений (13.15) к уравнениям (13.27), правые части которых являются средними значениями правых частей уравнений (13.15), называется осреднением уравнений возмущенного движения, а самые уравнения (13.27) называются часто осредненными уравнениями.

Лагранж заметил, что уравнения (13.27) можно рассматривать сами по себе, а их интегрирование как самостоятельную задачу, результаты которой можно назвать теорией вековых возмущений оскулирующих элементов.

Мы рассмотрим эту важную теорию несколько далее, перейдя от кеплеровских оскулирующих элементов к некоторым другим, более удобным для поставленной цели, и которые определяются уравнениями типа уравнений Гамильтона — Якоби. Теперь же заметим только, что задача Лагранжа представляет некоторое новое приближение к действительному решению первоначальных уравнений (13.15), в котором не применяются разложения по степеням возмущающих масс, а совсем другие принципы интегрирования.

Если правые части уравнений (13.27) не зависят от средних долгот эпохи ε_s, т. е. от элементов Э_{s6}, то, как показано выше, все $A_{sj}^{(1,0)}$ равны нулю, а следовательно, все большие полуоси, или элементы Э_{s1}, остаются постоянными. Этот результат представляет некоторое обобщение теоремы Лапласа, которая была сформулирована только для возмущений первого порядка.

Заменяя в остальных уравнениях (13.27) элементы Э_{s1} их постоянными начальными значениями и имея в виду, что правые части этих уравнений не зависят от элементов Э_{s6}, мы получим систему уравнений не $6n$-го порядка, а порядка $4n$, что составляет более простую задачу.

После интегрирования этой системы, дающего элементы Э_{s2}, Э_{s3}, Э_{s4} и Э_{s5} как функции времени, мы определим затем и Э_{s6}, т. е. ε_s, простыми квадратурами.

После этого возникнет новый важный вопрос о близости полученного решения системы (13.27) к решению точной системы уравнений (13.15). Решение этого вопроса представляет весьма сложную математическую задачу, которая стоит в настоящее время в центре внимания современной небесной механики.

§ 3. Теорема Лапласа об устойчивости солнечной системы

1. В предыдущем параграфе было показано, что полуоси оскулирующих орбит больших планет в их относительном движении вокруг Солнца в первом приближении можно считать свободными от вековых возмущений. Поэтому мы можем утверждать (по-прежнему оставаясь в рамках первого приближения), что большие полуоси испытывают только малые периодические колебания около их невозмущенных постоянных значений, откуда следует (с той же точностью приближения), что большие планеты постоянно обращаются вокруг Солнца на почти неизменных расстояниях с почти неизменными угловыми скоростями.

Было отмечено, что до сих пор не известно, обладают ли большие планеты этим свойством в действительности, но если допустить, что это действительно так, то уже почти строго можно доказать, что общее устройство солнеч-