другим, более удобным для поставленной цели, и которые определяются уравнениями типа уравнений Гамильтона — Якоби. Теперь же заметим только, что задача Лагранжа представляет некоторое новое приближение к действительному решению первоначальных уравнений (13.15), в котором не применяются разложения по степеням возмущающих масс, а совсем другие принципы интегрирования.

Если правые части уравнений (13.27) не зависят от средних долгот эпохи $\varepsilon_s$, т. е. от элементов $\text{э}_{s6}$, то, как показано выше, все $A_{sj}^{(1,0)}$ равны нулю, а следовательно, все большие полуоси, или элементы $\text{э}_{s1}$, остаются постоянными. Этот результат представляет некоторое обобщение теоремы Лапласа, которая была сформулирована только для возмущений первого порядка.

Заменяя в остальных уравнениях (13.27) элементы $\text{э}_{s1}$ их постоянными начальными значениями и имея в виду, что правые части этих уравнений не зависят от элементов $\text{э}_{s6}$, мы получим систему уравнений не $6n$-го порядка, а порядка $4n$, что составляет более простую задачу.

После интегрирования этой системы, дающего элементы $\text{э}_{s2}$, $\text{э}_{s3}$, $\text{э}_{s4}$ и $\text{э}_{s5}$ как функции времени, мы определим затем и $\text{э}_{s6}$, т. е. $\varepsilon_s$, простыми квадратурами.

После этого возникнет новый важный вопрос о близости полученного решения системы (13.27) к решению точной системы уравнений (13.15). Решение этого вопроса представляет весьма сложную математическую задачу, которая стоит в настоящее время в центре внимания современной небесной механики.

## § 3. Теорема Лапласа об устойчивости солнечной системы

**1.** В предыдущем параграфе было показано, что полуоси оскулирующих орбит больших планет в их относительном движении вокруг Солнца в первом приближении можно считать свободными от вековых возмущений. Поэтому мы можем утверждать (по-прежнему оставаясь в рамках первого приближения), что большие полуоси испытывают только малые периодические колебания около их невозмущенных постоянных значений, откуда следует (с той же точностью приближения), что большие планеты постоянно обращаются вокруг Солнца на почти неизменных расстояниях с почти неизменными угловыми скоростями.

Было отмечено, что до сих пор не известно, обладают ли большие планеты этим свойством в действительности, но если допустить, что это действительно так, то уже почти строго можно доказать, что общее устройство солнечной системы будет всегда оставаться неизменным и таким же, каким оно является в настоящее время. Это утверждение и составляет знаменитую теорему Лапласа об устойчивости солнечной системы, которую мы рассмотрим в этом параграфе, хотя она имеет, как следует из сказанного, только условное значение.

Предварительно мы выведем необходимое условие устойчивости в смысле Лагранжа для произвольной системы взаимно притягивающихся точек.

Пусть имеем такую систему материальных точек, взаимные расстояния между которыми имеют в начальный момент времени конечные значения, не равные нулю. Движение этой системы материальных точек называется устойчивым в смысле Лагранжа, если все взаимные расстояния всегда остаются ограниченными, так что ни одна из точек не удаляется неограниченно далеко от всех остальных.

Рассмотрим теперь формулу Лагранжа — Якоби, полученную в гл. VII и имеющую следующий простой вид:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2U + 4h', \tag{13.29}$$

где $R$ определяется формулой

$$R = \frac{1}{m} \sum_{i<j} m_i m_j \Delta_{ij}^2 \tag{13.29'}$$

и есть величина существенно положительная (имеющая размерность момента инерции), а $U$ есть полная силовая функция системы, т. е.

$$U = f \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{13.29''}$$

и также существенно положительна.

Так как $U$ обращается в нуль только тогда, когда все взаимные расстояния $\Delta_{ij}$ равны бесконечности, то мы можем считать, что во все время движения системы функция $U$ имеет нижнюю границу, не равную нулю. Обозначая эту нижнюю границу через $A$, будем иметь неравенство

$$0 < A \leqslant U, \tag{13.30}$$

справедливое для всякого момента времени.

Из (13.29) и (13.30) следует также следующее неравенство:

$$\frac{d^2R}{dt^2} \geqslant 2A + 4h', \tag{13.31}$$

интегрируя которое в пределах от $t_0$ до $t$, получим следующее неравенство:

$$\frac{dR}{dt} - R_0 \geqslant (2A + 4h')(t - t_0), \tag{13.31'}$$

где $\dot{R}_0$ обозначает начальное значение производной по времени от величины $R$.

Интегрируя теперь в тех же пределах неравенство (13.31), мы найдем основное неравенство

$$R \geqslant R_0 + \dot{R}_0 (t - t_0) + (A + 2h')(t - t_0)^2, \tag{13.31''}$$

где $R_0$ есть начальное значение величины $R$.

Неравенство (13.31″) показывает, что движение системы может быть устойчивым в смысле Лагранжа только при условии

$$h' < 0. \tag{13.32}$$

Действительно, допустим, что $h' \geqslant 0$ и перепишем неравенство (13.31″) в виде

$$R \geqslant R_0 + [\dot{R}_0 + (A + 2h')(t - t_0)](t - t_0).$$

Отсюда следует, что каково бы ни было $\dot{R}_0$, величина, стоящая в квадратных скобках, неограниченно растет при неограниченно возрастающем $t$, делаясь в конце концов положительной, если $t \to +\infty$ $(t - t_0 > 0)$, и отрицательной, если $t \to -\infty$ $(t - t_0 < 0)$. В обоих случаях правая часть неравенства стремится к положительной бесконечности, когда $|t - t_0| \to \infty$, а следовательно, величина $R$ и подавно неограниченно растет вместе с $|t - t_0|$. Но если $R$ неограниченно растет, то обязательно по крайней мере одно из взаимных расстояний также неограниченно растет, и движение системы заведомо неустойчиво в смысле Лагранжа.

Таким образом, условие (13.32) является необходимым условием устойчивости движения системы в смысле Лагранжа, но, разумеется, оно не является достаточным.

Заметим, что $h'$ есть полная энергия системы в ее движении относительно общего центра инерции, и она равна так же, как показывает уравнение (7.25), полной энергии системы в ее движении относительно точки $M_0$.

Рассмотрим теперь величины $h_s$, определяемые формулами

$$h_s = V_s^2 - \frac{2\mu_s}{r_s}, \tag{13.33}$$

и являющиеся, конечно, некоторыми функциями времени.

Допустим, как это мы и делали выше, что каждая из этих величин $h_s$ остается отрицательной в течение некоторого промежутка времени, включающего в себя начальный момент $t_0$.

Тогда имеем также

$$h_s^{(0)} = V_s^{(0)2} - \frac{2f(m_0 + m_s)}{r_s^{(0)}} < 0, \tag{13.33'}$$

вследствие чего, применяя формулу (7.25) для начального момента $t_0$ и имея в виду, что по основному предположению все массы $m_s$ ($s=1, 2, \ldots, n$) весьма малы по сравнению с массой $m_0$, получим

$$h' = -\frac{1}{2m}\left\{\left[\sum_{s=1}^{n} m_s \dot{x}_s^{(0)}\right]^2 + \left[\sum_{s=1}^{n} m_s \dot{y}_s^{(0)}\right]^2 + \left[\sum_{s=1}^{n} m_s \dot{z}_s^{(0)}\right]^2\right\} + \\ + \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{1}{2} m_s V_s^{(0)^2} - \frac{f m_0 m_s}{r_s^{(0)}}\right] - f \sum_{s<j\neq 0} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}^{(0)}} < 0.$$

Для всех больших планет солнечной системы все величины $h_s$ ($s=1, 2, \ldots, 9$) в настоящее время отрицательны. Следовательно, и полная энергия $h'$ всей солнечной системы также отрицательна, и необходимое условие устойчивости в смысле Лагранжа для солнечной системы, очевидно, выполняется.

Но из этого еще не следует заключать, как уже было отмечено, что солнечная система действительно устойчива (в смысле Лагранжа).

В самом деле, само условие $h'<0$ не является еще достаточным для устойчивости, да и, кроме того, это условие выведено в задаче о движении взаимно притягивающихся материальных точек, которая сама является только некоторым приближением задачи о движении действительных небесных тел.

2. Рассмотрим теперь теорему Лапласа. Предполагая, по-прежнему, что неравенства (13.33′) выполняются, рассмотрим интегралы площадей относительного движения (7.27), считая опять, что все массы $m_s$ весьма малы по сравнению с массой $m_0$.

Тогда, с точностью до членов первого порядка относительно малых масс, мы можем написать уравнения (7.27) в следующем приближенном виде:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} m_s(y_s\dot{z}_s - z_s\dot{y}_s) &= c_1', \\ \sum_{s=1}^{n} m_s(z_s\dot{x}_s - x_s\dot{z}_s) &= c_2', \\ \sum_{s=1}^{n} m_s(x_s\dot{y}_s - y_s\dot{x}_s) &= c_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (13.34)$$

Перейдем в этих уравнениях от прямоугольных координат к оскулирующим кеплеровским элементам, которыми являются, в виду условий (13.33′), элементы эллиптических орбит (13.5′).

Так как каждая масса $m_s$ описывает свою орбиту вокруг массы $m_0$, то мы имеем из формул эллиптического движения следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
y_s\dot{z}_s - z_s\dot{y}_s &= +\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \sin\Omega_s,\\
z_s\dot{x}_s - x_s\dot{z}_s &= -\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \cos\Omega_s,\\
x_s\dot{y}_s - y_s\dot{x}_s &= +\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\cos i_s.
\end{aligned}
$$

Подставив эти выражения в уравнения (13.34), мы получим (с точностью до первых степеней возмущающих масс!) следующие уравнения, которые являются первыми интегралами уравнений возмущенного движения (13.11):

$$
\left.
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \sin\Omega_s &= c_1',\\
-\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \cos\Omega_s &= c_2',\\
\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\cos i_s &= c_3'.
\end{aligned}
\right\}
\tag{13.34'}
$$

Заметим, что система прямоугольных координат с началом в точке $M_0$ и с неизменными направлениями осей была у нас до сих пор совершенно произвольной, и мы можем выбирать направления осей как угодно.

Выберем теперь эту систему координат таким образом, чтобы основная координатная плоскость $xOy$ совпадала с неизменяемой плоскостью Лапласа, которая перпендикулярна к вектору момента количества движения. Тогда $c_1'=0$, $c_2'=0$, $c_3'=c$ и уравнения (13.34′) примут следующий вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \sin\Omega_s &= 0,\\
\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \cos\Omega_s &= 0,\\
\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\cos i_s &= c.
\end{aligned}
\right\}
\tag{13.34''}
$$

Последнее из уравнений (13.34″) и позволяет доказать теорему Лапласа, которую мы сформулируем здесь следующим образом:

**Теорема Лапласа.** Пусть $a_s^{(0)}$, $e_s^{(0)}$, $i_s^{(0)}$ — начальные значения больших полуосей, эксцентриситетов и наклонностей к неизменяемой плоскости оскулирующих орбит точек $M_s$.

Тогда, если:

1) величины $e_s^{(0)}$ и $i_s^{(0)}$ все весьма малы,

2) величины $a_s$ в течение некоторого промежутка времени $(t_0, T)$ весьма мало отличаются от своих начальных значений $a_s^{(0)}$,

3) величины $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$ суть величины одного и того же порядка,

то для всех значений времени в промежутке $(t_0, T)$ величины $e_s$ и $i_s$ будут также оставаться весьма малыми.

Доказательство может быть проведено следующим образом. Согласно условиям теоремы мы можем положить $a_s = a_s^{(0)} + \alpha_s$, где все $\alpha_s$ суть функции времени, имеющие в промежутке $(t_0, T)$ весьма малые числовые значения. Тогда теорема Тейлора дает

$$\sqrt{a_s} = \sqrt{a_s^{(0)}}\left(1 + \frac{\alpha_s}{a_s^{(0)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_s^{(0)}}\left(1 + \frac{\alpha_s}{2a_s^{(0)}} + \ldots\right)$$

и последнее из уравнений (13.34″), если иметь в виду, что $p_s = a_s(1 - e_s^2)$, может быть написано в виде

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\sqrt{1 - e_s^2}\cos i_s = c + \alpha, \tag{13.35}$$

где через $\alpha$ обозначена некоторая функция времени, принимающая в промежутке $(t_0, T)$ весьма малые числовые значения и обращающаяся в нуль при $t = t_0$.

Пусть теперь $c_0$ есть постоянная величина, определяемая формулой

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}} = c_0. \tag{13.35′}$$

Вычитая из этого равенства равенство (13.35), мы получим следующее уравнение:

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\left[1 - \sqrt{1 - e_s^2}\cos i_s\right] = \tilde{c} - \alpha$$

(где $\tilde{c}$ — новая постоянная), которое может быть написано также в виде

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\,\frac{\sin^2 i_s + e_s^2\cos^2 i_s}{1 + \sqrt{1 - e_s^2}\cos i_s} = \tilde{c} - \alpha. \tag{13.36}$$

Последнее уравнение имеет место для всех значений $t$ в промежутке $(t_0, T)$, т. е. пока большие полуоси $a_s$ остаются близкими к своим начальным значениям.

Полагая в уравнении (13.36) $t=t_0$ и имея в виду, что $\alpha$ обращается в нуль в начальный момент, мы найдем

$$\tilde{c}=\sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\,\frac{\sin^2 i_s^{(0)}+e_s^{(0)^2}\cos^2 i_s^{(0)}}{1+\sqrt{1-e_s^{(0)^2}}\cos i_s^{(0)}}. \qquad (13.36')$$

Так как по условию теоремы Лапласа величины $i_s^{(0)}$, $e_s^{(0)}$ весьма малы, а величины $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$ одного и того же порядка, то вычисленное по формуле (13.36′) значение постоянной $\tilde{c}$ также будет весьма мало́.

Отсюда следует, что левая часть равенства (13.36) будет оставаться весьма малой для всех значений $t$ в промежутке $(t_0, T)$, а поэтому в этом промежутке величины $\sin i_s$ и $e_s \cos i_s$ должны сохранять весьма малые значения, т. е. наклонности $i_s$ оскулирующих орбит к неизменяемой плоскости и эксцентриситеты $e_s$ этих орбит будут также оставаться малыми в промежутке $(t_0, T)$, что и нужно было доказать.

Доказанная теорема имеет весьма большое значение для небесной механики. Действительно, пусть рассматриваемая система материальных точек представляет Солнце (масса $m_0$) и девять больших планет $(s=1, 2, \ldots, 9)$.

В настоящее время эксцентриситеты и наклонности орбит (к неизменяемой плоскости) всех больших планет действительно весьма малы, а величины $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$ для всех больших планет имеют значения приблизительно одинакового порядка. С другой стороны, благодаря отсутствию вековых неравенств в возмущениях первого порядка больших полуосей величины $a_s$ для всех больших планет будут оставаться близкими (по крайней мере в течение двух-трех столетий) к их начальным значениям. Поэтому мы можем утверждать, что в течение того же промежутка времени эксцентриситеты и наклонности орбит больших планет солнечной системы действительно будут оставаться малыми.

Иначе говоря, в настоящее время орбиты больших планет суть почти круги и лежат почти в одной плоскости. По теореме Лапласа следует, что такое устройство солнечной системы будет сохраняться все время, пока большие полуоси будут оставаться близкими к их начальным значениям.

Однако распространять этот результат на очень большие (космогонические!) промежутки времени мы не имеем никаких оснований, вследствие чего устройство солнечной системы в далеком будущем (а также в далеком прошлом), по существу, остается неизвестным.

Отметим еще, что если наряду с большими планетами рассматривать в солнечной системе также и малые планеты, то теорема Лапласа уже не будет справедливой даже в первом приближении.

Действительно, массы малых планет суть величины гораздо более высокого порядка (по отношению к массе Солнца), чем массы больших планет, которые все же можно считать величинами одинакового порядка. Таким образом, для солнечной системы, состоящей из больших и малых планет, просто не выполняются условия теоремы, касающиеся порядков величин $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$. Кроме того, не выполняется также и первое условие, так как орбиты многих малых планет обладают заметными эксцентриситетами и наклонностями.

Разумеется, в этом смысле нельзя также включать в солнечную систему кометы и метеоры.

**3.** Возвратимся теперь к соотношениям (13.34″) и посмотрим, какие результаты можно извлечь из двух первых уравнений этой группы, которые мы еще никак не использовали.

Очевидно, два первых равенства системы (13.34″) можно рассматривать как два уравнения, связывающие $4n$ неизвестных $\sqrt{p_s}$, $\sin i_s$, $\sin\Omega_s$, $\cos\Omega_s$, а поэтому из них можно выразить какие-либо две неизвестные величины в зависимости от всех остальных. Например, можно найти $\sqrt{p_1}$ и $\sqrt{p_2}$ или $\sin i_1$ и $\sin i_2$, что позволит понизить порядок общей системы на две единицы. Можно также определить, например, $\sin\Omega_1$ и $\cos\Omega_1$, что позволит найти однозначно $\Omega_1$, и, следовательно, понизить порядок системы на одну единицу.

Однако такое понижение порядка системы уравнений возмущенного движения вообще не доставляет никаких преимуществ и поэтому не производится, а первые два интеграла из системы (13.34) используются обыкновенно как контрольные формулы при определении оскулирующих элементов путем численного интегрирования уравнений.

Можно рассматривать эти два первых соотношения еще и с другой точки зрения. Допустим, что нам известны значения оскулирующих элементов планетных орбит из наблюдений для ряда различных моментов времени. Тогда в этих уравнениях можно рассматривать как неизвестные величины массы $m_s$ планет, которые можно и определить из этих уравнений, выражая какие-нибудь две через остальные.

Рассмотрим еще первые два уравнения системы (13.34) для частного случая, когда $n=2$, т. е. для задачи трех тел (например, для задачи «Солнце — Юпитер — Сатурн»).

Тогда напишем эти уравнения в раскрытом виде следующим образом:

$$
\left.\begin{aligned}
m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1+m_2\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_2}\sin i_2\sin\Omega_2=0,\\
m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1+m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\cos\Omega_2=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(13.37)
$$

откуда имеем

$$
\left.\begin{aligned}
m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1=-m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\sin\Omega_2,\\
m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1=-m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\cos\Omega_2.
\end{aligned}\right\}\qquad(13.37')
$$

Разделив первое из равенств (13.37′) на второе, мы будем иметь замечательное соотношение, впервые полученное Якоби:

$$
\operatorname{tg}\Omega_1=\operatorname{tg}\Omega_2. \qquad (13.38)
$$

Из соотношения (13.38) мы заключаем, что либо должно быть $\Omega_1=\Omega_2$, либо $\Omega_1=\Omega_2\pm180^\circ$. Но в первом случае оба слагаемых в каждом из уравнений (13.37) будут иметь одинаковые знаки и их сумма не может быть равна нулю. Следовательно, мы должны иметь

$$
\Omega_1=\Omega_2\pm180^\circ. \qquad (13.38')
$$

Таким образом, долгота узла одной планеты просто выражается через долготу узла другой и число неизвестных уменьшается на одну единицу.

Из равенства (13.38′) следует также свойство движения в задаче трех тел, которое можно сформулировать следующим образом:

*Если за основную плоскость взята неизменяемая плоскость Лапласа, то направление на восходящий узел одной планеты совпадает с направлением на нисходящий узел другой планеты.*

Полезно напомнить, что это свойство выведено из уравнений (7.27), в которых отброшены члены второго порядка относительно возмущающих масс.

## § 4. Канонические системы оскулирующих элементов

**1.** В предыдущих параграфах мы рассматривали движения $n$ малых масс $m_s$ относительно массы $m_0$, которая в теории движения больших планет представляет Солнце. Эти *гелиоцентрические движения планет* представляют наибольший интерес для практических приложений, так как наблюдения, производимые с поверхности Земли, непосредственно дающие *топоцентрические положения светил*, лег-