Тогда напишем эти уравнения в раскрытом виде следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1+m_2\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_2}\sin i_2\sin\Omega_2=0,\\ m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1+m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\cos\Omega_2=0,\end{aligned}\right\}\qquad(13.37)$$

откуда имеем

$$\left.\begin{aligned} m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1=-m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\sin\Omega_2,\\ m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1=-m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\cos\Omega_2.\end{aligned}\right\}\qquad(13.37')$$

Разделив первое из равенств (13.37′) на второе, мы будем иметь замечательное соотношение, впервые полученное Якоби:

$$\operatorname{tg}\Omega_1=\operatorname{tg}\Omega_2.\qquad(13.38)$$

Из соотношения (13.38) мы заключаем, что либо должно быть $\Omega_1=\Omega_2$, либо $\Omega_1=\Omega_2\pm180°$. Но в первом случае оба слагаемых в каждом из уравнений (13.37) будут иметь одинаковые знаки и их сумма не может быть равна нулю. Следовательно, мы должны иметь

$$\Omega_1=\Omega_2\pm180°.\qquad(13.38')$$

Таким образом, долгота узла одной планеты просто выражается через долготу узла другой и число неизвестных уменьшается на одну единицу.

Из равенства (13.38′) следует также свойство движения в задаче трех тел, которое можно сформулировать следующим образом:

Если за основную плоскость взята неизменяемая плоскость Лапласа, то направление на восходящий узел одной планеты совпадает с направлением на нисходящий узел другой планеты.

Полезно напомнить, что это свойство выведено из уравнений (7.27), в которых отброшены члены второго порядка относительно возмущающих масс.

§ 4. Канонические системы оскулирующих элементов

1. В предыдущих параграфах мы рассматривали движения n малых масс m_s относительно массы m_0, которая в теории движения больших планет представляет Солнце. Эти *гелиоцентрические движения планет* представляют наибольший интерес для практических приложений, так как наблюдения, производимые с поверхности Земли, непосредственно дающие *топоцентрические положения светил*, легко пересчитать в геоцентрические и затем в гелиоцентрические.

Однако с теоретической точки зрения гелиоцентрические уравнения движения планет не совсем удобны, так как они содержат столько же возмущающих функций, сколько имеется планет, вследствие чего выкладки, связанные с развитием теории интегрирования уравнений движения, оказываются довольно длительными и громоздкими. С этой точки зрения гораздо удобнее пользоваться каноническими уравнениями движения (уравнениями Гамильтона), содержащими только одну функцию — характеристическую функцию, или функцию Гамильтона (гамильтониан), представляющую собой полную энергию движущейся системы материальных точек.

В связи с этим, при применении метода Лагранжа изменения произвольных постоянных удобнее и проще пользоваться не кеплеровскими оскулирующими элементами, а элементами Якоби, дифференциальные уравнения для которых в возмущенном движении также имеют канонический вид, что позволяет при исследовании этих уравнений опираться на общие свойства канонических систем и канонических преобразований.

Рассмотрим сначала для большей простоты и наглядности задачу о движении одной материальной точки в поле центральной силы и подверженной действию произвольной консервативной возмущающей силы, или, во всяком случае, силы, допускающей силовую функцию.

Тогда, как и в гл. XII, наша задача приведется к интегрированию системы трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{13.39}$$

где R — возмущающая функция, зависящая от координат движущейся точки и, вообще, от времени R:

$$R = R(t \mid x, y, z). \tag{13.39'}$$

Вводя теперь характеристическую функцию H, полагая

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu x}{r} - R, \tag{13.40}$$

мы можем переписать систему (13.39) в гамильтоновой форме

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{13.41}$$

Если разложить затем характеристическую функцию на две части, полагая

$$H = H_0 + H_1, \tag{13.42}$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu x}{r}, \quad H_1 = -R, \tag{13.42'}$$

и рассмотреть упрощенную систему, получающуюся из (13.41) заменой полной характеристической функции ее первой частью H_0, то мы получим, очевидно, обычные уравнения невозмущенного кеплеровского движения, общее решение которых подробно рассмотрено в гл. IX.

Если ввести полярные сферические координаты, полагая

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = r\sin\varphi, \tag{13.43}$$

то общий интеграл уравнений невозмущенного движения напишется в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, && \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, && \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \\ &\frac{\partial W}{\partial r} = \dot{r}, && \frac{\partial W}{\partial \varphi} = r^2\dot{\varphi}, && \frac{\partial W}{\partial \lambda} = r^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\lambda}, \end{aligned}\right\} \tag{13.44}$$

где α_s и β_s — произвольные постоянные, а функция W, удовлетворяющая уравнению Гамильтона — Якоби (в полярных координатах)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1, \tag{13.44'}$$

определяется формулой

$$W = \alpha_3\lambda + \int_0^{\varphi} \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi + \int_{r_1}^{r} \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr. \tag{13.44''}$$

В главе IX было показано, что уравнения (13.44) приводятся к обычным формулам невозмущенного кеплеровского движения, дающим координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в функции времени и шести произвольных постоянных, за которые можно принять канонические постоянные α_s и β_s, называемые элементами Якоби, связанные с обычными кеплеровскими элементами простыми формулами.

Допустим, для определенности, что движение точки принадлежит к эллиптическому типу. Тогда невозмущенное движение будет происходить по эллипсу и кеплеровскими элементами будут элементы эллиптической орбиты

$$a, \quad e, \quad i, \quad \Omega, \quad \pi, \quad \varepsilon. \tag{13.45}$$

Элементы Якоби и элементы (13.45) связаны друг с другом следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu}\sqrt{p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i, \\ &\beta_1 = -\tau, \qquad \beta_2 = \omega, \qquad \beta_3 = \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{13.46}$$

или, так как

$$p = a(1-e^2), \quad n(t_0 - \tau) = \varepsilon - \pi, \quad \pi = \Omega + \omega,$$

формулами

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, && \beta_1 = -t_0 + \frac{\varepsilon - \pi}{n}, \\ &\alpha_2 = \sqrt{\mu}\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}, && \beta_2 = \pi - \Omega, \\ &\alpha_3 = \sqrt{\mu}\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\cos i, && \beta_3 = \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{13.46'}$$

причем среднее движение n определяется формулой

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}. \tag{13.46''}$$

Из формул (13.46′) можно выразить также кеплеровские элементы через элементы Якоби, что дает следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &a = -\frac{\mu}{2\alpha_1}, && e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \\ &n = \frac{2\sqrt{2}}{\mu}(-\alpha_1)^{3/2}, && i = \arccos\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right), \\ &\Omega = \beta_3, && \pi = \beta_2 + \beta_3, \\ &\varepsilon = \beta_2 + \beta_3 + \frac{2\sqrt{2}}{\mu}(-\alpha_1)^{3/2}(t_0 + \beta_1) \end{aligned}\right\} \tag{13.46'''}$$

и, кроме того, имеем еще дополнительно

$$p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad \tau = -\beta_1, \quad \omega = \beta_2.$$

Применяя теперь метод Лагранжа, мы рассматриваем возмущенное движение как постоянно и непрерывно изменяющееся невозмущенное движение и определяем возмущенное движение теми же формулами, как и невозмущенное, рассматривая только все элементы (произвольные постоянные) как некоторые функции времени.

Считая произвольными постоянными невозмущенного движения элементы Якоби, мы определим последние в возмущенном движении следующей канонической системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= +\frac{\partial R}{\partial \beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt} &= +\frac{\partial R}{\partial \beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt} &= +\frac{\partial R}{\partial \beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}, \end{aligned}\right\} \tag{13.47}$$

из которой нетрудно, пользуясь соотношениями (13.46'''), вывести обычные уравнения Лагранжа для оскулирующих кеплеровских элементов.

2. Для интегрирования системы уравнений (13.47), определяющих оскулирующие элементы Якоби, необходимо выразить возмущающую функцию через время и канонические элементы.

Так как мы предположили, что оскулирующая орбита все время (или в течение некоторого промежутка времени) остается эллипсом, то координаты x, y, z, определяемые формулами невозмущенного движения, являются периодическими функциями от средней аномалии, которую мы здесь обозначим через l и которая определяется, следовательно, формулой

$$l = n(t - \tau) = n(t + \beta_1). \tag{13.48}$$

Так как координаты движущейся точки (в невозмущенном движении) являются также периодическими функциями долготы узла и долготы перицентра, то R_1 будет также периодической функцией от величин β_2 и β_3 и может быть разложена, следовательно, в тройной ряд Фурье вида

$$R = \sum \begin{matrix} A\cos \\ B\sin \end{matrix} (k_1 l + k_2\beta_2 + k_3\beta_3), \tag{13.49}$$

коэффициенты которого зависят только от элементов α_s.

Таким образом, элементы α_s и β_s входят в функцию R несколько различным образом. Величины β_s суть угловые элементы и входят в функцию R только под знаками тригонометрических функций, а поэтому частные производные от функции R по элементам β_s будут представляться рядами такого же вида, как и ряд (13.49).

Величины α_2 и α_3 входят только в коэффициенты A и B разложения (13.49) и результаты дифференцирования функции R по этим элементам также представятся рядами такого же типа, как и (13.49).

Но иначе обстоит дело с элементом α_1. Эта величина входит и в коэффициенты A и B и под знаки синусов и косинусов через посредство среднего движения n, которое зависит от α_1. Вследствие этого частная производная от возмущающей функции R по элементу α_1 будет содержать члены, содержащие множителем $t-t_0$. Наличие таких членов, неограниченно растущих вместе с временем, крайне затрудняет интегрирование уравнений (13.47), а поэтому обычно стараются так преобразовать эти уравнения, чтобы в их правые части не входили члены такого вида.

Такое преобразование в канонических уравнениях возмущенного движения впервые выполнил Делонэ в своей классической работе по теории движения Луны*), который ввел для этой цели новые канонические элементы, называемые теперь обычно элементами Делонэ.

Чтобы выполнить это преобразование, введем вместо элемента β_1 новую переменную l (среднюю аномалию) формулой (13.48). Тогда мы имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \frac{\partial R}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = n\frac{\partial R}{\partial l},$$

и первое из уравнений системы (13.47) напишется в виде

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = n\frac{\partial R}{\partial l}. \tag{13.50}$$

Далее мы имеем

$$\frac{dl}{dt} = n\left(1+\frac{d\beta_1}{dt}\right) + (t+\beta_1)\frac{\partial n}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt}. \tag{13.50$'$}$$

Обозначим теперь через $\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right)$ частную производную от функции R по α_1, входящему явно, т. е. только через посредство коэффициентов A и B. Тогда мы найдем

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial R}{\partial l}(t+\beta_1)\frac{\partial n}{\partial \alpha_1}.$$

Вставляя теперь в формулу (13.50′) вместо $\frac{d\beta_1}{dt}$ ее значение $-\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}$, а вместо этой производной ее только что написанное выражение, мы найдем

$$\frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right) - n\frac{\partial R}{\partial l}(t+\beta_1)\frac{\partial n}{\partial \alpha_1} + (t+\beta_1)\frac{\partial n}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt}$$

или, в силу (13.50),

$$\frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right).$$

*) См. М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937; Д. Брауэр и Дж. Клеменс, Методы небесной механики, перев. с англ., «Мир», 1964; А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. с франц., «Наука», 1965; К. Шарлье, Небесная механика, перев. с немецк., «Наука», 1966.

Итак, сделанное преобразование заменяет пару уравнений из системы (13.47) для сопряженных элементов α_1, β_1 следующей парой уравнений:

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=n\frac{\partial R}{\partial l},\quad \frac{dl}{dt}=n-n\left(\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}\right). \tag{13.51}$$

Эти уравнения решают поставленную задачу, так как их правые части не содержат t вне знаков тригонометрических функций, но, однако, они не имеют канонической формы, как все остальные уравнения системы (13.47).

Чтобы привести опять всю систему к каноническому виду, заменим также переменную α_1 новой переменной, которую обозначим, согласно Делонэ, через L, полагая

$$L=\sqrt{\mu}\sqrt{a}. \tag{13.52}$$

Тогда из (13.46′) и (13.46″) выводим

$$\alpha_1=-\frac{\mu^2}{2L^2} \tag{13.52′}$$

и

$$n=\frac{\mu^2}{L^3}, \tag{13.53}$$

откуда имеем также

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial L}=n. \tag{13.53′}$$

Теперь из уравнений (13.51) имеем

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial R}{\partial l},\quad \frac{dl}{dt}=\frac{\mu^2}{L^3}-\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right). \tag{13.54}$$

Если ввести теперь новую характеристическую функцию F, полагая

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}+R, \tag{13.55}$$

то уравнения (13.54) напишутся в желаемой канонической форме следующим образом:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l},\quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L}, \tag{13.54′}$$

где частная производная $\frac{\partial F}{\partial L}$ вычисляется в предположении, что n считается как бы постоянной.

Остальные четыре уравнения системы (13.47) не изменятся, но в них функцию R можно, очевидно, заменить на F, так что вся система будет иметь единую характеристическую функцию.

Введем теперь, следуя Делонэ, новые обозначения, полагая

$$\alpha_2=G,\quad \alpha_3=H,\quad \beta_2=g,\quad \beta_3=h, \tag{13.55′}$$

тогда вместо системы (13.47) мы будем иметь следующую каноническую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dG}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dH}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial h},\\ \frac{dl}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dg}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial G}, & \frac{dh}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.56)$$

где F определяется формулой (13.55) и должна быть выражена через время и величины

$$L,\quad G,\quad H,\quad l,\quad g,\quad h, \qquad (13.56')$$

а производная $\frac{\partial F}{\partial L}$ берется по L, входящему только явно.

Величины (13.56′) называются каноническими переменными Делонэ или, более кратко, элементами Делонэ. Эти элементы связаны с элементами Якоби формулами (13.48), (13.52) и (13.55), откуда с помощью формул (13.46′) легко получим соотношения, связывающие элементы Делонэ с обычными кеплеровскими элементами эллиптического движения:

$$\left.\begin{aligned} L&=\sqrt{\mu}\sqrt{a}, & l&=n(t-\tau),\\ G&=\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}, & g&=\pi-\Omega,\\ H&=\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & h&=\Omega. \end{aligned}\right\} \qquad (13.57)$$

Из этих соотношений получим также обратные формулы, выражающие кеплеровские элементы через элементы Делонэ:

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{L^2}{\mu}, & e&=\frac{\sqrt{L^2-G^2}}{L}, & \cos i&=\frac{H}{G},\\ \Omega&=h, & \pi&=g+h, & \tau&=t-\frac{l}{n},\\ \varepsilon&=g+h+l_0, & p&=\frac{G^2}{\mu}, & \omega&=g. \end{aligned}\right\} \qquad (13.57')$$

Полезно отметить, что в невозмущенном движении, т. е. когда $R=0$, мы имеем $F=\frac{\mu^2}{2L^2}$ и поэтому все элементы (13.56′), кроме l, приводятся к своим начальным значениям, а

$$l=n(t-t_0)+l_0.$$

Примечание. Переход от элементов Якоби к элементам Делонэ может быть осуществлен независимо от того, входит ли время t явно в возмущающую функцию или нет.

3. Канонические элементы Делонэ были введены для того, чтобы в правых частях дифференциальных уравнений возмущенного движения, определяющих оскулирующие элементы, не было членов, пропорциональных времени.

Для интегрирования уравнений (13.56) мы должны, как уже было замечено, выразить характеристическую функцию через элементы Делонэ (13.56′), что приводит к ряду вида (13.49), коэффициенты которого зависят от величин L, G и H. Эта зависимость достаточно сложная, так что коэффициенты тригонометрического ряда также приходится разлагать в ряды.

В силу разложений координат эллиптического кеплеровского движения эти ряды будут являться степенными относительно эксцентриситета и наклонности оскулирующей орбиты, которые выражаются через элементы Делонэ формулами (13.57′), вследствие чего упомянутые ряды будут иметь весьма сложную структуру.

Пуанкаре указал, что вместо элементов Делонэ можно ввести другую систему элементов, которые также являются каноническими, но более удобными для приближенных вычислений, связанных с употреблением степенных рядов *).

Эти новые элементы, образующие первую систему канонических элементов Пуанкаре, определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= L, & \lambda &= l + g + h, \\ \Gamma &= L - G, & \gamma &= -g - h, \\ Z &= G - H, & z &= -h. \end{aligned}\right\} \tag{13.58}$$

Нетрудно проверить, что новые элементы также образуют каноническую систему. Для этого образуем выражение **)

$$d\psi = l\,dL + g\,dG + h\,dH - \lambda\,d\Lambda - \gamma\,d\Gamma - z\,dZ,$$

для которого в силу формул (13.58) имеем

$$d\psi = l\,dL + g\,dG + h\,dH - (l + g + h)\,dL + \\ + (g + h)(dL - dG) + h\,(dG - dH) \equiv 0.$$

Таким образом, это выражение оказывается тождественным нулем (т. е. полным дифференциалом), откуда, по теореме Пуанкаре, мы заключаем, что преобразование (13.58) является каноническим и что преобразованные уравнения имеют ту же самую характеристическую функцию. Поэтому уравнения, определяющие элементы

$$\Lambda, \quad \Gamma, \quad Z, \quad \lambda, \quad \gamma, \quad z, \tag{13.58′}$$

напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\Gamma}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial \gamma}, & \frac{dZ}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial z}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}, & \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma}, & \frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial Z}, \end{aligned}\right\} \tag{13.59}$$

---

*) См. А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике.

**) См § 5 гл. VI.

где характеристическая функция F определится формулой

$$F = \frac{\mu^2}{2\Lambda^2} + R, \tag{13.59'}$$

а возмущающая функция R должна быть выражена через элементы (13.58′).

При помощи формул (13.57′) мы выразим без труда элементы Пуанкаре через обычные кеплеровские элементы эллиптического движения формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= \sqrt{\mu}\sqrt{a}, & \lambda &= n(t-\tau)+\pi, \\ \Gamma &= \sqrt{\mu}\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right), & \gamma &= -\pi, \\ Z &= \sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}\,(1-\cos i), & z &= -\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{13.59''}$$

Отсюда мы имеем

$$\frac{\Gamma}{\Lambda} = 1-\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}e^2 + \ldots,$$

т. е. Γ есть величина порядка квадрата эксцентриситета оскулирующей орбиты, и следовательно, весьма мала, если e мало́. Далее,

$$\frac{Z}{\Lambda\sqrt{1-e^2}} = 1-\cos i = \frac{1}{2}i^2 + \ldots,$$

откуда следует, что при малых e и i величина Z есть величина порядка квадрата наклонности.

Наконец, рассмотрим еще одну систему канонических элементов, также введенную в курсе Пуанкаре и называемую второй канонической системой Пуанкаре. Эти элементы Пуанкаре обозначаются буквами

$$\Lambda, \quad \lambda, \quad \xi, \quad \eta, \quad p, \quad q, \tag{13.60}$$

где Λ и λ — те же элементы, что и в первой канонической системе Пуанкаре, а остальные элементы определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, & \eta &= \sqrt{2\Gamma}\sin\gamma, \\ p &= \sqrt{2Z}\cos z, & q &= \sqrt{2Z}\sin z. \end{aligned}\right\} \tag{13.60'}$$

Элементы (13.60) образуют каноническую систему, так как каждая пара — ξ, η и p, q — образует каноническую пару переменных, что показано в § 5 гл. VI.

Согласно теореме Якоби в формулировке Пуанкаре новые переменные определятся канонической системой с той же самой характеристической функцией, и мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Lambda}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial\lambda}, & \frac{d\xi}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial\eta}, & \frac{dp}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial q},\\ \frac{d\lambda}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\Lambda}, & \frac{d\eta}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\xi}, & \frac{dq}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial p}.\end{aligned}\right\} \qquad (13.61)$$

При помощи формул (13.59″) и формул преобразования (13.60′) мы легко получим следующие соотношения между элементами Пуанкаре и кеплеровскими элементами эллиптического движения:

$$\left.\begin{aligned}\Lambda&=L=\sqrt{\mu}\sqrt{a},\\ \lambda&=n(t-\tau)+\pi=l+\Omega+\omega,\\ \xi&=+\sqrt{2\sqrt{\mu}\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\cos\pi,\\ \eta&=-\sqrt{2\sqrt{\mu}\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\sin\pi,\\ p&=+\sqrt{2\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}(1-\cos i)}\cos\Omega,\\ q&=-\sqrt{2\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}(1-\cos i)}\sin\Omega.\end{aligned}\right\} \qquad (13.61')$$

Из этих формул следует, что величины

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$$

суть малые, порядка эксцентриситета e, а величины

$$\frac{p}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}$$

суть малые, порядка наклонности e.

Пуанкаре назвал величины ξ и η *эксцентрическими элементами*, а величины p и q — *облическими элементами**).

Элементы Пуанкаре (13.60) оказываются наиболее удобными из всех возможных систем канонических элементов (которых можно придумать, конечно, еще сколько угодно) для всех тех задач, в которых оскулирующие эксцентриситет и наклонность сохраняют всегда, или по крайней мере длительное время, весьма малые значения. Такими задачами являются почти все задачи классической небесной механики, т. е. задачи о движении больших планет солнечной системы, многих малых планет,

*) От французского слова «obliquité», что означает «наклонение».

почти всех спутников, а также многие задачи современной небесной механики, относящиеся к различным случаям движения искусственных спутников Земли, искусственных спутников Луны, Венеры и Марса.

§ 5. Принципы разложения возмущающей функции

1. Для приближенного интегрирования уравнений возмущенного движения в элементах Делонэ или в элементах Пуанкаре нужно прежде всего выразить характеристическую функцию F через время и сами элементы, что можно сделать, как мы уже знаем, только при помощи разложений характеристической функции в бесконечный ряд.

Так как характеристическая функция F состоит из двух слагаемых, второе из которых есть возмущающая функция R, задаваемая как функция от координат x, y, z, то прежде всего нужно выразить эти координаты через переменные Делонэ или элементы Пуанкаре.

Будем рассматривать, как основные переменные, элементы Пуанкаре (13.60) и предположим для простоты, что возмущающая функция R не зависит от времени. Тогда, если движение рассматриваемой точки принадлежит к эллиптическому типу, то R, как это уже неоднократно отмечалось, будет периодической функцией от средней аномалии l, или от средней долготы λ, и может быть разложена в ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам целых кратностей средней аномалии. Коэффициенты этого разложения будут некоторыми функциями от остальных элементов Пуанкаре, т. е. от Λ, эксцентрических элементов ξ, η и облических элементов p, q. Мы покажем теперь, что эти коэффициенты разложимы по целым, положительным степеням величин

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}, \tag{13.62}$$

которые все численно малы, если эксцентриситет и наклонность оскулирующей орбиты остаются также малыми.

Рассмотрим сначала некоторые зависимости между элементами Пуанкаре и привычными кеплеровскими элементами эллиптического движения.

Из формул (13.61′) мы имеем прежде всего

$$\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2=2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)=e^2+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{8}e^6+\ldots, \tag{13.63}$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, содержит, очевидно, только четные степени эксцентриситета и сходится абсолютно при всяком значении e, меньшем единицы.