почти всех спутников, а также многие задачи современной небесной механики, относящиеся к различным случаям движения искусственных спутников Земли, искусственных спутников Луны, Венеры и Марса.

§ 5. Принципы разложения возмущающей функции

1. Для приближенного интегрирования уравнений возмущенного движения в элементах Делонэ или в элементах Пуанкаре нужно прежде всего выразить характеристическую функцию F через время и сами элементы, что можно сделать, как мы уже знаем, только при помощи разложений характеристической функции в бесконечный ряд.

Так как характеристическая функция F состоит из двух слагаемых, второе из которых есть возмущающая функция R, задаваемая как функция от координат x, y, z, то прежде всего нужно выразить эти координаты через переменные Делонэ или элементы Пуанкаре.

Будем рассматривать, как основные переменные, элементы Пуанкаре (13.60) и предположим для простоты, что возмущающая функция R не зависит от времени. Тогда, если движение рассматриваемой точки принадлежит к эллиптическому типу, то R, как это уже неоднократно отмечалось, будет периодической функцией от средней аномалии l, или от средней долготы λ, и может быть разложена в ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам целых кратностей средней аномалии. Коэффициенты этого разложения будут некоторыми функциями от остальных элементов Пуанкаре, т. е. от Λ, эксцентрических элементов ξ, η и облических элементов p, q. Мы покажем теперь, что эти коэффициенты разложимы по целым, положительным степеням величин

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}, \tag{13.62}$$

которые все численно малы, если эксцентриситет и наклонность оскулирующей орбиты остаются также малыми.

Рассмотрим сначала некоторые зависимости между элементами Пуанкаре и привычными кеплеровскими элементами эллиптического движения.

Из формул (13.61′) мы имеем прежде всего

$$\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2=2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)=e^2+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{8}e^6+\ \ldots, \tag{13.63}$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, содержит, очевидно, только *четные степени* эксцентриситета и сходится абсолютно при всяком значении e, меньшем единицы.

Обращая ряд (13.63), мы получим разложение квадрата эксцентриситета по степеням величины

$$\sigma=\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2, \tag{13.63'}$$

также абсолютно сходящееся при очевидных условиях

$$\left|\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right|<1, \quad \left|\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right|<1. \tag{13.63''}$$

Это разложение имеет вид

$$\begin{aligned} e^2&=\sigma-\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^3+\ldots= \\ &=\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right]^2+\ldots \end{aligned} \tag{13.63'''}$$

и может рассматриваться как двойной ряд, расположенный по степеням величин (13.63″), т. е. $\xi/\sqrt{\Lambda}$, $\eta/\sqrt{\Lambda}$.

Далее мы можем написать

$$\begin{aligned} \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}&=e\sqrt{1+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{8}e^4+\ldots}= \\ &=e\left(1+\frac{1}{8}e^2-\frac{9}{128}e^4+\ldots\right), \end{aligned}$$

где в скобках стоит ряд, расположенный по степеням e^2, абсолютно сходящийся при $e<1$.

Обозначая коэффициенты этого ряда через c_{2k}, мы имеем из (13.61′)

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}e^{2k}\right)\cdot e\cos\pi,$$

$$\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}=-\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}e^{2k}\right)\cdot e\sin\pi.$$

Величина, обратная стоящему в скобках множителю в этих равенствах, может быть разложена в ряд, расположенный по степеням e^2, так что мы имеем

$$\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}e^{2k}\right)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}c'_{2k}e^{2k}=1-\frac{1}{8}e^2+\frac{11}{128}e^4+\ldots$$

Но e^2 разложима по степеням величины (13.63′), а поэтому ряд, расположенный по степеням e^2, может быть также представлен в виде ряда, расположенного по степеням величины

(13.63′), вследствие чего мы будем иметь следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned} e\cos\pi &= +\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\left\{1-\frac{1}{8}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right]+\ \ldots\right\},\\ e\sin\pi &= -\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\left\{1-\frac{1}{8}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right]+\ \ldots\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(13.64)$$

Следовательно, величины $e\cos\pi$ и $e\sin\pi$ разложимы в абсолютно сходящиеся при условиях (13.63″) ряды, расположенные по степеням (целым и положительным) величин $\xi/\sqrt{\Lambda}$ и $\eta/\sqrt{\Lambda}$.

Рассматривая теперь облические элементы p и q, мы имеем из (13.61′)

$$\gamma=\left(\frac{p}{\sqrt{\Lambda}\sqrt[4]{1-e^2}}\right)^2+\left(\frac{q}{\sqrt{\Lambda}\sqrt[4]{1-e^2}}\right)^2=$$

$$=2(1-\cos i)=2\left(1-\sqrt{1-\sin^2 i}\right)=$$

$$=\sin^2 i+\frac{1}{4}\sin^4 i-\frac{1}{8}\sin^6 i+\ \ldots,\quad(13.65)$$

где ряд сходится абсолютно при $|\sin i|<1$.

Отсюда, так же, как и в предшествующем случае, найдем *)

$$\sqrt{2(1-\cos i)}=\sin i\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}\sin^{2k} i\right)=$$

$$=\sin i\left(1+\frac{1}{8}\sin^2 i-\frac{9}{128}\sin^4 i+\ \ldots\right)\quad(13.65')$$

и

$$\sin^2 i=\gamma-\frac{1}{4}\gamma^2+\frac{1}{4}\gamma^4+\ \ldots$$

Так как из (13.61′) в силу (13.65′) мы можем написать

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}(1-e^2)^{-\frac{1}{4}} &= +\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}\sin^{2k} i\right)\cdot\sin i\cos\Omega,\\ \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}(1-e^2)^{-\frac{1}{4}} &= -\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}\sin^{2k} i\right)\cdot\sin i\sin\Omega,\end{aligned}\right\}\quad(13.65'')$$

то отсюда, так же как и выше, следует, что величины

$$\sin i\cos\Omega,\quad \sin i\sin\Omega$$

---

*) Очевидно, что коэффициенты ряда (13.65′), расположенного по степеням $\sin^2 i$, таковы же, как и коэффициенты рассмотренного выше ряда, расположенного по степеням e^2.

разложимы в ряды, расположенные по целым положительным степеням величин

$$\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}(1-e^2)^{-\frac{1}{4}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}(1-e^2)^{-\frac{1}{4}}$$

абсолютно сходящиеся, пока числовые значения этих величин остаются меньшими единицы.

Но e^2, а значит, и $(1-e^2)^{-\frac{1}{4}}$, разложимы по степеням $\xi/\sqrt{\Lambda}$ и $\eta/\sqrt{\Lambda}$.

Таким образом, мы можем утверждать, что величины

$$\left.\begin{aligned} r &= e\cos\pi, & s &= e\sin\pi, \\ u &= \sin i\cos\Omega, & v &= \sin i\sin\Omega \end{aligned}\right\} \tag{13.66}$$

разложимы в абсолютно сходящиеся ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (13.62).

Очевидно, что и наоборот, величины (13.62) разложимы в абсолютно сходящиеся ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (13.66). Существенно отметить, кроме того, что и те и другие ряды не содержат свободных членов, а поэтому уничтожаются при одновременном равенстве нулю всех переменных, по которым произведено разложение.

2. Величины (13.66) были введены Лагранжем в его знаменитой теории вековых возмущений *) и могут быть названы элементами Лагранжа. Эти элементы не являются каноническими, как элементы Пуанкаре, но разложимы в ряды, как было только что показано, по степеням величин (13.62), а поэтому всякие величины, разложимые в ряды по степеням элементов Лагранжа, будут также разложимы в ряды и по степеням канонических элементов (13.62).

Покажем, что координаты x, y, z могут быть разложены в ряды, расположенные по степеням элементов Лагранжа (13.66).

Заметим сначала, что

$$e^2 = r^2 + s^2, \quad \sin^2 i = u^2 + v^2,$$

и, следовательно,

$$e^{2k} = (r^2+s^2)^k, \quad \sin^{2k} i = (u^2+v^2)^k,$$

откуда следует, что все четные степени величин e и $\sin i$ являются целыми рациональными функциями (многочленами) элементов Лагранжа (13.66).

---

*) Элементы этой теории Лагранжа будут рассмотрены ниже, однако за основные переменные мы примем элементы Пуанкаре.

Рассмотрим теперь выражения для координат эллиптического движения, представленные рядами, расположенными по целым положительным степеням эксцентриситета *), и коэффициенты которых суть тригонометрические функции (конечные ряды синусов и косинусов) от средней аномалии, обозначаемой в этой главе буквой l.

Эти коэффициенты даются формулами (11.22′), где направляющие косинусы определяются формулами (9.56) и (9.56′) гл. IX.

Выражение для первого из этих направляющих косинусов может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned}\alpha_\tau &= \cos(\pi-\Omega)\cos\Omega-\sin(\pi-\Omega)\sin\Omega\cos i = \\ &= \cos(\pi-\Omega)\cos\Omega-\sin(\pi-\Omega)\sin\Omega(1-\sin^2 i)^{\frac{1}{2}} = \cos\pi + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sin^2 i\sin\Omega(\sin\pi\cos\Omega-\cos\pi\sin\Omega)\left(1+\frac{1}{4}\sin^2 i+\ldots\right) = \\ &= \cos\pi+\left(\frac{1}{2}uv\sin\pi-\frac{1}{2}v^2\cos\pi\right)\left(1+\frac{1}{4}\sin^2 i+\ldots\right).\end{aligned}$$

Представляя подобным же образом остальные направляющие косинусы и замечая, что выражения, подобные стоящему в последней скобке, разложимы по степеням элементов u и v, мы получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_\tau &= \cos\pi+P^{(2)}\sin\pi-P^{(3)}\cos\pi,\\ \beta_\tau &= \sin\pi-P^{(1)}\sin\pi+P^{(2)}\cos\pi,\\ \gamma_\tau &= u\sin\pi-v\cos\pi,\\ \alpha'_\tau &= -\sin\pi+P^{(2)}\cos\pi+P^{(3)}\sin\pi,\\ \beta'_\tau &= \cos\pi-P^{(1)}\cos\pi-P^{(2)}\sin\pi,\\ \gamma'_\tau &= u\cos\pi+v\sin\pi,\end{aligned}\right\} \tag{13.67}$$

где положено

$$\left.\begin{aligned}&P^{(1)}=\frac{1}{2}u^2P^{(0)},\quad P^{(2)}=\frac{1}{2}uvP^{(0)},\quad P^{(3)}=\frac{1}{2}v^2P^{(0)},\\ &P^{(0)}=1+\frac{1}{4}(u^2+v^2)+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{13.67′}$$

так что $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ суть ряды, расположенные по целым, положительным степеням величин u и v и не содержащие членов ниже второй степени относительно этих переменных.

*) См. формулы (11.22) гл. XI.

Рассматривая теперь формулы (11.22), (11.22′), (11.20′), (11.21‴) и, наконец, (11.34) и (11.34′) гл. XI, мы можем убедиться, что члены рядов, представляющих координаты x, y, z, будут содержать бесчисленное множество произведений вида

$$e^k \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, \pi \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, (k+1-2m)\, l, \tag{13.68}$$

где k есть целое положительное число, а m — другое целое положительное число, не превышающее $(k+1)/2$ *).

Но средняя аномалия l и средняя долгота λ связаны формулой

$$l = \lambda - \pi,$$

и поэтому

$$\cos \nu l = \cos \nu\lambda \cos \nu\pi + \sin \nu\lambda \sin \nu\pi,$$
$$\sin \nu l = \sin \nu\lambda \cos \nu\pi - \cos \nu\lambda \sin \nu\pi.$$

Из (13.68) следует, что ряды типа (11.22) будут содержать бесчисленное множество членов вида

$$e^k \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, \pi \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, (k+1-2m)\, \pi \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, (k+1-2m)\, \lambda. \tag{13.68′}$$

Формулы тригонометрии дают нам следующие выражения для косинуса и синуса кратного угла **):

$$\cos \nu\pi = C_1 (\cos \pi)^{\nu} + C_2 (\cos \pi)^{\nu-2} + \ldots,$$
$$\sin \nu\pi = \sin \pi \left(C_1' (\cos \pi)^{\nu-1} + C_2' (\cos \pi)^{\nu-3} + \ldots\right),$$

где C и C' обозначают числовые коэффициенты.

Заменяя в выражениях типа (13.68) косинусы и синусы кратных долготы перицентра π этими их значениями, мы установим без труда, что в выражения множителей при косинусах и синусах кратных средней долготы λ в формулах для координат x, y, z будут входить члены только следующих типов:

$$\left.\begin{aligned} &e^k \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, \pi \times (\cos \pi)^{k+1-2m'}, \\ &e^k \times \sin^2 \pi \times (\cos \pi)^{k-2m'}, \end{aligned}\right\} \tag{13.68″}$$

где $m' \leqslant m$.

*) Выражение вида (13.68) заключает в себе четыре различных, но однотипных выражения.

**) См., например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

Но мы можем написать

$$e^k \times \cos\pi \times (\cos\pi)^{k+1-2m'} =$$
$$= (e\cos\pi)^{k+2-2m'} \times e^{2m'-2} = r^{k+2-2m'} \times (r^2+s^2)^{m'-1},$$
$$e^k \times \sin\pi \times (\cos\pi)^{k+1-2m'} =$$
$$= (e\sin\pi) \times (e\cos\pi)^{k+1-2m'} \times e^{2m'-2} = sr^{k+1-m'}(r^2+s^2)^{m'-1},$$
$$e^k \times \sin^2\pi \times (\cos\pi)^{k-2m'} =$$
$$= (e\sin\pi)^2 \times (e\cos\pi)^{k-2m'} \times e^{2m'-2} = s^2 r^{k-2m'}(r^2+s^2)^{m'-1}.$$

Таким образом, каждый (из бесчисленного множества) член в каждом из рядов (11.22) является целой рациональной функцией от r, s, коэффициенты которой суть ряды, расположенные по степеням u и v. Из сказанного выше следует также, что эти коэффициенты суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов целых кратностей средней долготы λ.

Таким образом, мы убеждаемся, что каждая из координат движущейся точки x, y, z разложима в ряд, расположенный по целым положительным степеням элементов Лагранжа r, s, u, v, коэффициенты которого суть тригонометрические многочлены относительно синусов и косинусов целых кратностей λ.

Так как было уже показано, что элементы Лагранжа разложимы в ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (13.62), то, следовательно, и координаты x, y, z разложимы в ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (13.62), а коэффициенты этих рядов суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов целых кратностей λ.

Так как исходные ряды (11.22) для координат x, y, z являются абсолютно сходящимися при любом значении средней аномалии l, пока эксцентриситет орбиты e не превосходит лапласова предела, то и преобразованные ряды, расположенные по степеням величин (13.62), также будут абсолютно сходящимися при любом значении средней долготы λ и при $e<\bar{e}=0{,}6627, \ldots$, а значит, когда числовые значения величин (13.62) остаются меньшими некоторого предела, отличного от нуля.

Располагая члены полученных рядов надлежащим образом (что возможно в силу их абсолютной сходимости), мы можем превратить эти ряды в тригонометрические, расположенные по косинусам и синусам целых кратностей λ, коэффициенты которых являются целыми рядами, расположенными по степеням величин (13.62).

Заменяя затем в выражении возмущающей функции R координаты x, y, z полученными рядами, мы можем представить эту функцию также в виде ряда такой же структуры, т. е. в виде ряда

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\cos k\lambda+B_k\sin k\lambda), \tag{13.69}$$

коэффициенты которого суть целые ряды, расположенные по степеням величин (13.62), т. е. имеют вид

$$\left.\begin{matrix}A_k\\ \\ B_k\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}A_k^{(0)}\\ \\ B_k^{(0)}\end{matrix}\right. \times\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_2}\left(\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_3}\left(\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_4}.$$

§ 6. Канонические уравнения общей теории возмущений

1. Рассмотрим опять основную задачу небесной механики, т. е. задачу о движении системы $n+1$ взаимно притягивающихся материальных точек M_s ($s=0, 1, 2, \ldots, n$), предполагая, что масса m_0 весьма велика по сравнению со всеми остальными массами.

В первых параграфах этой главы мы изучали движения n малых масс относительно массы m_0, которая в теории движения больших планет представляет Солнце; эти *гелиоцентрические движения планет* представляют наибольший интерес для практических приложений, но, как было уже отмечено в § 4, не совсем удобны для теоретических исследований, так как гелиоцентрические уравнения движения не имеют канонической формы.

В § 4 мы рассматривали канонические уравнения и канонические переменные для простейшей задачи о движении одной материальной точки в центральном поле и под действием возмущающей силы. Здесь мы распространим изложенные ранее результаты на задачу о движении системы материальных точек, предполагая, что все действующие силы, и основные и возмущающие, исключительно силы взаимных притяжений, определяемые законом Ньютона.

Мы будем исходить из уравнений движения взаимно притягивающихся материальных точек в координатах Якоби (см. гл. VII). Эти уравнения имеют следующий вид:

$$m'_s\ddot{x}'_s=\frac{\partial U}{\partial x'_s},\quad m'_s\ddot{y}'_s=\frac{\partial U}{\partial y'_s},\quad m'_s\ddot{z}'_s=\frac{\partial U}{\partial z'_s}, \tag{13.70}$$

где x'_s, y'_s, z'_s — прямоугольные декартовские координаты точки M_s ($s=1, 2, \ldots, n$) в системе осей с началом в центре масс