Заменяя затем в выражении возмущающей функции R координаты x, y, z полученными рядами, мы можем представить эту функцию также в виде ряда такой же структуры, т. е. в виде ряда

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\lambda + B_k \sin k\lambda), \tag{13.69}$$

коэффициенты которого суть целые ряды, расположенные по степеням величин (13.62), т. е. имеют вид

$$\left.\begin{matrix} A_k \\ \\ B_k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A_k^{(0)} \\ \\ B_k^{(0)} \end{matrix}\right. \times \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_1} \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_2} \left(\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_3} \left(\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_4}.$$

§ 6. Канонические уравнения общей теории возмущений

1. Рассмотрим опять основную задачу небесной механики, т. е. задачу о движении системы $n+1$ взаимно притягивающихся материальных точек M_s ($s=0, 1, 2, \ldots, n$), предполагая, что масса m_0 весьма велика по сравнению со всеми остальными массами.

В первых параграфах этой главы мы изучали движения n малых масс относительно массы m_0, которая в теории движения больших планет представляет Солнце; эти *гелиоцентрические движения планет* представляют наибольший интерес для практических приложений, но, как было уже отмечено в § 4, не совсем удобны для теоретических исследований, так как гелиоцентрические уравнения движения не имеют канонической формы.

В § 4 мы рассматривали канонические уравнения и канонические переменные для простейшей задачи о движении одной материальной точки в центральном поле и под действием возмущающей силы. Здесь мы распространим изложенные ранее результаты на задачу о движении системы материальных точек, предполагая, что все действующие силы, и основные и возмущающие, исключительно силы взаимных притяжений, определяемые законом Ньютона.

Мы будем исходить из уравнений движения взаимно притягивающихся материальных точек в координатах Якоби (см. гл. VII). Эти уравнения имеют следующий вид:

$$m'_s \ddot{x}'_s = \frac{\partial U}{\partial x'_s}, \quad m'_s \ddot{y}'_s = \frac{\partial U}{\partial y'_s}, \quad m'_s \ddot{z}'_s = \frac{\partial U}{\partial z'_s}, \tag{13.70}$$

где x'_s, y'_s, z'_s — прямоугольные декартовские координаты точки M_s ($s=1, 2, \ldots, n$) в системе осей с началом в центре масс

G_{s-1} точек $M_0, M_1, \ldots, M_{s-1}$ и с неизменными направлениями осей *).

Постоянные m'_s, называемые «приведенными массами» точек M_s, зависят только от масс точек системы и определяются формулами **)

$$m'_s = \frac{m_s \sigma_{s-1}}{\sigma_s} = \frac{m_s (m_0 + m_1 + \ldots + m_{s-1})}{m_0 + m_1 + \ldots + m_{s-1} + m_s}. \qquad (13.71)$$

Наконец, U есть полная силовая функция всей системы точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ и определяется известной формулой

$$U = f \sum_{s<j} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \qquad (13.72)$$

где Δ_{sj} суть взаимные расстояния между точками, причем

$$\Delta_{sj}^2 = \left(x'_j - x'_s + \sum_{k=s}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \left(y'_j - y'_s + \sum_{k=s}^{j-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \left(z'_j - z'_s + \sum_{k=s}^{j-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k}\right)^2. \qquad (13.73)$$

Заметим, что для солнечной системы все точки G_{s-1} находятся внутри Солнца, в окрестности его центра, и координаты Якоби больших планет солнечной системы отличаются от их гелиоцентрических координат на малые величины, порядка возмущающих масс (см. формулы (7.32″) гл. VII).

Уравнения (13.70) легко привести к обычному виду уравнений возмущенного движения типа (12.1).

Действительно, положим

$$r'_s = \sqrt{x'^2_s + y'^2_s + z'^2_s}, \qquad (13.74)$$

$(s = 1, 2, \ldots, n)$, причем $r'_1 = \Delta_{01}$, и представим силовую функцию в следующем виде:

$$U = f \sum_{j=1}^{n} \frac{m_0 m_j}{r'_j} + U', \qquad (13.75)$$

*) Соответственные оси всех этих n «собственных систем» координат предполагаются параллельными.

**) Каждая из этих приведенных масс есть величина того же порядка, что и собственная масса точки M_s, а каждая из величин σ_s имеет тот же порядок, как и масса m_0 «главной» точки M_0.

где *)

$$U' = f\sum_{j=2}^{n} m_0 m_j\left(\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j}\right) + f\sum_{s<j}{}' \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \tag{13.76}$$

причем, согласно (13.73),

$$\Delta_{0j}^2 = \left(x_j + \sum_{k=1}^{j-1}\frac{m_k x'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \left(y_j + \sum_{k=1}^{j-1}\frac{m_k y'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \left(z_j + \sum_{k=1}^{j-1}\frac{m_k z'_k}{\sigma_k}\right)^2. \tag{13.73'}$$

Отсюда видно, что всякая разность

$$\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j} \qquad (j > 1)$$

есть величина первого порядка относительно возмущающих масс, а функция U', следовательно, есть величина второго порядка относительно тех же масс.

Теперь уравнения (13.70) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}'_s + \frac{\mu'_s x'_s}{r'^3_s} &= \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial x'_s},\\ \ddot{y}'_s + \frac{\mu'_s y'_s}{r'^3_s} &= \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial y'_s},\\ \ddot{z}'_s + \frac{\mu'_s z'_s}{r'^3_s} &= \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial z'_s}, \end{aligned}\right\} \tag{13.77}$$

где положено

$$\mu'_s = \frac{f m_0 m_s}{m'_s} = \frac{f m_0 \sigma_s}{\sigma_{s-1}}, \tag{13.77'}$$

и где все правые части суть величины первого порядка относительно масс m_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$**).

Уравнения (13.77) имеют, очевидно, такую же форму, как и уравнения гелиоцентрического движения (13.1), но составляющие возмущающих ускорений

$$\frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial x'_s}, \quad \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial y'_s}, \quad \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial z'_s}$$

*) Штрих при знаке суммы здесь показывает, что индекс s не принимает значения нуль.

**) Все множители μ'_s суть конечные величины, значения которых близки к значению величины fm_0.

здесь содержат частные производные по координатам x'_s, y'_s, z'_s только от одной функции U', которая и играет здесь роль «возмущающей функции».

Пренебрегая в уравнениях (13.77) малыми величинами порядка возмущающих масс, мы получим «упрощенные уравнения», или уравнения первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}'_s + \frac{\mu'_s x'_s}{r'^3_s} = 0, \\ &\ddot{y}'_s + \frac{\mu'_s y'_s}{r'^3_s} = 0, \\ &\ddot{z}'_s + \frac{\mu'_s z'_s}{r'^3_s} = 0 \\ &(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{aligned}\right\} \tag{13.78}$$

которые, так же как и уравнения (13.1′), распадаются на n независимых систем, каждая из которых определяет невозмущенное кеплеровское движение точки M_s относительно точки G_{s-1}.

Каждое из этих n кеплеровских движений определится формулами, аналогичными формулам третьей части этой книги, но во избежание путаницы все величины в этих формулах следует снабдить значком «штрих». В частности, кеплеровские элементы каждой из невозмущенных орбит точек M_s обозначим через

$$\Omega'_s,\quad i'_s,\quad \omega'_s,\quad p'_s,\quad e'_s,\quad \tau'_s, \tag{13.79}$$

а если для каждой из точек M_s выполняется условие

$$V'^2_s - \frac{2\mu'_s}{r'_s} < 0$$

(что мы и будем здесь предполагать), то будем рассматривать эллиптические элементы *)

$$\Omega'_s,\quad i'_s,\quad a'_s,\quad e'_s,\quad \pi'_s,\quad \varepsilon'_s. \tag{13.79′}$$

В возмущенном движении точек M_s относительно точек G_{s-1} величины (13.79) или (13.79′) будут некоторыми функциями времени, которые связаны соотношениями, получающимися из интегралов (7.37) и (7.37′) уравнений (13.70).

---

*) Полезно иметь в виду, что элементы (13.79) или (13.79′) отличны от аналогичных элементов (13.5) или (13.5′) невозмущенных движений точек M_s относительно точки M_0, но эти отличия, как легко сообразить, также суть малые величины порядка возмущающих масс m_s.

Рассматривая эти интегралы, мы можем из них вывести (так же, как это было сделано в § 5) теоремы Лапласа и Якоби. Здесь этот вывод будет совершенно точным, так как при рассмотрении уравнений (7.37) нам не понадобится пренебрегать какими-либо членами.

Повторять вывод этих теорем, очевидно, нет надобности.

2. Как уже было отмечено, удобство координат Якоби заключается в том, что уравнения движения системы в этих координатах могут быть приведены к канонической форме.

Это приведение было выполнено в гл. VII. Принимая за канонические переменные первой группы сами координаты x'_s, y'_s, z'_s и определяя сопряженные им канонические переменные формулами

$$u'_s = m'_s \dot{x}'_s, \quad v'_s = m'_s \dot{y}'_s, \quad w'_s = m'_s \dot{z}'_s,$$

мы перепишем систему (13.70) в канонической форме *)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'_s}{dt} &= +\frac{\partial H'}{\partial u'_s}, & \frac{dy'_s}{dt} &= +\frac{\partial H'}{\partial v'_s}, & \frac{dz'_s}{dt} &= +\frac{\partial H'}{\partial w'_s}, \\ \frac{du'_s}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial x'_s}, & \frac{dv'_s}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial y'_s}, & \frac{dw'_s}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial z'_s}, \end{aligned}\right\} \tag{13.80}$$

где характеристическая функция определяется формулой

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{m'_s}\left(u'^2_s + v'^2_s + w'^2_s\right) - U. \tag{13.81}$$

Для интегрирования системы (13.80) применим метод Якоби изменения произвольных постоянных в канонических переменных. Для этого представим характеристическую функцию H' в виде суммы двух частей, полагая

$$H' = H'_0 + H'_1, \tag{13.82}$$

где

$$H'_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{m'_s}\left(u'^2_s + v'^2_s + w'^2_s\right) - f\sum_{s=1}^{n}\frac{m_0 m_s}{r'_s} \tag{13.82'}$$

есть основная часть характеристической функции, а H'_1, определяемая формулой

$$-H'_1 \equiv U' = f\sum_{j=2}^{n} m_0 m_j\left(\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j}\right) + f\sum_{s<j}{}' \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \tag{13.82''}$$

представляет собой возмущающую функцию.

*) Это та же система (7.51). Только индекс i заменен здесь индексом s.

Заменяя в уравнениях (13.80) полный гамильтониан H' его основной частью (13.82′), мы получим, очевидно, уравнения невозмущенного движения, распадающиеся на n независимых систем, каждая из которых приводится к виду (13.78).

Интегрируя каждую из этих систем, мы получим n систем формул, каждая из которых определяет эллиптическое кеплеровское движение с элементами (13.79′).

Каждой системе этих кеплеровских элементов соответствует своя система канонических элементов Якоби, определяемых формулами вида (13.46′), которые для нашего случая нужно написать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1s} &= -\frac{\mu'_s}{2a'_s}, & \beta_{1s} &= -t_0 + \frac{\varepsilon'_s - \pi'_s}{n'_s}, \\ \alpha_{2s} &= \sqrt{\mu'_s}\sqrt{a'_s}\sqrt{1-e'^2_s}, & \beta_{2s} &= \pi'_s - \Omega'_s, \\ \alpha_{3s} &= \sqrt{\mu'_s}\sqrt{a'_s}\sqrt{1-e'^2_s}\cos i'_s, & \beta_{3s} &= \Omega'_s, \end{aligned}\right\} \tag{13.83}$$

причем каждое среднее движение n'_s определяется формулой

$$n'_s = \frac{\sqrt{\mu'_s}}{a'^{3/2}_s}. \tag{13.83′}$$

В возмущенном движении, определяемом полной системой канонических уравнений (13.80), мы можем сохранить, согласно принципу метода вариации произвольных постоянных, все формулы, определяющие невозмущенное движение каждой точки M_s, считая все элементы (13.79′), а следовательно, и все якобиевские элементы α_{ks} и β_{ks}, функциями времени.

Эти функции (новые канонические переменные) определятся также системой канонических уравнений с характеристической функцией U', которую, разумеется, необходимо выразить через время и канонические элементы.

Канонические уравнения для новых переменных имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_{1s}}{dt} &= +\frac{\partial U'}{\partial \beta_{1s}}, & \frac{d\alpha_{2s}}{dt} &= +\frac{\partial U'}{\partial \beta_{2s}}, & \frac{d\alpha_{3s}}{dt} &= +\frac{\partial U'}{\partial \beta_{3s}}, \\ \frac{d\beta_{1s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}}, & \frac{d\beta_{2s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{2s}}, & \frac{d\beta_{3s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{3s}}. \end{aligned}\right\} \tag{13.84}$$

Переходя теперь от элементов Якоби к элементам Делонэ, мы получим уравнения возмущенного движения соответственно в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_s}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial l_s}, & \frac{dG_s}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial g_s}, & \frac{dH_s}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial h_s}, \\ \frac{dl_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_s}, & \frac{dg_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_s}, & \frac{dh_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_s}, \end{aligned}\right\} \tag{13.85}$$

причем новые переменные связаны с кеплеровскими элементами (13.79′) формулами, подобными формулам (13.57), так что имеем

$$\left.\begin{aligned} L_s &= \sqrt{\mu_s'}\sqrt{a_s'}, & l_s &= n_s'(t-\tau_s'),\\ G_s &= \sqrt{\mu_s'}\sqrt{a_s'(1-e_s'^2)}, & g_s &= \pi_s'-\Omega_s',\\ H_s &= \sqrt{\mu_s'}\sqrt{a_s'(1-e_s'^2)}, & h_s &= \Omega_s'. \end{aligned}\right\} \tag{13.85′}$$

Новая характеристическая функция F определится, аналогично (13.55), следующей формулой:

$$F=\sum_{s=1}^{n}\frac{\mu_s'^2}{2L_s^2}+U'. \tag{13.86}$$

Наконец, рассмотрим вторую каноническую систему Пуанкаре типа (13.60), содержащую n групп переменных

$$\Lambda_s,\quad \lambda_s,\quad \xi_s,\quad \eta_s,\quad p_s,\quad q_s, \tag{13.87}$$

определяемых канонической системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Lambda_s}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial\lambda_s}, & \frac{d\xi_s}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial\eta_s}, & \frac{dp_s}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial q_s},\\ \frac{d\lambda_s}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\Lambda_s}, & \frac{d\eta_s}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\xi_s}, & \frac{dq_s}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial p_s} \end{aligned}\right\} \tag{13.87′}$$

с той же характеристической функцией F, которая теперь определится формулой

$$F=\sum_{s=1}^{n}\frac{\mu_s'^2}{2\Lambda_s^2}+U', \tag{13.87″}$$

причем предполагается, что U' выражена через величины (13.87) и представлена в виде ряда.

Согласно (13.61) и (13.57) элементы (13.87) выразятся через кеплеровские элементы следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Lambda_s&=L_s, & \xi_s&=\sqrt{2(L_s-G_s)}\cos\pi_s, & p_s&=\sqrt{2(G_s-H_s)}\cos\Omega_s,\\ \lambda_s&=l_s+\pi_s', & \eta_s&=-\sqrt{2(L_s-G_s)}\sin\pi_s, & q_s&=-\sqrt{2(G_s-H_s)}\sin\Omega_s. \end{aligned}$$

3. Перейдем теперь к рассмотрению разложения характеристической функции канонических дифференциальных уравнений возмущенного движения. Так как наиболее удобными каноническими элементами являются величины (13.87) — вторая система канонических элементов Пуанкаре, — то рассмотрим функцию F, входящую в уравнения (13.87′).

Из формулы (13.86) следует, что разложению подлежит только вторая часть характеристической функции, а именно функция U', которая и является, собственно говоря, возмущающей функцией нашей задачи. Эта функция U', определяемая формулой (13.76), зависит только от взаимных расстояний между движущимися точками, которые в свою очередь являются функциями координат Якоби x'_s, y'_s, z'_z и вычисляются по формулам (13.73), (13.73′) и (13.74). Поэтому функция U', а следовательно, и функция F, остается конечной и непрерывной для всех значений координат, кроме тех их значений, которые обращают в нуль какой-либо из радиусов-векторов или какое-либо из взаимных расстояний.

Допустим, что начальные условия для исходной системы (13.70) заданы таким образом, что никакие две из $n+1$ точек системы не могут столкнуться ни для какого значения времени *).

Тогда функция U' всегда будет оставаться конечной, а так как координаты каждой из движущихся точек в ее *невозмущенном движении* могут быть разложены, как было показано в предыдущем параграфе, в ряды по степеням *собственных величин*

$$\frac{\xi_s}{\sqrt{\Lambda_s}},\quad \frac{\eta_s}{\sqrt{\Lambda_s}},\quad \frac{p_s}{\sqrt{\Lambda_s}},\quad \frac{q_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{13.88}$$

и по косинусам и синусам *собственной средней долготы* λ_s, то возмущающая функция U' может быть разложена в ряд, расположенный по целым положительным степеням $4n$ величин (13.88) ($s=1, 2, \ldots, n$), коэффициенты которого суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов аргументов вида

$$k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\ \ldots\ +k_n\lambda_n \tag{13.88′}$$

(где все k_s суть целые числа) и, кроме того, зависят от элементов Λ, т. е. от больших полуосей оскулирующих орбит.

Это разложение функции U' можно также рассматривать как n-кратный ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам аргументов вида (13.88′), коэффициенты которого представляются целыми рядами, расположенными по степеням величин (13.88), коэффициентами, в свою очередь зависящими от Λ_s.

*) Условия столкновения между какими-либо двумя точками системы выражаются некоторыми соотношениями между начальными значениями координат и составляющих скоростей этих точек. Вывод этих соотношений очень длинен и сложен и в этой книге не рассматривается. Можно заметить, впрочем, что начальные условия, приводящие к соударениям, являются исключительными.

Таким образом, мы можем написать:

$$U'=\sum\left[A^{(k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_n)}\cos(\lambda_1k_1+\lambda_2k_2+\ldots+\lambda_nk_n)+\right.$$
$$\left.+B^{(k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_n)}\sin(\lambda_1k_1+\lambda_2k_2+\ldots+\lambda_nk_n)\right],\qquad(13.89)$$

где коэффициенты A и B суть ряды вида *)

$$\left.\begin{array}{l}A^{(k_1,\,\ldots,\,k_n)}\\ B^{(k_1,\,\ldots,\,k_n)}\end{array}\right\}=\sum\prod_{s=1}^{n}\left\{\begin{array}{l}A_\nu^{(\ldots)}\\ B_\nu^{(\ldots)}\end{array}\right\}\left(\frac{\xi_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\right)^{\nu_{s1}}\left(\frac{\eta_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\right)^{\nu_{s2}}\left(\frac{p_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\right)^{\nu_{s3}}\left(\frac{q_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\right)^{\nu_{s4}},\qquad(13.89')$$

где все показатели ν_{sj} суть положительные целые числа, или нули.

Совокупность всех членов разложения возмущающей функции U', не зависящих от средних долгот λ_s, мы назовем, как принято, вековой частью возмущающей функции и обозначим через $[U']$.

Эта вековая часть функции U' является, очевидно, просто свободным членом разложения (13.89), соответствующим системе нулевых значений индексов k_s, и также представляется $4n$-кратным рядом, расположенным по степеням величин (13.88), коэффициенты которого зависят только от элементов Λ_s.

С другой стороны, свободный член ряда Фурье определяется известной формулой:

$$[U']=A^{(0,\,\ldots,\,0)}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}U'\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,\ldots\,d\lambda_n.\qquad(13.90)$$

Иными словами, вековая часть функции U' совпадает со средним значением этой функции относительно аргументов λ_s.

Поэтому вычисление, или нахождение, вековой части $[U']$ функции U' называется также иногда осреднением этой функции по аргументам $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

Мы не будем производить в этой книге фактическое разложение возмущающей функции и отметим только нужные нам для дальнейшего простые свойства этого разложения **).

Прежде всего заметим, что вследствие формул (13.73) и (13.73′) обратные взаимные расстояния могут быть разложены

*) Знак $\prod\limits_{s=1}^{n}$ обозначает, как принято в математике, произведение n множителей, каждый из которых состоит из произведения степеней величин (13.88).

**) Первые члены разложения возмущающей функции для $n=2$ приведены в моей книге «Введение в небесную механику», ГОНТИ, 1938.

в ряды, расположенные по целым положительным степеням малых возмущающих масс.

Коэффициенты этих разложений будут зависеть от целых степеней радиусов-векторов r'_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ и от целых положительных степеней скалярных произведений вида

$$x'_i x'_j + y'_i y'_j + z'_i z'_j \qquad (j \neq i).$$

Имея теперь в виду структуру разложений координат каждой из точек по степеням своих величин (13.88) и только что замеченное свойство разложений обратных расстояний, мы можем убедиться, что любой член разложения возмущающей функции U' по степеням всех величин (13.88) будет содержать в своем коэффициенте косинусы и синусы только тех аргументов (13.88), для которых сумма $|k_1|+|k_2|+\ldots+|k_n|$ есть число одинаковой четности с суммой показателей всех степеней величин (13.88) в рассматриваемом члене. Поэтому каждый член четной степени в разложении U' по степеням величин (13.88) обязательно будет содержать в своем коэффициенте члены, для которых $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$, т. е. вековые члены.

Наоборот, каждый член нечетной степени относительно всех величин (13.88) в разложении U' будет содержать в своем коэффициенте только такие синусы и косинусы, для которых $|k_1|+|k_2|+\ldots+|k_n|$ есть нечетное число, откуда следует, что члены нечетной степени заведомо не содержат в своих коэффициентах вековых членов.

Из этих рассуждений следует, что вековая часть $[U']$ возмущающей функции U' содержит члены только четной степени относительно величин (13.88) $(s=1, 2, \ldots, n)$.

Обозначим теперь через $[F]$ вековую часть характеристической функции F системы уравнений возмущенного движения (13.87′). Очевидно, что

$$[F]=\sum_{s=1}^{n}\frac{\mu_s'^2}{2\Lambda_s^2}+[U'], \tag{13.91}$$

а поэтому $[F]$ (или среднее значение гамильтониана F) есть ряд, расположенный по степеням всех величин (13.88) и содержащий члены только четной степени относительно этих переменных.

Мы можем представить, следовательно, функцию $[F]$ в виде ряда

$$[F]=\Phi_0+\Phi_2+\ldots+\Phi_{2k}+\ldots, \tag{13.91′}$$

где Φ_{2k} обозначает целую, рациональную, однородную функцию степени $2k$ от всех величин (13.88), коэффициенты которой зависят только от элементов Λ_s (и, разумеется, от масс движущихся точек!).

В частности, Φ_2 есть **квадратичная форма** от всех величин (13.88).

Обращая внимание на формулы (13.67) и (13.67′), мы можем утверждать, что квадратичная форма Φ_2 есть сумма двух квадратичных форм, одна из которых содержит только эксцентрические элементы, а другая — только облические элементы.

Выпишем окончательные выражения для упомянутых квадратичных форм, вытекающие из подробного разложения возмущающей функции, в котором, сверх того, отброшены все члены выше второго порядка относительно возмущающих масс *).

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_2'(x_i, x_j) &= fm_im_j\left\{\frac{1}{8}B_1(a_i', a_j')\left[\frac{x_i^2}{\Lambda_i}+\frac{x_j^2}{\Lambda_j}\right]-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{4}B_2(a_i', a_j')\frac{x_ix_j}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\right\},\\
\Phi_2''(x_i, x_j) &= fm_im_j\left\{\frac{1}{8}B_1(a_i', a_j')\left[\frac{x_i^2}{\Lambda_i}+\frac{x_j^2}{\Lambda_j}\right]-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{4}B_1(a_i', a_j')\frac{x_ix_j}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{13.92}$$

где i и j суть какие-либо значения индексов из ряда 1, 2, ..., n $(j \neq i)$, а B_1 и B_2 суть положительные числа, зависящие только от полуосей оскулирующих орбит, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned}
B_1(a_i', a_j') &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{a_i'a_j'\cos\varphi\,d\varphi}{\left(a_i'^2+a_j'^2-2a_i'a_j'\cos\varphi\right)^{3/2}},\\
B_2(a_i', a_j') &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{a_i'a_j'\cos 2\varphi\,d\varphi}{\left(a_i'^2+a_j'^2-2a_i'a_j'\cos\varphi\right)^{3/2}},
\end{aligned}\right\} \tag{13.92′}$$

мы будем иметь для квадратичной формы Φ_2 следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Phi_2 = \left\{\sum\Phi_2'(\xi_i, \xi_j)+\sum\Phi_2'(\eta_i, \eta_j)\right\}+\\
+\left\{-\sum\Phi_2''(p_i, p_j)-\sum\Phi_2''(q_i, q_j)\right\},
\end{aligned} \tag{13.93}$$

*) Мы не можем в этой книге рассматривать все детали техники разложения возмущающей функции и ограничиваемся только изложением общих принципов этих громоздких операций.

где каждая сумма распространена на все различные пары индексов, так что $ij=12,\ 13,\ \ldots,\ (n-1)n$.

Найдя разложение гамильтониана F, мы можем приступить к приближенному интегрированию уравнений возмущенного движения (13.87′). Это приближенное интегрирование может быть проведено такими же методами, которые были описаны в первых трех параграфах этой главы, т. е. методом последовательных приближений, или методом малого параметра.

Оба метода дадут нам приближенные аналитические выражения для канонических элементов в виде рядов, члены которых являются или чисто периодическими функциями — конечными суммами синусов и косинусов, или чисто вековыми, т. е. целыми положительными степенями t, или смешанными членами.

Мы не будем повторять для канонических уравнений все рассуждения и выводы § 1—3 и остановим здесь наше внимание исключительно на вопросе о вековых возмущениях.

§ 7. Теория Лагранжа вековых возмущений

1. В конце § 2 этой главы было уже указано, что к вопросу о вековых возмущениях можно подойти с двух различных точек зрения, имеющих, впрочем, общую основу, которая заключается в замене полной возмущающей функции ее *вековой* или *осредненной* частью.

Сделаем эту замену в уравнениях (13.87′). Тогда правые части этих уравнений не будут вовсе зависеть от средних долгот и уравнения возмущенного движения напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Lambda_s}{dt}=0, && \frac{d\xi_s}{dt}=+\frac{\partial[F]}{\partial\eta_s}, && \frac{dp_s}{dt}=+\frac{\partial[F]}{\partial q_s},\\
&\frac{d\lambda_s}{dt}=-\frac{\partial[F]}{\partial\Lambda_s}, && \frac{d\eta_s}{dt}=-\frac{\partial[F]}{\partial\xi_s}, && \frac{dq_s}{dt}=-\frac{\partial[F]}{\partial p_s},
\end{aligned}\right\}\tag{13.94}$$

откуда сейчас же выводим

$$\Lambda_s=\Lambda_s^{(0)}=\text{const}\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{13.94′}$$

Таким образом, величины Λ_s, т. е. *большие полуоси оскулирующих орбит, остаются постоянными во все время движения*, что и составляет теорему Лапласа о неизменяемости больших полуосей (а значит, и средних движений), рассмотренную уже выше.

Подставляя постоянные значения величин Λ_s во все остальные уравнения системы (13.94), мы сделаем правые их части