где каждая сумма распространена на все различные пары индексов, так что $ij = 12, 13, \ldots, (n-1)n$.

Найдя разложение гамильтониана F, мы можем приступить к приближенному интегрированию уравнений возмущенного движения (13.87′). Это приближенное интегрирование может быть проведено такими же методами, которые были описаны в первых трех параграфах этой главы, т. е. методом последовательных приближений, или методом малого параметра.

Оба метода дадут нам приближенные аналитические выражения для канонических элементов в виде рядов, члены которых являются или чисто периодическими функциями — конечными суммами синусов и косинусов, или чисто вековыми, т. е. целыми положительными степенями t, или смешанными членами.

Мы не будем повторять для канонических уравнений все рассуждения и выводы § 1—3 и остановим здесь наше внимание исключительно на вопросе о вековых возмущениях.

§ 7. Теория Лагранжа вековых возмущений

1. В конце § 2 этой главы было уже указано, что к вопросу о вековых возмущениях можно подойти с двух различных точек зрения, имеющих, впрочем, общую основу, которая заключается в замене полной возмущающей функции ее вековой или осредненной частью.

Сделаем эту замену в уравнениях (13.87′). Тогда правые части этих уравнений не будут вовсе зависеть от средних долгот и уравнения возмущенного движения напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Lambda_s}{dt} = 0, && \frac{d\xi_s}{dt} = +\frac{\partial [F]}{\partial \eta_s}, && \frac{dp_s}{dt} = +\frac{\partial [F]}{\partial q_s}, \\ &\frac{d\lambda_s}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda_s}, && \frac{d\eta_s}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \xi_s}, && \frac{dq_s}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial p_s}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.94)$$

откуда сейчас же выводим

$$\Lambda_s = \Lambda_s^{(0)} = \text{const} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \qquad (13.94')$$

Таким образом, величины Λ_s, т. е. большие полуоси оскулирующих орбит, остаются постоянными во все время движения, что и составляет теорему Лапласа о неизменяемости больших полуосей (а значит, и средних движений), рассмотренную уже выше.

Подставляя постоянные значения величин Λ_s во все остальные уравнения системы (13.94), мы сделаем правые их части функциями только величин

$$\frac{\xi_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{\eta_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{p_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{q_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}. \tag{13.95}$$

Поэтому уравнения, определяющие средние долготы λ_s, отщепляются от остальной системы и, когда величины (13.95) уже определены в зависимости от времени и произвольных постоянных, могут быть проинтегрированы отдельно при помощи простых квадратур.

Легко видеть, что возмущенные значения средних долгот определятся следующими формулами:

$$\lambda_s = \lambda_s^{(0)} + n_s'^{(0)}(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial [U']}{\partial \Lambda_s^{(0)}} dt, \tag{13.94'}$$

где $\lambda_s^{(0)}$ — произвольные постоянные интегрирования (средние долготы эпохи).

Имея в виду формулу (13.91), мы приведем нашу задачу к интегрированию следующей канонической системы $4n$-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial [U']}{\partial \eta_s}, & \frac{d\eta_s}{dt} &= -\frac{\partial [U']}{\partial \xi_s}, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial [U']}{\partial q_s}, & \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{\partial [U']}{\partial p_s}, \end{aligned}\right\} \tag{13.96}$$

правые части которых суть целые ряды, расположенные по степеням величин (13.95) и притом *не зависящие от времени*.

Поэтому вследствие общих свойств канонических систем уравнения (13.96) и имеют первый интеграл

$$[U'] = C = \text{const}, \tag{13.96'}$$

при помощи которого порядок системы (13.96) можно понизить на одну единицу. Кроме того, из уравнений (13.96) можно исключить время t, принимая за независимую переменную какую-либо из величин (13.95), так что в результате порядок системы уравнений (13.96) может быть понижен на две единицы. Однако, как мы уже несколько раз отмечали, такое понижение порядка практически не дает никаких преимуществ и только усложняет правые части уравнений, а поэтому фактически не производится.

Итак, задача теории вековых возмущений заключается в интегрировании системы (13.96) и различные точки зрения на эту теорию отличаются друг от друга только способами приближенного интегрирования уравнений (13.96).

Первый способ интегрирования системы (13.96) заключается в применении к этой системе способа последовательных приближений Пикара, основанного на малости правых частей уравнений (13.96) и, следовательно, на весьма медленном изменении искомых функций.

Как нам уже известно, для получения первого приближения в способе Пикара нужно заменить в правых частях уравнений (13.96) все величины (13.95) их постоянными начальными значениями

$$\frac{\xi_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{\eta_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{p_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{q_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \tag{13.95'}$$

которые предполагаются заданными вещественными числами.

Тогда правые части уравнений (13.96) сделаются известными постоянными, численно равными начальным значениям производных от элементов Пуанкаре по времени, т. е. скоростям изменений этих элементов в момент t_0. Полагая поэтому

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_s^{(0)} &= \frac{\partial [U']_0}{\partial \eta_s^{(0)}}, & \dot{\eta}_s^{(0)} &= -\frac{\partial [U']_0}{\partial \xi_s^{(0)}}, \\ \dot{p}_s^{(0)} &= \frac{\partial [U']}{\partial q_s^{(0)}}, & \dot{q}_s^{(0)} &= -\frac{\partial [U']}{\partial p_s^{(0)}}, \end{aligned}\right\} \tag{13.97}$$

где $[U']_0$ получается из $[U']$ заменой всех величин (13.95) величинами (13.95′), мы получим в *первом приближении* решение системы (13.96) в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi_s^{(1)} &= \xi_s^{(0)} + \dot{\xi}_s^{(0)}(t - t_0), & \eta_s^{(1)} &= \eta_s^{(0)} + \dot{\eta}_s^{(0)}(t - t_0), \\ p_s^{(1)} &= p_s^{(0)} + \dot{p}_s^{(0)}(t - t_0), & q_s^{(1)} &= q_s^{(0)} + \dot{q}_s^{(0)}(t - t_0). \end{aligned}\right\} \tag{13.97'}$$

Величины (13.97′) отличаются от начальных значений искомых функций (эксцентрических и облических переменных) членами весьма медленно, но *постоянно растущими вместе с временем* t. Эти члены и называются по этой причине *вековыми возмущениями* или *вековыми неравенствами*.

Определение или вычисление этих членов и составляет элементарную теорию вековых возмущений, которой обычно и довольствуются на практике. Однакó не представляет принципиальных затруднений получить второе и следующие приближения в способе Пикара. Возвращаясь для этого к уравнениям (13.96), правые части которых суть бесконечные ряды, расположенные по степеням величин (13.95), заменим в этих правых частях величины (13.95) выражениями (13.97′), поделенными все на $\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}$.

Тогда правые части уравнений (13.96) сделаются, очевидно, бесконечными рядами, расположенными по целым возрастающим степеням $t-t_0$, коэффициенты которых будут некоторыми постоянными, которые нетрудно вычислить. Интегрируя полученные равенства, мы получим второе приближение, в котором элементы Пуанкаре представятся бесконечными рядами, расположенными по степеням $t-t_0$.

Таким же образом можно поступать и далее. Очевидно, в каждом последующем приближении элементы ξ_s, η_s, p_s, q_s будут представляться подобными же рядами, т. е. рядами, расположенными по степеням $t-t_0$, но коэффициенты этих рядов будут изменяться от одного приближения к другому. В пределе мы получим точное решение системы (13.96) в виде подобных же рядов, т. е. в виде

$$\left.\begin{aligned}
\xi_s &= \xi_s^{(0)} + \dot{\xi}_s^{(0)}(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \xi_{sk}^{(0)}(t-t_0)^k,\\
\eta_s &= \eta_s^{(0)} + \dot{\eta}_s^{(0)}(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \eta_{sk}^{(0)}(t-t_0)^k,\\
p_s &= p_s^{(0)} + \dot{p}_s^{(0)}(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} p_{sk}^{(0)}(t-t_0)^k,\\
q_s &= q_s^{(0)} + \dot{q}_s^{(0)}(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} q_{sk}^{(0)}(t-t_0)^k,
\end{aligned}\right\} \tag{13.98}$$

но здесь возникает затруднение при исследовании сходимости рядов, которое нужно проводить на каждом шаге процедуры способа Пикара.

Замечая теперь, что ряды (13.98) суть не что иное как ряды Тейлора и имея в виду, что разложение функции в ряд Тейлора единственно, мы можем определить коэффициенты этих рядов формулами Тэйлора, так что будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\xi_{sk}^{(0)} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\xi_s}{dt^k}\right)_0, & \eta_{sk}^{(0)} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\eta_s}{dt^k}\right)_0,\\
p_{sk}^{(0)} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k p_s}{dt^k}\right)_0, & q_{sk}^{(0)} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k q_s}{dt^k}\right)_0.
\end{aligned}\right\} \tag{13.98'}$$

Отсюда следует, что проведение бесконечной процедуры способа Пикара можно заменить просто вычислением величин (13.98′), которые находятся из самих уравнений (13.96) элементарным путем. Из общих теорем существования решений дифференциальных уравнений следует также, что ряды (13.98), коэффициенты которых вычисляются по формулам (13.98′), несомненно, будут сходящимися и притом абсолютно для всех значений времени, содержащихся в некотором промежутке

$(t_0 - T,\ t_0 + T)$. Однако чрезвычайно трудно оценить величину этого промежутка и установить тем самым практическую пригодность получаемых рядов.

Мы ограничимся сделанными замечаниями по этому вопросу и перейдем теперь к другому способу интегрирования той же системы (13.96), который также является способом последовательных приближений и отличается от рассмотренного выше только выбором первого приближения.

2. Способ, о котором будет сейчас идти речь, впервые разработан Лагранжем*) и поэтому называется способом Лагранжа вычисления вековых возмущений.

Заметив, что в процедуре элементарного вычисления вековых возмущений оскулирующих элементов участвует только часть возмущающей функции (свободный член ее ряда Фурье), Лагранж пришел к мысли построить теорию вековых возмущений, рассматривая в дифференциальных уравнениях для оскулирующих элементов вместо полной возмущающей функции только этот свободный член, который он и назвал вековой частью возмущающей функции.

Для этого Лагранж выделил из разложения возмущающей функции все члены не выше второго порядка относительно эксцентриситетов и наклонностей в свободном члене ряда Фурье и составил дифференциальные уравнения, определяющие элементы (13.66), которые мы назвали элементами Лагранжа.

В результате Лагранж получил систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, интегрирование которой дало выражения для элементов (13.66) в виде тригонометрических функций. Эти выражения и называются с тех пор тригонометрическими выражениями вековых возмущений, несмотря на противоречие, заключающееся в этом названии.

Способ Лагранжа был несколько дополнен и видоизменен А. Пуанкаре, который ввел вместо элементов Лагранжа свою каноническую систему элементов и применил для определения этих элементов новый способ интегрирования системы дифференциальных уравнений, разработанный им самим и одновременно, причем более строго, А. М. Ляпуновым**).

Рассмотрим систему уравнений (13.96), в которой $[U']$ — вековая часть возмущающей функции — есть бесконечный ряд, расположенный по возрастающим степеням величин (13.95), содержащий члены только четной степени.

---

*) См., например, Ж. Лагранж, Аналитическая механика, т. 2.

**) См. А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. с франц., «Наука», 1965; А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1893 (см. Собрание сочинений А. М. Ляпунова, т. 2, изд. АН СССР, 1956).

Следуя Лагранжу, назовем функции, удовлетворяющие этим уравнениям, **вековыми возмущениями** элементов Пуанкаре ξ_s, η_s, p_s, q_s, и поставим своей задачей приближенное определение этих функций по способу Ляпунова — Пуанкаре.

Заменяя в системе (13.96) функцию $[U']$ ее разложением, мы напишем уравнения, определяющие вековые возмущения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_s} + \ldots, & \frac{d\eta_s}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_s} + \ldots, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial q_s} + \ldots, & \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_s} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{13.99}$$

где частные производные от квадратичной формы Φ_2 суть однородные линейные функции величин (13.95) с постоянными коэффициентами, а невыписанные члены содержат неизвестные функции в степенях выше первой (не ниже, чем третьей).

Способ Ляпунова — Пуанкаре интегрирования системы **нелинейных уравнений** (13.99) заключается в нахождении общего решения этих уравнений в виде бесконечных рядов, расположенных по возрастающим степеням произвольных постоянных, за которые можно принять величины (13.95′).

Положим для этого, следуя А. М. Ляпунову,

$$\left.\begin{aligned} \xi_s &= \xi_s^{(1)} + \xi_s^{(2)} + \ldots + \xi_s^{(m)} + \ldots, \\ \eta_s &= \eta_s^{(1)} + \eta_s^{(2)} + \ldots + \eta_s^{(m)} + \ldots, \\ p_s &= p_s^{(1)} + p_s^{(2)} + \ldots + p_s^{(m)} + \ldots, \\ q_s &= q_s^{(1)} + q_s^{(2)} + \ldots + q_s^{(m)} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{13.100}$$

и, рассматривая в этих рядах величины $\xi_s^{(m)}$, $\eta_s^{(m)}$, $p_s^{(m)}$, $q_s^{(m)}$ и их первые производные по времени, как **величины m-го порядка**, потребуем, чтобы ряды (13.100) удовлетворяли формально уравнениям (13.96). Для этого подставим в уравнения (13.96) вместо неизвестных функций ряды (13.100) и приравняем члены одинакового порядка в левых и правых частях получившихся равенств.

В результате мы получим следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s^{(1)}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_s^{(1)}}, & \frac{d\eta_s^{(1)}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_s^{(1)}}, \\ \frac{dp_s^{(1)}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial q_s^{(1)}}, & \frac{dq_s^{(1)}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_s^{(1)}}, \end{aligned}\right\} \tag{13.101}$$

и для $m > 1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s^{(m)}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_s^{(m)}} + \Xi_s^{(m)}, & \frac{d\eta_s^{(m)}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_s^{(m)}} + H_s^{(m)}, \\ \frac{dp_s^{(m)}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial q_s^{(m)}} + P_s^{(m)}, & \frac{dq_s^{(m)}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_s^{(m)}} + Q_s^{(m)}. \end{aligned}\right\} \quad (13.101')$$

В уравнениях (13.101) нужно, разумеется, заменить все величины ξ_s, η_s, p_s, q_s первыми членами рядов (13.100), а поэтому уравнения (13.101) можно вывести непосредственно из уравнений (13.99), отбрасывая в последних все члены выше первого порядка.

В уравнениях (13.101′) нужно также рассматривать функцию Φ_2 как квадратичную форму от величин $\xi_s^{(m)}$, $\eta_s^{(m)}$, $p_s^{(m)}$, $q_s^{(m)}$, а дополнительные члены в этих уравнениях — как целые многочлены (с постоянными коэффициентами) от величин $\xi_s^{(1)}$, $\eta_s^{(1)}$, $p_s^{(1)}$, $q_s^{(1)}$, ..., $\xi_s^{(m-1)}$, $\eta_s^{(m-1)}$, $p_s^{(m-1)}$, $q_s^{(m-1)}$.

Таким образом, сначала нужно интегрировать однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (13.101), после чего последовательно будем находить решения линейных неоднородных уравнений (13.101′), дополнительные члены которых окажутся известными функциями времени.

А. М. Ляпунов показал, что получающиеся таким образом ряды (13.100), располагающиеся по целым возрастающим степеням произвольных постоянных, сходятся абсолютно и равномерно при достаточно малых числовых значениях этих постоянных и для всех значений времени в некотором промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$.

Мы не будем здесь рассматривать эту задачу подробно и ограничимся только интегрированием уравнений (13.101), определяющих первые члены рядов (13.100), что и составляет, собственно говоря, теорию Лагранжа в ее первоначальном виде. Иными словами, мы ограничимся рассмотрением только первого приближения полной теории вековых возмущений.

3. Мы уже заметили, что уравнения первого приближения, т. е. уравнения (13.101), получаются также непосредственно из полных уравнений (13.96) отбрасыванием в правых частях последних всех членов выше первой степени. Для этого нужно только заменить полную характеристическую функцию $[U']$ квадратичной формой Φ_2, которая есть сумма двух квадратичных форм Φ_2' и Φ_2'', из которых первая зависит только от элементов ξ_s и η_s, а вторая — только от элементов p_s и q_s. Отсюда следует, что система уравнений первого приближения, соответствующая системе (13.99), распадается на две независимые системы.

Первая система определяет эксцентрические элементы ξ_s и η_s и напишется в виде

$$\frac{d\xi_s}{dt}=\frac{\partial\Phi_2'}{\partial\eta_s}, \quad \frac{d\eta_s}{dt}=-\frac{\partial\Phi_2'}{\partial\xi_s}. \tag{13.102}$$

Вторая система, определяющая облические элементы p_s и q_s, имеет соответственно вид

$$\frac{dp_s}{dt}=\frac{\partial\Phi_2''}{dq_s}, \quad \frac{dq_s}{dt}=-\frac{\partial\Phi_2''}{\partial p_s}. \tag{13.103}$$

Рассмотрим сначала систему (13.102). По формуле (13.93)

$$\Phi_2'=\sum\Phi_2'(\xi_i, \xi_j)+\sum\Phi_2'(\eta_i, \eta_j),$$

где $\Phi_2'(\xi_i, \xi_j)$ и $\Phi_2'(\eta_i, \eta_j)$ определяются формулами (13.92).

Вводя для сокращения обозначения

$$\left.\begin{aligned} \overline{\gamma}_{ij}&=\frac{1}{4}\frac{fm_im_j}{\Lambda_i^{(0)}}B_1\left(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}\right),\\ \gamma_{ij}&=-\frac{1}{4}\frac{fm_im_j}{\sqrt{\Lambda_i^{(0)}\Lambda_j^{(0)}}}B_2\left(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}\right), \qquad \gamma_{ji}=\gamma_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{13.104}$$

и для $j=i$:

$$\gamma_{ii}=\sum_{j=1}^{n}\overline{\gamma}_{ij}, \tag{13.104'}$$

мы представим квадратичную форму Φ_2' в виде

$$\Phi_2'=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}(\xi_i\xi_j+\eta_i\eta_j). \tag{13.104''}$$

Тогда уравнения (13.102), определяющие эксцентрические элементы, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt}&=+\gamma_{s1}\eta_1+\gamma_{s2}\eta_2+\ldots+\gamma_{sn}\eta_n,\\ \frac{d\eta_s}{dt}&=-\gamma_{s1}\xi_1-\gamma_{s2}\xi_2-\ldots-\gamma_{sn}\xi_n. \end{aligned}\right\} \tag{13.105}$$

Отметим прежде всего, что система (13.105) имеет простой первый интеграл. Действительно, умножая уравнения (13.105) соответственно на $2\xi_s$ и $2\eta_s$ и складывая все уравнения, мы имеем в силу соотношений $\gamma_{ji}=\gamma_{ij}$

$$\sum_{s=1}^{n}\left(2\xi_s\frac{d\xi_s}{dt}+2\eta_s\frac{d\eta_s}{dt}\right)=0,$$

откуда интегрированием находим

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s^2+\eta_s^2)=C. \tag{13.105'}$$

Для полного интегрирования системы линейных однородных уравнений (13.105) с постоянными вещественными коэффициентами, нужно, как известно, составить характеристическое уравнение этой системы и рассмотреть его корни.

Характеристическое уравнение напишется в виде

$$D(\varkappa)=\begin{vmatrix} -\varkappa & \dots & 0 & \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & -\varkappa & \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \\ -\gamma_{11} & \dots & -\gamma_{1n} & -\varkappa & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\gamma_{n1} & \dots & -\gamma_{nn} & 0 & \dots & -\varkappa \end{vmatrix}=0, \tag{13.106}$$

и по свойству канонических систем содержит только четные степени неизвестной $\varkappa$. Это легко доказать, рассматривая определитель $D(-\varkappa)$, который после надлежащей перестановки строк и столбцов приводится к первоначальному определителю.

Поэтому корнями уравнения $D(\varkappa)=0$ будут числа

$$\pm\varkappa_1,\quad \pm\varkappa_2,\ \dots,\ \pm\varkappa_n, \tag{13.106'}$$

которые *не могут быть действительными, отличными от нуля.*

В самом деле, так как каждому корню характеристического уравнения соответствует некоторое частное решение системы (13.105), то действительному положительному $\varkappa_j$ будет соответствовать решение вида

$$\xi_s=C_s e^{\varkappa_j t},\quad \eta_s=D_s e^{\varkappa_j t},$$

где C_s и D_s — постоянные. Но тогда мы имеем выражение

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s^2+\eta_s^2)=e^{2\varkappa_j t}\sum_{s=1}^{n}(C_s^2+D_s^2),$$

которое неограниченно растет вместе с временем, в противоречии с интегралом (13.105'). Следовательно, должно быть $\varkappa_j=0$, что и показывает невозможность существования действительных корней уравнения (13.106), отличных от нуля.

Покажем теперь, что уравнение (13.106) не может также иметь комплексных корней с неравной нулю вещественной частью. В самом деле, допустим, что среди корней (13.106') есть пара комплексных сопряженных $\alpha \pm \beta i$ $\left(i=\sqrt{-1}\right)$. Этой паре корней соответствует решение системы (13.105) вида

$$\xi_s = e^{\alpha t}(A_s \cos\beta t + B_s \sin\beta t),$$
$$\eta_s = e^{\alpha t}(A'_s \cos\beta t + B'_s \sin\beta t),$$

где A_s, B_s, A'_s, B'_s — постоянные.

Отсюда, так же как и выше, находим выражение

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s^2+\eta_s^2) = e^{2\alpha t}\sum_{s=1}^{n}\Big[\left(A_s^2+A_s'^2\right)\cos^2\beta t + \left(B_s^2+B_s'^2\right)\sin^2\beta t + 2\left(A_sB_s + A'_sB'_s\right)\cos\beta t\sin\beta t\Big],$$

которое при $\alpha \neq 0$ неограниченно растет вместе с временем в противоречии с интегралом (13.105′). Таким образом, должно быть $\alpha=0$, т. е. все корни уравнения (13.106) должны быть чисто мнимыми.

Однако среди корней уравнения $D(\varkappa)=0$ могут быть, вообще говоря, и кратные, и тогда возникает вопрос, не появятся ли среди решений системы (13.105) такие, которые содержат множителем какую-либо степень t. Пуанкаре доказал, что даже в случае кратных корней такие решения не существуют. Действительно, допустим опять обратное, т. е. что система имеет решение вида

$$\xi_s = t^m(A_s \cos\beta t + B_s \sin\beta t),$$
$$\eta_s = t^m(A'_s \cos\beta t + B'_s \sin\beta t),$$

где $m \leqslant n$.

Тогда снова находим

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s^2+\eta_s^2) = t^{2m}\sum_{s=1}^{n}\Big[\left(A_s^2+A_s'^2\right)\cos^2\beta t + \left(B_s^2+B_s'^2\right)\sin^2\beta t + 2\left(A_sB_s + A'_sB'_s\right)\cos\beta t\sin\beta t\Big].$$

Правая часть этого равенства при $m \neq 0$ неограниченно растет вместе с временем, в противоречии с интегралом (13.105). Таким образом, должно быть $m=0$ и все корни характеристического уравнения должны быть чисто мнимыми, а в случае, когда они кратные, им соответствуют чисто тригонометрические решения системы (13.105).

Чтобы найти общее решение системы (13.105), проще всего поступить следующим образом. Введем вместо каждой пары канонических эксцентрических элементов ξ_s, η_s комплексную переменную ζ_s, полагая

$$\zeta_s = \xi_s + i\eta_s \qquad \left(i=\sqrt{-1}\right). \tag{13.107}$$

Тогда система (13.105) преобразуется в следующую:

$$\frac{d\zeta_s}{dt} = -i(\gamma_{s1}\zeta_1 + \gamma_{s2}\zeta_2 + \ldots + \gamma_{sn}\zeta_n). \qquad (13.107')$$

Система (13.107′) есть система линейных однородных уравнений порядка n (а не $2n$, как система (13.105)) с постоянными чисто мнимыми коэффициентами.

Характеристическое уравнение этой системы приводится к алгебраическому уравнению n-й степени относительно неизвестной $\varkappa$ и напишется в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} -i\gamma_{11}-\varkappa, & -i\gamma_{12}, & \ldots, & -i\gamma_{1n} \\ -i\gamma_{21}, & -i\gamma_{22}-\varkappa, & \ldots, & -i\gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -i\gamma_{n1}, & -i\gamma_{n2}, & \ldots, & -i\gamma_{nn}-\varkappa \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.108)$$

Полагая

$$\varkappa = -\beta t,$$

мы приведем уравнение (13.108) к виду

$$\Delta(\beta) = \begin{vmatrix} \gamma_{11}-\beta, & \gamma_{12}, & \ldots, & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}-\beta, & \ldots, & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1}, & \gamma_{n2}, & \ldots, & \gamma_{nn}-\beta \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.108')$$

Это уравнение обладает вещественными коэффициентами и называется *вековым уравнением*, а определитель, стоящий в левой его части, *вековым определителем*. Так как система (13.107′) эквивалентна системе (13.105), то корни уравнения (13.108) должны совпадать с n корнями уравнения (13.106), т. е. мы должны иметь

$$\varkappa_1 = -\beta_1 i, \quad \varkappa_2 = -\beta_2 i, \ \ldots, \ \varkappa_n = -\beta_n i,$$

откуда следует, что вековое уравнение имеет только вещественные корни $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Зная корни векового уравнения, мы можем написать общее решение системы (13.107′) в виде

$$\zeta_s = \sum_{j=1}^{n} C_j K_{sj} e^{-\beta_j i t}, \qquad (13.109)$$

где K_{sj} — вещественные постоянные, зависящие от корней векового уравнения (13.108′), с C_j — произвольные постоянные, которые мы должны рассматривать как числа комплексные. Поэтому можем положить

$$C_j = A_j e^{-ig_j},$$

вследствие чего формулы (13.109) приведутся к виду

$$\zeta_s = \xi_s + i\eta_s = \sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} e^{-i(\beta_j t + g_j)}, \tag{13.109'}$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части в обеих частях равенств, найдем решение первоначальной системы (13.105) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \xi_s &= +\sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} \cos(\beta_j t + g_j), \\ \eta_s &= -\sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} \sin(\beta_j t + g_j). \end{aligned}\right\} \tag{13.110}$$

Из этих формул нетрудно найти приближенные значения эксцентриситетов и долгот перицентров. Действительно, на основании (13.64) мы имеем, отбрасывая малые величины выше первого порядка,

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\Lambda_s^{(0)}}\, e_s' \cos\pi_s' &= \sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} \cos(\beta_j t + g_j), \\ \sqrt{\Lambda_s^{(0)}}\, e_s' \sin\pi_s' &= \sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} \sin(\beta_j t + g_j), \end{aligned}\right\} \tag{13.111}$$

откуда выводим

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_s^{(0)} e_s'^2 &= A_1^2 K_{s1}^2 + A_2^2 K_{s2}^2 + \ldots + A_n^2 K_{sn}^2 + \\ &\quad + 2\sum A_i A_j K_{si} K_{sj} \cos[(\beta_i - \beta_j)t + g_i - g_j], \\ \operatorname{tg}\pi_s' &= \frac{A_1 K_{s1} \sin(\beta_1 t + g_1) + \ldots + A_n K_{sn} \sin(\beta_n t + g_n)}{A_1 K_{s1} \cos(\beta_1 t + g_1) + \ldots + A_n K_{sn} \cos(\beta_n t + g_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{13.111'}$$

что позволяет вычислить числовые значения эксцентриситетов и долгот перицентров оскулирующих орбит на основе теории вековых возмущений Лагранжа.

4. Рассмотрим теперь уравнения (13.103), определяющие вековые возмущения (в первом приближении) облических переменных, т. е. наклонностей и долгот узлов.

По формуле (13.93) мы имеем

$$\Phi_2'' = -\sum \Phi_2''(p_i, p_j) - \sum \Phi_2''(q_i, q_j),$$

причем вторая из формул (13.92) дает

$$\Phi_2''(x_i, x_j) = \frac{1}{8} f m_i m_j B_1\left(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}\right)\left[\frac{x_i}{\sqrt{\Lambda_i^{(0)}}} - \frac{x_j}{\sqrt{\Lambda_j^{(0)}}}\right]^2,$$

откуда непосредственно следует, что Φ_2'' есть существенно отрицательная квадратичная форма.

Положим так же, как и в предыдущем разделе,

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma}_{ij} &= \frac{1}{4}\frac{fm_i m_j}{\Lambda_i^{(0)}} B_1\left(a_i'^{(0)},\ a_j'^{(0)}\right), \\ \gamma'_{ij} &= \frac{1}{4}\frac{fm_i m_j}{\sqrt{\Lambda_i^{(0)}\Lambda_j^{(0)}}} B_1\left(a_i'^{(0)},\ a_j'^{(0)}\right) \quad .\ \gamma'_{ji} = \gamma'_{ij}, \end{aligned}\right\} \tag{13.112}$$

и для $j=i$:

$$\gamma'_{ii} = -\sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_{ij}. \tag{13.112'}$$

Тогда форма Φ_2'' напишется в виде

$$\Phi_2'' = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma'_{ij}(p_i p_j + q_i q_j), \tag{13.112''}$$

а уравнения (13.103) для облических переменных будут иметь в точности такой же вид, как и уравнеиия для эксцентрических переменных, т. е. мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= +\gamma'_{s1}q_1 + \gamma'_{s2}q_2 + \ldots + \gamma'_{sn}q_n, \\ \frac{dq_s}{dt} &= -\gamma'_{s1}p_1 - \gamma'_{s2}p_2 - \ldots - \gamma'_{sn}q_n. \end{aligned}\right\} \tag{13.113}$$

Из этих уравнений выводим прежде всего в силу $\gamma'_{ji} = \gamma'_{ij}$ первый интеграл,

$$\sum_{s=1}^{n}(p_s^2 + q_s^2) = C', \tag{13.113'}$$

который позволяет, так же как и для случая эксцентрических элемеитов, сделать выводы о характере корней характеристического уравнения системы (13.113).

Таким образом, если мы рассмотрим уравнение, аналогичное уравнению (13.108),

$$\Delta'(\beta') = \begin{vmatrix} \gamma'_{11} - \beta', & \gamma'_{12}, & \ldots, & \gamma'_{1n} \\ \gamma'_{21}, & \gamma'_{22} - \beta', & \ldots, & \gamma'_{2n} \\ \gamma'_{n1}, & \gamma'_{n2}, & \ldots, & \gamma'_{nn} - \beta' \end{vmatrix} = 0, \tag{13.114}$$

то можем утверждать, что оно имеет только вещественные корни $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n'$.

Но здесь дополнительно можно показать, что один из этих корней равен нулю. Действительно, из выражения для квадратичной формы Φ_2'' мы видим, что эта форма обращается в нуль, когда мы положим одновременно

$$\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1^{(0)}}} = \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2^{(0)}}} = \ldots = \frac{p_n}{\sqrt{\Lambda_n^{(0)}}},$$

и

$$\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1^{(0)}}} = \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2^{(0)}}} = \ldots = \frac{q_n}{\sqrt{\Lambda_n^{(0)}}},$$

откуда следует, что

$$\Delta'(0) = 0,$$

что и доказывает сделанное замечание.

Теперь, считая, что равный нулю корень есть β_1', мы получим общее решение системы (13.113) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} p_s &= +B_1 K_{s1}' \cos g_1' + \sum_{j=2}^{n} B_j K_{sj}' \cos(\beta_j' t + g_j'),\\ q_s &= -B_1 K_{s1}' \sin g_1' - \sum_{j=2}^{n} B_j K_{sj}' \sin(\beta_j' t + g_j'), \end{aligned}\right\} \qquad (13.115)$$

где B_j и g_j' суть произвольные постоянные.

Так как приближенно мы имеем

$$p_s = \sqrt{\Lambda_s^{(0)}} \sin i_s' \cos \Omega_s', \quad q_s' = -\sqrt{\Lambda_s^{(0)}} \sin i_s' \sin \Omega_s',$$

то из (13.115) имеем также следующие приближенные формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\Lambda_s^{(0)}} \sin i_s' \cos \Omega_s' &= \sum_{j=1}^{n} B_j K_{sj}' \cos(\beta_j' t + g_j'),\\ \sqrt{\Lambda_s^{(0)}} \sin i_s' \sin \Omega_s' &= \sum_{j=1}^{n} B_j K_{sj}' \sin(\beta_j' t + g_j') \end{aligned}\right\} \qquad (13.115')$$

$(\beta_1' = 0)$, откуда, так же как в предыдущем разделе, находим

$$\Lambda_s^{(0)} \sin^2 i_s' = B_1^2 K_{s1}'^2 + B_2^2 K_{s2}'^2 + \ldots + B_n^2 K_{sn}'^2 + \\ + 2 \sum B_i B_j K_{si}' K_{sj}' \cos\left[(\beta_i' - \beta_j') t + g_i' - g_j'\right],$$

и

$$\operatorname{tg} \Omega_s' = \frac{B_1 K_{s1}' \sin g_1' + B_2 K_{s2}' \sin(\beta_2' t + g_2') + \ldots + B_n K_{sn}' \sin(\beta_n' t + g_n')}{B_1 K_{s1}' \cos g_1' + B_2 K_{s2}' \cos(\beta_2' t + g_2') + \ldots + B_n K_{sn}' \cos(\beta_n' t + g_n')},$$

что позволяет находить числовые значения наклонностей и долгот восходящих узлов оскулирующих орбит на основе теории вековых возмущений Лагранжа.

Заметим еще, что из приближенных формул (13.111) и (13.115′) в силу интегралов (13.105′) и (13.113) следуют также равенства

$$\Lambda_1^{(0)} e_1'^2 + \Lambda_2^{(0)} e_2'^2 + \ldots + \Lambda_n^{(0)} e_n'^2 = C, \tag{13.116}$$

$$\Lambda_1^{(0)} \sin^2 i_1' + \Lambda_2^{(0)} \sin^2 i_2' + \ldots + \Lambda_n^{(0)} \sin^2 i_n' = C'. \tag{13.116′}$$

Отсюда следует, что если эксцентриситеты и наклонности оскулирующих орбит малы в начальный момент времени, то постоянные C и C' будут положительными малыми величинами, а значит, как видно из (13.116) и (13.116′), эксцентриситеты и наклонности будут всегда оставаться малыми.

Это есть теорема Лапласа, доказанная несколько иным путем, чем ранее, и притом для осредненных уравнений, в силу которых величины Λ_s, т. е. большие полуоси оскулирующих орбит, остаются постоянными.

Нужно, кроме того, иметь ввиду, что полученные сейчас результаты выведены не из полных осредненных уравнений (13.96), а из уравнений первого приближения (13.105) и (13.113), вследствие чего и сделанные заключения также надлежит рассматривать как приближенные.