ГЛАВА XIV

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Дифференциальные уравнения общей задачи трех тел

1. Рассмотрим *общую*, или *неограииченную*, задачу трех тел, т. е. задачу о движении системы, состоящей из трех материальных точек с произвольными конечными массами, взаимно притягивающихся по закону Ньютона*).

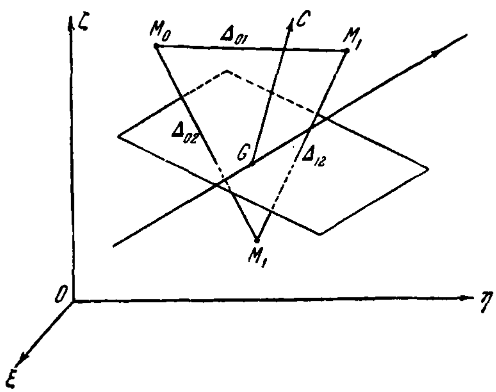

Рис. 68.

В некоторой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей дифференциальные уравнения движения в этой задаче имеют, как известно, следующий вид ($i=0, 1, 2$):

$$m_i\ddot{\xi}_i=\frac{\partial U}{\partial \xi_i},\quad m_i\ddot{\eta}_i=\frac{\partial U}{\partial \eta_i},$$

$$m_i\ddot{\zeta}_i=\frac{\partial U}{\partial \zeta_i},\qquad (14.1)$$

где U — полная силовая функция, определяемая здесь формулой

$$U=f\left(\frac{m_0m_1}{\Delta_{01}}+\frac{m_0m_2}{\Delta_{02}}+\frac{m_1m_2}{\Delta_{12}}\right),\qquad (14.2)$$

а

$$\Delta_{ij}=\sqrt{(\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i-\eta_j)^2+(\zeta_i-\zeta_j)^2}\qquad (14.2')$$

есть взаимное расстояиие между точками M_i и M_j, обладающими массами m_i и m_j ($i, j=0, 1, 2$), причем ясно, что $\Delta_{ji}=\Delta_{ij}$ (рис. 68).

*) См. часть вторую. Мы сохраняем термин «тело», так как действительные тела, являющиеся шарами со сферическим распределением плотностей, притягиваются взаимно как матернальные точки. С другой стороны, тела любой формы и структуры, расстояния между которыми достаточно велики, также притягиваются как и математическне материальные точки.

Уравнения (14.1) полезно написать также полностью в раскрытом виде, т. е.:

$$\left.\begin{aligned}
m_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= fm_0m_1\frac{\xi_1-\xi_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\xi_2-\xi_0}{\Delta_{02}^3},\\
m_0\frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= fm_0m_1\frac{\eta_1-\eta_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\eta_2-\eta_0}{\Delta_{02}^3},\\
m_0\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= fm_0m_1\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\zeta_2-\zeta_0}{\Delta_{02}^3},\\
m_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= fm_1m_0\frac{\xi_0-\xi_1}{\Delta_{10}^3}+fm_1m_2\frac{\xi_2-\xi_1}{\Delta_{12}^3},\\
m_1\frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= fm_1m_0\frac{\eta_0-\eta_1}{\Delta_{10}^3}+fm_1m_2\frac{\eta_2-\eta_1}{\Delta_{12}^3},\\
m_1\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} &= fm_1m_0\frac{\zeta_0-\zeta_1}{\Delta_{10}^3}+fm_1m_2\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\Delta_{12}^3},\\
m_2\frac{d^2\xi_2}{dt^2} &= fm_2m_0\frac{\xi_0-\xi_2}{\Delta_{20}^3}+fm_2m_1\frac{\xi_1-\xi_2}{\Delta_{21}^3},\\
m_2\frac{d^2\eta_2}{dt^2} &= fm_2m_0\frac{\eta_0-\eta_2}{\Delta_{20}^3}+fm_2m_1\frac{\eta_1-\eta_2}{\Delta_{21}^3},\\
m_2\frac{d^2\zeta_2}{dt^2} &= fm_2m_0\frac{\zeta_0-\zeta_2}{\Delta_{20}^3}+fm_2m_1\frac{\zeta_1-\zeta_2}{\Delta_{21}^3}.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.1')$$

Мы знаем, что уравнения абсолютного движения системы, состоящей из любого числа взаимно притягивающихся материальных точек, допускают десять первых (классических) интегралов, имеющих простое механическое значение. Для системы трех тел эти интегралы напишутся следующим образом.

Интегралы движения центра масс трех точек:

$$\left.\begin{aligned}
m_0\dot\xi_0+m_1\dot\xi_1+m_2\dot\xi_2 &= a_1,\\
m_0\dot\eta_0+m_1\dot\eta_1+m_2\dot\eta_2 &= a_2,\\
m_0\dot\zeta_0+m_1\dot\zeta_1+m_2\dot\zeta_2 &= a_3,\\
m_0\xi_0+m_1\xi_1+m_2\xi_2 &= a_1t+b_1,\\
m_0\eta_0+m_1\eta_1+m_2\eta_2 &= a_2t+b_2,\\
m_0\zeta_0+m_1\zeta_1+m_2\zeta_2 &= a_3t+b_3,
\end{aligned}\right\}\qquad(14.3)$$

которые показывают, что центр масс (или центр инерции системы) G движется относительно абсолютных осей $O\xi\eta\zeta$ прямолинейно и равномерно (рис. 68).

Три интеграла площадей, или интегралы сохранения момента количества движения системы:

$$\left.\begin{aligned} m_0(\eta_0\dot{\zeta}_0-\zeta_0\dot{\eta}_0)+m_1(\eta_1\dot{\zeta}_1-\zeta_1\dot{\eta}_1)+m_2(\eta_2\dot{\zeta}_2-\zeta_2\dot{\eta}_2)=c_1,\\ m_0(\zeta_0\dot{\xi}_0-\xi_0\dot{\zeta}_0)+m_1(\zeta_1\dot{\xi}_1-\xi_1\dot{\zeta}_1)+m_2(\zeta_2\dot{\xi}_2-\xi_2\dot{\zeta}_2)=c_2,\\ m_0(\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0)+m_1(\xi_1\dot{\eta}_1-\eta_1\dot{\xi}_1)+m_2(\xi_2\dot{\eta}_2-\eta_2\dot{\xi}_2)=c_3.\end{aligned}\right\}\qquad(14.3')$$

Напомним, что плоскость, проходящая через центр масс, перпендикулярно к вектору $c=(c_1, c_2, c_3)$, сохраняет неизменную ориентацию относительно абсолютных осей и называется неизменяемой плоскостью Лапласа (рис. 68).

Интеграл живой силы, или интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}m_0(\dot{\xi}_0^2+\dot{\eta}_0^2+\dot{\zeta}_0^2)+\frac{1}{2}m_1(\dot{\xi}_1^2+\dot{\eta}_1^2+\dot{\zeta}_1^2)+$$
$$+\frac{1}{2}m_2(\dot{\xi}_2^2+\dot{\eta}_2^2+\dot{\zeta}_2^2)=U+h.\qquad(14.3'')$$

Эти десять первых интегралов, которые легко вывести также и непосредственно из уравнений (14.1′), позволяют, вообще говоря, понизить порядок системы (14.1) на десять единиц. Однако практически довольствуются понижением порядка первоначальной системы (системы 18-го порядка) только на шесть единиц при помощи интегралов (14.3).

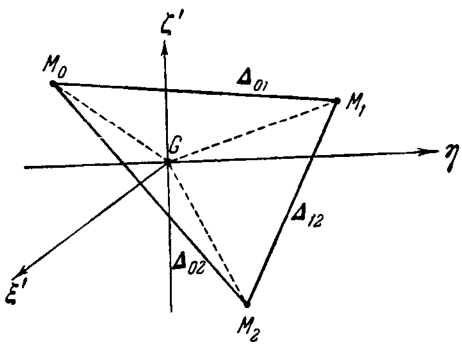

Рис. 69.

2. Перейдем сначала к барицентрической системе координат с началом в общем центре масс G трех точек и с неизменными направлениями осей, параллельными соответствующим осям абсолютной системы. Делая это преобразование, мы получим уравнения такого же вида, как и (14.1) ($i=0, 1, 2$):

$$m_i\ddot{\xi}'_i=\frac{\partial U}{\partial \xi'_i},\quad m_i\ddot{\eta}'_i=\frac{\partial U}{\partial \eta'_i},\quad m_i\ddot{\zeta}'_i=\frac{\partial U}{\partial \zeta'_i},\qquad(14.4)$$

где ξ'_i, η'_i, ζ'_i — координаты точки M_i в этой барицентрической системе координат (рис. 69).

Система (14.4) имеет 12-й порядок, так как барицентрические координаты удовлетворяют трем соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} m_0\xi_0' + m_r\xi_1' + m_2\xi_2' &= 0,\\ m_0\eta_0' + m_1\eta_1' + m_2\eta_2' &= 0,\\ m_0\zeta_0' + m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{14.4'}$$

с помощью которых можно исключить координаты какой-либо одной из трех точек, например, координаты ξ_0', η_0', ζ_0' точки M_0:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0' &= -\frac{1}{m_0}(m_1\xi_1' + m_2\xi_2'),\\ \eta_0' &= -\frac{1}{m_0}(m_1\eta_1' + m_2\eta_2'),\\ \zeta_0' &= -\frac{1}{m_0}(m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2'), \end{aligned}\right\} \tag{14.4''}$$

вследствие чего получим систему из шести уравнений, определяющих координаты точек M_1 и M_2. Эти уравнения напишутся следующим образом *):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi_1'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_1)\,\xi_1' + m_2\xi_2'}{\Delta_{10}^3} + fm_2\,\frac{\xi_2' - \xi_1'}{\Delta_{12}^3},\\ \frac{d^2\eta_1'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_1)\,\eta_1' + m_2\eta_2'}{\Delta_{10}^3} + fm_2\,\frac{\eta_2' - \eta_1'}{\Delta_{12}^3},\\ \frac{d^2\zeta_1'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_1)\,\zeta_1' + m_2\zeta_2'}{\Delta_{10}^3} + fm_2\,\frac{\zeta_2' - \zeta_1'}{\Delta_{12}^3},\\ \frac{d^2\xi_2'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_2)\,\xi_2' + m_1\xi_1'}{\Delta_{20}^3} + fm_1\,\frac{\xi_1' - \xi_2'}{\Delta_{21}^3},\\ \frac{d^2\eta_2'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_2)\,\eta_2' + m_1\eta_1'}{\Delta_{20}^3} + fm_1\,\frac{\eta_1' - \eta_2'}{\Delta_{21}^3},\\ \frac{d^2\zeta_2'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_2)\,\zeta_2' + m_1\zeta_1'}{\Delta_{20}^3} + fm_1\,\frac{\zeta_1' - \zeta_2'}{\Delta_{21}'}, \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

*) Уравнения (14.5) являются частным случаем уравнений (7.22) гл. VII и получаются из них при $n=2$. Нетрудно получить также эти уравнения непосредственно из (14.4).

где взаимные расстояния в силу (14.4″) определяются следующими формулами:

$$\Delta_{10}^2 = \left[\frac{(m_0+m_1)\xi_1'+m_2\xi_2'}{m_0}\right]^2 + \left[\frac{(m_0+m_1)\eta_1'+m_2\eta_2'}{m_0}\right]^2 + \left[\frac{(m_0+m_1)\zeta_1'+m_2\zeta_2'}{m_0}\right]^2,$$

$$\Delta_{20}^2 = \left[\frac{(m_0+m_2)\xi_2'+m_1\xi_1'}{m_0}\right]^2 + \left[\frac{(m_0+m_2)\eta_2'+m_1\eta_1'}{m_0}\right]^2 + \left[\frac{(m_0+m_2)\zeta_2'+m_1\zeta_1'}{m_0}\right]^2,$$

$$\Delta_{12}^2 = (\xi_2'-\xi_1')^2 + (\eta_2'-\eta_1')^2 + (\zeta_2'-\zeta_1')^2.$$

Уравнения (14.4) имеют уже только четыре первых интеграла — три интеграла площадей (момента количества движения) и интеграл энергии (живой силы), которые в барицентрических координатах имеют точно такой же вид, как и в абсолютных, при условии (14.4″). Исключая из этих интегралов координаты и составляющие скорости точки M_0, мы получим соответствующие интегралы системы (14.5) в следующей форме *):

$$\frac{1}{2m_0}\left[(m_1\dot\xi_1'+m_2\dot\xi_2')^2+(m_1\dot\eta_1'+m_2\dot\eta_2')^2+(m_1\dot\zeta_1'+m_2\dot\zeta_2')^2\right] + \frac{1}{2}m_1\left(\dot\xi_1'^2+\dot\eta_1'^2+\dot\zeta_1'^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot\xi_2'^2+\dot\eta_2'^2+\dot\zeta_2'^2\right) = U + h', \tag{14.5'}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{m_0}(m_1\eta_1'+m_2\eta_2')(m_1\dot\zeta_1'+m_2\dot\zeta_2') - \frac{1}{m_0}(m_1\zeta_1'+m_2\zeta_2')\times\\
&\times(m_1\dot\eta_1'+m_2\dot\eta_2') + m_1(\eta_1'\dot\zeta_1'-\zeta_1'\dot\eta_1') + m_2(\eta_2'\dot\zeta_2'-\zeta_2'\dot\eta_2') = c_1',\\
&\frac{1}{m_0}(m_1\zeta_1'+m_2\zeta_2')(m_1\dot\xi_1'+m_2\dot\xi_2') - \frac{1}{m_0}(m_1\xi_1'+m_2\xi_2')\times\\
&\times(m_1\dot\zeta_1'+m_2\dot\zeta_2') + m_1(\zeta_1'\dot\xi_1'-\xi_1'\dot\zeta_1') + m_2(\zeta_2'\dot\xi_2'-\xi_2'\dot\zeta_2') = c_2',\\
&\frac{1}{m_0}(m_1\xi_1'+m_2\xi_2')(m_1\dot\eta_1'+m_2\dot\eta_2') - \frac{1}{m_0}(m_1\eta_1'+m_2\eta_2')\times\\
&\times(m_1\dot\xi_1'+m_2\dot\xi_2') + m_1(\xi_1'\dot\eta_1'-\eta_1'\dot\xi_1') + m_2(\xi_2'\dot\eta_2'-\eta_2'\dot\xi_2') = c_3'.
\end{aligned}\right\} \tag{14.5''}$$

3. Можно также, как известно, понизить порядок системы (14.1) на шесть единиц, переходя от абсолютных координат к относительным. Пусть, например, за новое начало взята точ-

*) См. формулы (7.22′) и (7.22″) гл. VII, из которых при $n=2$ получаем написанные интегралы (14.5″) и (14.5′).

ка M_0, а новые оси соответственно параллельны абсолютным осям.

Тогда в этой относительной системе координат уравнения движения точек M_1 и M_2 имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)\,x_1}{r_1^3}&=fm_2\left(\frac{x_2-x_1}{\Delta_{12}^3}-\frac{x_2}{r_2^3}\right),\\
\frac{d^2y_1}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_1)\,y_1}{r_1^3}&=fm_2\left(\frac{y_2-y_1}{\Delta_{12}^3}-\frac{y_2}{r_2^3}\right),\\
\frac{d^2z_1}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_1)\,z_1}{r_1^3}&=fm_2\left(\frac{z_2-z_1}{\Delta_{12}^3}-\frac{z_2}{r_2^3}\right),
\end{aligned}\right\}\qquad(14.6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)\,x_2}{r_2^3}&=fm_1\left[\frac{x_1-x_2}{\Delta_{21}^3}-\frac{x_1}{r_1^3}\right],\\
\frac{d^2y_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)\,y_2}{r_2^3}&=fm_1\left[\frac{y_1-y_2}{\Delta_{21}^3}-\frac{y_1}{r_1^3}\right],\\
\frac{d^2z_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)\,z_2}{r_2^3}&=fm_1\left[\frac{z_1-z_2}{\Delta_{21}^3}-\frac{z_1}{r_1^3}\right],
\end{aligned}\right\}\qquad(14.6')$$

где

$$\left.\begin{aligned}
r_1^2&=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\\
r_2^2&=x_2^2+y_2^2+z_2^2
\end{aligned}\right\}\qquad(14.7)$$

и

$$\Delta_{12}^2=\Delta_{21}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.\qquad(14.7')$$

Найдя относительные координаты точек M_1 и M_2, мы можем определить также барицентрические координаты всех трех точек по формулам (7.26) гл. VII, из которых имеем

$$\begin{aligned}
\xi_0'&=-\frac{m_1}{m}x_1-\frac{m_2}{m}x_2,\\
\xi_1'&=\frac{m_0+m_2}{m}x_1-\frac{m_2}{m}x_2,\\
\xi_2'&=-\frac{m_1}{m}x_1+\frac{m_0+m_1}{m}x_2,
\end{aligned}$$

и такие же формулы для ординат и аппликат η_s' и ζ_s', причем в этих формулах $m=m_0+m_1+m_2$.

Четыре первых интеграла системы уравнений (14.6), (14.6′) можно вывести непосредственно из самих этих уравнений или получить преобразованием интегралов в барицентрических координатах, или написать по образцу интегралов (7.27), (7.27′), полагая в последних $n=2$. Эти интегралы напишутся здесь в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{m}\left[(m_1y_1+m_2y_2)(m_1\dot z_1+m_2\dot z_2)-\right.\\
&\qquad\left.-(m_1z_1+m_2z_2)(m_1\dot y_1+m_2\dot y_2)\right]+m_1(y_1\dot z_1-z_1\dot y_1)+\\
&\qquad\qquad+m_2(y_2\dot z_2-z_2\dot y_2)=c_1',\\
&-\frac{1}{m}\left[(m_1z_1+m_2z_2)(m_1\dot x_1+m_2\dot x_2)-\right.\\
&\qquad\left.-(m_1x_1+m_2x_2)(m_1\dot z_1+m_2\dot z_2)\right]+m_1(z_1\dot x_1-x_1\dot z_1)+\\
&\qquad\qquad+m_2(z_2\dot x_2-x_2\dot z_2)=c_2',\\
&-\frac{1}{m}\left[(m_1x_1+m_2x_2)(m_1\dot y_1+m_2\dot y_2)-\right.\\
&\qquad\left.-(m_1y_1+m_2y_2)(m_1\dot x_1+m_2\dot x_2)\right]+m_1(x_1\dot y_1-y_1\dot x_1)+\\
&\qquad\qquad+m_2(x_2\dot y_2-y_2\dot x_2)=c_3',
\end{aligned}\right\}\tag{14.8}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}\left[(m_1\dot x_1+m_2\dot x_2)^2+(m_1\dot y_1+m_2\dot y_2)^2+(m_1\dot z_1+m_2\dot z_2)^2\right]+\\
&\qquad+\frac{1}{2}m_1\left(\dot x_1^2+\dot y_1^2+\dot z_1^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot x_2^2+\dot y_2^2+\dot z_2^2\right)=U+h'.
\end{aligned}\tag{14.8'}$$

4. Наконец, понизить порядок системы (14.1) на шесть единиц можно еще при помощи преобразования Якоби.

В этом преобразовании движение точки M_1 относится к системе координат с началом в точке M_0, а движение точки M_2— к системе с началом в центре масс G_1 двух точек M_0 и M_1. Оси обеих систем сохраняют неизменные направления и соответственно параллельны осям абсолютной системы.

Уравнения движения в координатах Якоби имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned}
m_1'\ddot x_1'&=\frac{\partial U}{\partial x_1'}, & m_1'\ddot y_1'&=\frac{\partial U}{\partial y_1'}, & m_1'\ddot z_1'&=\frac{\partial U}{\partial z_1'},\\
m_2'\ddot x_2'&=\frac{\partial U}{\partial x_2'}, & m_2'\ddot y_2'&=\frac{\partial U}{\partial y_2'}, & m_2'\ddot z_2'&=\frac{\partial U}{\partial z_2'},
\end{aligned}\right\}\tag{14.9}$$

где U — та же самая силовая функция, что и в системе (14.1), а m_1' и m_2' — «приведенные массы», определяемые формулами

$$m_1'=\frac{m_0m_1}{m_0+m_1},\qquad m_2'=\frac{m_2(m_0+m_1)}{m_0+m_1+m_2}.\tag{14.9'}$$

Взаимные расстояния Δ_{ij} в координатах Якоби определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{01}^2 &= x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2, \\ \Delta_{02}^2 &= \left(x_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}x_1'\right)^2 + \left(y_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}y_1'\right)^2 + \\ &\qquad + \left(z_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}z_1'\right)^2, \\ \Delta_{12}^2 &= \left(x_2' - \frac{m_0}{m_0+m_1}x_1'\right)^2 + \left(y_2' - \frac{m_0}{m_0+m_1}y_1'\right)^2 + \\ &\qquad + \left(z_2' - \frac{m_0}{m_0+m_1}z_1'\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{14.9''}$$

Относительные координаты, рассмотренные в предыдущем разделе, выражаются через координаты Якоби формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1', & x_2 &= x_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}x_1', \\ y_1 &= y_1', & y_2 &= y_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}y_1', \\ z_1 &= z_1', & z_2 &= z_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}z_1'. \end{aligned}\right\} \tag{14.9'''}$$

Четыре первых интеграла системы (14.9) имеют, как известно (см. гл. VII), такой же вид, как и интегралы уравнений абсолютного движения, и мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} m_1'(y_1'\dot{z}_1' - z_1'\dot{y}_1') + m_2'(y_2'\dot{z}_2' - z_2'\dot{y}_2') &= c_1', \\ m_1'(z_1'\dot{x}_1' - x_1'\dot{z}_1') + m_2'(z_2'\dot{x}_2' - x_2'\dot{z}_2') &= c_2', \\ m_1'(x_1'\dot{y}_1' - y_1'\dot{x}_1') + m_2'(x_2'\dot{y}_2' - y_2'\dot{x}_2') &= c_3', \end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

$$\frac{1}{2}m_1'\left(\dot{x}_1'^2 + \dot{y}_1'^2 + \dot{z}_1'^2\right) + \frac{1}{2}m_2'\left(\dot{x}_2'^2 + \dot{y}_2'^2 + \dot{z}_2'^2\right) = U + h', \tag{14.10'}$$

где m_1', m_2' — приведенные массы, определяемые формулами (14.9').

Следует заметить, что постоянные c_1', c_2', c_3' и h' имеют те же числовые значения, что и в первых интегралах уравнений барицентрического или относительного движений.

Напишем в заключение уравнения (14.9) в раскрытом виде. Дифференцируя для этого силовую функцию U по координатам

x_1' и x_2', например, имея при этом в виду формулы для взаимных расстояний (14.9), мы получим

$$\frac{\partial U}{\partial x_1'} = -f\frac{m_0 m_1 x_1'}{\Delta_{01}^3} - f\frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3}\cdot\frac{m_1}{\sigma_1}\left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1}x_1'\right) + \\ + f\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3}\cdot\frac{m_0}{\sigma_1}\left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1}x_1'\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2'} = -f\frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3}\left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1}x_1'\right) - f\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3}\left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1}x_1'\right).$$

Полагая затем для сокращения

$$r_1' = \Delta_{01}, \quad \mu_1 = f(m_0 + m_1), \quad \mu_1' = \frac{fm_2}{m_0 + m_1},$$
$$\mu_1'' = fm_2, \quad \mu_2' = \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1},$$

мы напишем уравнения (14.9) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_1' &= -\frac{\mu_1 x_1'}{r_1'^3} - \mu_1' x_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' x_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{y}_1' &= -\frac{\mu_1 y_1'}{r_1'^3} - \mu_1' y_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' y_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{z}_1' &= -\frac{\mu_1 z_1'}{r_1'^3} - \mu_1' z_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' z_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (14.11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_2' &= -m_1'\mu_2' x_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' x_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{y}_2' &= -m_1'\mu_2' y_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' y_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{z}_2' &= -m_1'\mu_2' z_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' z_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (14.11')$$

§ 2. Уравнения Ляпунова. Частные решения задачи трех тел

1. Так как, кроме классических первых интегралов, нам до сих пор не известны никакие другие интегралы, то дифференциальные уравнения общей задачи трех тел не могут быть проинтегрированы полностью и общее решение этой задачи мы получить (по крайней мере в настоящее время) не можем.

Однако еще Лагранж заметил, что общая задача трех тел допускает некоторые простые **частные решения**, в которых все три материальные точки M_0, M_1, M_2 находятся в неко-