x_1' и x_2', например, имея при этом в виду формулы для взаимных расстояний (14.9), мы получим

$$\frac{\partial U}{\partial x_1'} = -f\frac{m_0 m_1 x_1'}{\Delta_{01}^3} - f\frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3}\cdot\frac{m_1}{\sigma_1}\left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1}x_1'\right) + \\ + f\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3}\cdot\frac{m_0}{\sigma_1}\left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1}x_1'\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2'} = -f\frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3}\left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1}x_1'\right) - f\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3}\left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1}x_1'\right).$$

Полагая затем для сокращения

$$r_1' = \Delta_{01}, \quad \mu_1 = f(m_0 + m_1), \quad \mu_1' = \frac{fm_2}{m_0 + m_1},$$
$$\mu_1'' = fm_2, \quad \mu_2' = \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1},$$

мы напишем уравнения (14.9) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_1' &= -\frac{\mu_1 x_1'}{r_1'^3} - \mu_1' x_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' x_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{y}_1' &= -\frac{\mu_1 y_1'}{r_1'^3} - \mu_1' y_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' y_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{z}_1' &= -\frac{\mu_1 z_1'}{r_1'^3} - \mu_1' z_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' z_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{14.11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_2' &= -m_1'\mu_2' x_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' x_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{y}_2' &= -m_1'\mu_2' y_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' y_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{z}_2' &= -m_1'\mu_2' z_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' z_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{14.11'}$$

§ 2. Уравнения Ляпунова. Частные решения задачи трех тел

1. Так как, кроме классических первых интегралов, нам до сих пор не известны никакие другие интегралы, то дифференциальные уравнения общей задачи трех тел не могут быть проинтегрированы полностью и общее решение этой задачи мы получить (по крайней мере в настоящее время) не можем.

Однако еще Лагранж заметил, что общая задача трех тел допускает некоторые простые **частные решения**, в которых все три материальные точки M_0, M_1, M_2 находятся в некоторой неизменной плоскости и каждая из этих точек описывает в этой плоскости кеплеровскую орбиту с общим фокусом в центре масс системы G *). При этом конфигурация трех тел также остается неизменной и точки M_0, M_1, M_2 все время образуют равносторонний треугольник или все время располагаются на прямой линии.

Чтобы обнаружить эти частные решения, удобнее и проще всего воспользоваться уравнениями движения трех тел в форме Ляпунова, которые мы прежде всего и выведем **).

Три точки, M_0, M_1, M_2, всегда образуют треугольник, и поэтому всегда находятся в одной плоскости, положение которой вообще изменяется с течением времени.

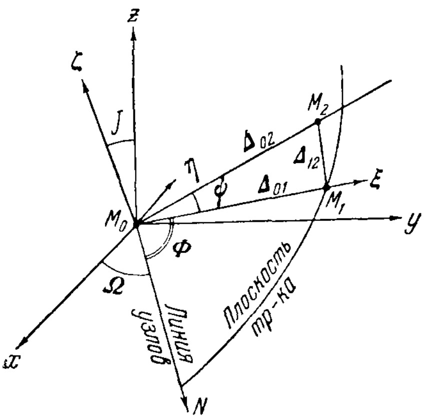

Рис. 70.

Если в каждый момент времени мы будем знать положение плоскости треугольника (в системе координат с неизменными направлениями осей) и положение каждой из его вершин в этой плоскости, то движение каждого из трех тел будет известно и задача будет решена.

Положение плоскости треугольника (M_0, M_1, M_2) можно определить обычными астрономическими элементами — наклонностью J и долготой узла Ω. Положение (или ориентация) треугольника в его плоскости определится положением одной из его вершин и углом, который образует одна из сторон с линией пересечения плоскости треугольника (линией узлов) с основной координатной плоскостью. Положения двух других вершин в плоскости треугольника определятся, если будут известны их расстояния от первой вершины и угол, образуемый этими расстояниями.

Возьмем относительную систему координат с началом в точке M_0 (рис. 70) и преобразуем относительные уравнения (14.6), (14.6′) к новым переменным, которые только что были описаны.

*) См. J. Lagrange, Eessais sur le problème de trois corps. Oeuvres complets, т. 6.

**) См. А. М. Ляпунов, Об устойчивости движения в задаче о трех телах, 1889 г., Собрание сочинений А. М. Ляпунова, т. 1, Изд-во АН СССР, 1954.

Введем для этого подвижную систему координат с началом в точке M_0, основной плоскостью которой является плоскость треугольника $(M_0M_1M_2)$. Примем за новую ось абсцисс — ось $M_0\xi$ — направление, идущее от начала M_0 к точке M_1, за новую ось ординат — ось $M_0\eta$ — направление, перпендикулярное к $M_0\xi$ в плоскости треугольника, составляющее острый угол с направлением M_0M_2, и за новую ось аппликат — ось $M_0\zeta$ — направление, перпендикулярное к плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$, притом такое, чтобы система $(M_0\xi\eta\zeta)$ могла быть совмещена надлежащим вращением с системой (M_0xyz)*) (см. рис. 70).

Обозначим через a_{ij} направляющие косинусы, определяющие ориентацию новой системы по отношению к старой по следующей схеме:

	ξ	η	ζ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Эти девять направляющих косинусов выражаются через три эйлеровых угла подвижной системы $M_0\xi\eta\zeta$ — долготу узла Ω, наклонность J и угол собственного вращения Φ — известными формулами, которыми нам здесь не придется пользоваться и которые поэтому выписывать здесь мы не будем**).

Старые координаты x, y, z (т. е. координаты в относительной системе (M_0xyz)) какой угодно точки пространства выражаются через новые координаты ξ, η, ζ очевидными формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (14.12)$$

Но координаты точек M_1 и M_2 в подвижной системе координат будут, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 = r_1, && \eta_1 = 0, && \zeta_1 = 0, \\ &\xi_2 = r_2\cos\psi, && \eta_2 = r_2\sin\psi, && \zeta_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (14.12')$$

*) Эти координаты ξ, η, ζ не следует смешивать с абсолютными координатами в уравнениях (14.1), которые были обозначены теми же буквами.

**) См. формулы (1.27) гл. I.

где через ψ обозначен угол, образованный радиусами-векторами r_1 и r_2. Теперь формулы (14.12) и (14.12′) дают

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}r_1, & x_2 &= a_{11}r_2\cos\psi + a_{12}r_2\sin\psi,\\ y_1 &= a_{21}r_1, & y_2 &= a_{21}r_2\cos\psi + a_{22}r_2\sin\psi,\\ z_1 &= a_{31}r_1, & z_2 &= a_{31}r_2\cos\psi + a_{32}r_2\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (14.13)$$

Формулы (14.13) выражают относительные координаты точек M_1 и M_2 в неизменной системе (M_0xyz) через величины

$$r_1, \quad r_2, \quad \psi, \quad \Omega, \ J, \quad \Phi, \qquad (14.14)$$

которые и могут быть приняты за новые переменные.

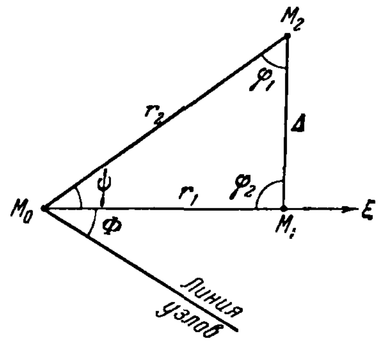

Рис. 71.

Величины r_1, r_2 и ψ полностью определяют треугольник $(M_0M_1M_2)$. Действительно, обозначим два других внутренних угла треугольника соответственно через φ_1 и φ_2 и положим, сверх того, $\Delta_{12}=\Delta$.

Тогда из треугольника $(M_0M_1M_2)$ имеем (рис. 71)

$$\left.\begin{aligned} &\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\psi},\\ &\sin\varphi_1 = \frac{r_2}{\Delta}\sin\psi, \quad \sin\varphi_2 = \frac{r_1}{\Delta}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (14.15)$$

Теперь вместо углов Эйлера Ω, J, Φ, определяющих положение плоскости треугольника в системе координат (M_0xyz) и положение треугольника в его плоскости, введем, согласно Ляпунову, три новые переменные, а именно проекции угловой скорости триэдра $(M_0\xi\eta\zeta)$ (подвижной системы координат) ω_1, ω_2, ω_3 на оси $M_0\xi$, $M_0\eta$, $M_0\zeta$ соответственно.

Эти новые величины связаны с углами Эйлера известными кинематическими уравнениями Эйлера,

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sin\Phi\sin J\cdot\dot\Omega + \cos\Phi\cdot\dot J,\\ \omega_2 &= \cos\Phi\sin J\cdot\dot\Omega - \sin\Phi\cdot\dot J,\\ \omega_3 &= \cos J\ \ \dot\Omega + \dot\Phi, \end{aligned}\right\} \qquad (14.16)$$

которые представляют три дифференциальных уравнения первого порядка, определяющие функции Ω, J, Φ, когда ω_1, ω_2, ω_3 известны как функции времени.

2. Чтобы получить диффереициальные уравнения, определяющие переменные

$$r_1,\ r_2,\ \psi,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \tag{14.17}$$

поступим следующим образом: умиожим сначала уравнеиия (14.6) соответственио на x_1, y_1, z_1 и сложим, что дает

$$x_1\ddot{x}_1+y_1\ddot{y}_1+z_1\ddot{z}_2+\frac{f(m_0+m_1)}{r_1}=fm_2\left[-\frac{r_1\cos\varphi_1}{\Delta^2}-\frac{r_1\cos\psi}{r_2^2}\right]. \tag{14.18}$$

Но

$$x_1\ddot{x}_1+y_1\ddot{y}_1+z_1\ddot{z}_1=r_1\ddot{r}_1-\dot{r}_1^2-\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2\right),$$

а из формул (14.13) иайдем

$$\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2=$$
$$=\dot{r}_1^2+2\left(a_{11}\dot{a}_{11}+a_{21}\dot{a}_{21}+a_{31}\dot{a}_{31}\right)r_1\dot{r}_1+\left(\dot{a}_{11}^2+\dot{a}_{21}^2+\dot{a}_{31}^2\right)r_1^2.$$

Используя теперь свойства иаправляющих косинусов и формулы, дающие производные от иаправляющих косинусов по времени *), мы приведем равенство (14.18) к следующему виду:

$$\ddot{r}_1-r_1\left(\omega_2^2+\omega_3^2\right)+\frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2}+\frac{fm_2\cos\psi}{r_2^2}+\frac{fm_2\cos\varphi_1}{\Delta^2}=0, \tag{14.18$'$}$$

а это есть первое из уравиений Ляпунова.

Умиожая затем уравнения (14.6) соответственно на 0, $-z_1$, $+y_1$, потом на $+z_1$, 0, $-x_1$ и, накоиец, иа $-y_1$, $+x_1$, 0 и складывая каждый раз результаты, мы выведем три следующих равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(y_1\dot{z}_1-z_1\dot{y}_1\right)=fm_2\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r_2^3}\right),\\
&\frac{d}{dt}\left(z_1\dot{x}_1-x_1\dot{z}_1\right)=fm_2\left(z_1x_2-x_1z_2\right)\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r_2^3}\right),\\
&\frac{d}{dt}\left(x_1\dot{y}_1-y_1\dot{x}_1\right)=fm_2\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r_2^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{14.19}$$

---

*) Как известно, мы имеем

$$\dot{a}_{ij}=\omega_{(j+2)}a_{j,\,(i+1)}-\omega_{(j+1)}a_{i,\,(j+2)},$$

причем когда в скобке выходит число, большее трех, то тройка должна быть отброшена (см., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика).

Но из формул (14.12), используя выражения производных от направляющих косинусов, мы находим

$$y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1 = r_1^2(a_{13}\omega_3 + a_{12}\omega_2), \quad y_1z_2 - z_1y_2 = a_{13}r_1r_2\sin\psi,$$
$$z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1 = r_1^2(a_{23}\omega_3 + a_{22}\omega_2), \quad z_1x_2 - x_1z_2 = a_{23}r_1r_2\sin\psi,$$
$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = r_1^2(a_{33}\omega_3 + a_{32}\omega_2), \quad x_1y_2 - y_1x_2 = a_{33}r_1r_2\sin\psi.$$

Пользуясь этими равенствами, мы приведем уравнения (14.19) к следующему виду:

$$a_{13}\frac{d}{dt}(\omega_3r_1^2) + a_{12}\frac{d}{dt}(\omega_2r_1^2) + (\dot{a}_{13}\omega_3 + \dot{a}_{12}\omega_2)r_1^2 = \\ = fm_2a_{13}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)r_1r_2\sin\psi,$$

$$a_{23}\frac{d}{dt}(\omega_3r_1^2) + a_{22}\frac{d}{dt}(\omega_2r_1^2) + (\dot{a}_{23}\omega_3 + \dot{a}_{22}\omega_2)r_1^2 = \\ = fm_2a_{23}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)r_1r_2\sin\psi,$$

$$a_{33}\frac{d}{dt}(\omega_3r_1^2) + a_{32}\frac{d}{dt}(\omega_2r_1^2) + (\dot{a}_{33}\omega_3 + \dot{a}_{32}\omega_2)r_1^2 = \\ = fm_2a_{33}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)r_1r_2\sin\psi.$$

Для исключения направляющих косинусов умножим последние уравнения соответственно на a_{13}, a_{23}, a_{33} и сложим, а затем на a_{12}, a_{22}, a_{32} и опять сложим. Используя еще формулы (14.15), мы получим в результате следующие два уравнения Ляпунова:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\omega_3r_1^2) + \omega_1\omega_2r_1^2 + fm_2\frac{r_1\sin\psi}{r_2^2} - fm_2\frac{r_1\sin\varphi_1}{\Delta^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}(\omega_2r_1^2) - \omega_1\omega_3r_1^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.19')$$

Подобным же образом мы поступим и с уравнениями (14.6′). Для этого вводим вторую подвижную систему координат, направляя ось абсцисс от начала M_0 к точке M_2, ось аппликат перпендикулярно к плоскости треугольника, а ось ординат выбирая в плоскости треугольника так, чтобы вторая система могла быть совмещена надлежащим вращением с первой.

Обозначая проекции угловой скорости нового триэдра на новые подвижные оси через ω_1', ω_2', ω_3' и пользуясь формулами, совершенно аналогичными формулам (14.12), (14.12′), (14.13), мы выведем еще три уравнения, совершенно подобные уравнениям (14.18′) и (14.19′).

В результате будем иметь следующую систему уравнеиий:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_1}{dt^2}-\left(\omega_2^2+\omega_3^2\right)r_1+\frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2}+\\
&\qquad\qquad+\frac{fm_2\cos\psi}{r_2^2}+\frac{fm_2\cos\varphi_1}{\Delta^2}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\omega_3r_1^2\right)+\omega_1\omega_2r_1^2+\frac{fm_2r_1\sin\psi}{r_2^2}-\frac{fm_2r_1\sin\varphi_1}{\Delta^2}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\omega_2r_1^2\right)-\omega_1\omega_3r_1^2=0,\\
&\frac{d^2r_2}{dt^2}-\left(\omega_2'^2+\omega_3'^2\right)r_2+\frac{f(m_0+m_2)}{r_2^2}+\\
&\qquad\qquad+\frac{fm_1\cos\psi}{r_1^2}+\frac{fm_1\cos\varphi_2}{\Delta^2}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\omega_3'r_2^2\right)+\omega_1'\omega_2'r_2^2+\frac{fm_1r_2\sin\varphi_2}{\Delta^2}-\frac{fm_1r_2\sin\psi}{r_1^2}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\omega_2'r_2^2\right)-\omega_1'\omega_3'r_2^2=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.20)$$

Замечая теперь, что

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1'&=+\omega_1\cos\psi+\omega_2\sin\psi,\\
\omega_2'&=-\omega_1\sin\psi+\omega_2\cos\psi,\\
\omega_3'&=\omega_3+\dot{\psi},
\end{aligned}\right\}\qquad(14.21)$$

мы видим, что уравиеиия (14.20) образуют систему девятого порядка с шестью неизвестиыми функциями (14.17), после интегрирования которой мы должны проинтегрировать еще отдельную систему трех уравнеиий (14.16) с тремя неизвестиыми функциями Ω, J, Φ. Следовательио, полиое решеиие задачи зависит от иитегрироваиия двух последовательиых систем, образующих вместе систему 12-го порядка. Если эта полиая система проинтегрироваиа, то формулы (14.13) дадут и отиосительные координаты точек M_1 и M_2 в системе (M_0xyz).

Полная система 12-го порядка, образоваииая двумя системами (14.20) и (14.16), получена преобразованием первоиачальиой системы 12-го порядка (14.6), (14.6′), а поэтому, разумеется, имеет четыре первых интеграла, которые можно вывести из интегралов (14.8) и (14.8′) при помощи формул преобразования (14.13).

Одиако эти иитегралы имеют довольно громоздкий вид и мы их приводить здесь не будем.

Примечание. Если мы положим в первых трех уравнениях (14.20) $m_2=0$, а во вторых трех уравнениях этой системы $m_1=0$, то получим две раздельные системы, каждая из которых определяет невозмущенное движение одной из точек относительно точки M_0.

3. Чтобы установить существование частных решений общей задачи трех тел, найденных Лагранжем, заметим сначала, что если начальные скорости всех трех тел располагаются в плоскости треугольника, образованного начальными положениями этих тел, то три точки, M_0, M_1, M_2, всегда будут оставаться в этой плоскости, т. е. движение системы будет *плоским* *).

Изучение этого плоского движения составляет несколько более простую задачу, называемую *плоской задачей трех тел*, дифференциальные уравнения которой получаются из дифференциальных уравнений общей (пространственной) задачи трех тел при условии, что во все время движения положение плоскости треугольника, образованного тремя точками, M_0, M_1, M_2, не изменяется, т. е. что мы имеем

$$\Omega=\text{const},\quad J=\text{const},\tag{14.22}$$

и, следовательно,

$$\dot\Omega=0,\quad \dot J=0.$$

Тогда формулы (14.16) и (14.21) дают

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1=0,\quad \omega_2=0,\quad \omega_3=\dot\Phi=\omega,\\ &\omega_1'=0,\quad \omega_2'=0,\quad \omega_3'=\omega+\dot\psi,\end{aligned}\right\}\tag{14.23}$$

и уравнения (14.20) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2r_1}{dt^2}-\omega^2r_1+\frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2}+\frac{fm_2\cos\psi}{r_2^2}+\frac{fm_2\cos\varphi_1}{\Delta^2}=0,\\ &\frac{d^2r_2}{dt^2}-(\omega+\dot\psi)^2r_2+\frac{f(m_0+m_2)}{r_2^2}+\\ &\qquad\qquad+\frac{fm_1\cos\psi}{r_1^2}+\frac{fm_1\cos\varphi_2}{\Delta^2}=0,\\ &\frac{d}{dt}(\omega r_1^2)+\frac{fm_2r_1\sin\psi}{r_2^2}-\frac{fm_2r_1\sin\varphi_1}{\Delta^2}=0,\\ &\frac{d}{dt}\left[(\omega+\dot\psi)r_2^2\right]+\frac{fm_1r_2\sin\varphi_2}{\Delta^2}-\frac{fm_1r_2\sin\psi}{r_1^2}=0\end{aligned}\right\}\tag{14.24}$$

*) Частные решения Лагранжа соответствуют плоским движениям в задаче трех тел, что мы и покажем.

и образуют независимую систему седьмого порядка с четырьмя неизвестными функциями

$$r_1,\ r_2,\ \psi,\ \omega, \tag{14.24'}$$

вполне определяющими треугольник $(M_0M_1M_2)$ и его положение в неизменной плоскости $\Omega=\text{const}$, $J=\text{const}$.

Теперь легко установить существование лагранжевых частных решений. Покажем сначала, что существует решение, в котором три тела, т. е. точки M_0, M_1, M_2, образуют равносторонний треугольник, т. е. что уравнения (14.24) имеют частное решение

$$r_1=\rho,\quad r_2=\rho,\quad \psi=\frac{\pi}{3}, \tag{14.25}$$

где величины ρ и ω суть некоторые функции времени.

В самом деле, если переменные имеют значения (14.25), то мы имеем также

$$\Delta=\rho,\quad \varphi_1=\frac{\pi}{3},\quad \varphi_2=\frac{\pi}{3} \tag{14.25'}$$

и все уравнения (14.24) будут удовлетворены, если функции ρ и ω определены следующими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2}-\omega^2\rho+\frac{f(m_0+m_1+m_2)}{\rho^2}&=0,\\ \rho^2\omega&=c, \end{aligned}\right\} \tag{14.26}$$

где c — произвольная постоянная.

Но уравнения (14.26) представляют собой дифференциальные уравнения в полярных координатах кеплеровского движения точки единичной массы, притягиваемой к началу координат точкой с массой $m_0+m_1+m_2$. Это движение происходит по эллипсу, гиперболе или параболе в согласии с законами Кеплера, а каждая из точек M_1 и M_2 описывает подобную кеплеровскую орбиту, фокус которой находится в точке M_0.

В самом деле, примем в уравнениях (14.26) за независимую переменную вместо времени t полярный угол ϑ, определяемый формулой *)

$$\omega\,dt=c\frac{dt}{\rho^2}=d\vartheta \tag{14.27}$$

и положим для краткости

$$f(m_0+m_1+m_2)=\mu.$$

*) Так как $\frac{d\vartheta}{dt}=\omega=\dot{\Phi}$, то угол ϑ отличается от угла собственного вращения Φ только на постоянную.

Тогда первое из уравнений (14.26) примет вид

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\vartheta^2}+\frac{1}{\rho}=\frac{\mu}{c^2}=\frac{1}{p} \tag{14.28}$$

и представляет собой известное уравнение Бине для случая силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от притягивающего центра.

Решение этого уравнения имеет вид (см. § 4 гл. IX)

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\vartheta-\varphi)}; \tag{14.28'}$$

это — уравнение конического сечения с параметром p и эксцентриситетом e.

Уравнения орбит, описываемых точками M_1 и M_2 вокруг точки M_0, напишутся, как легко видеть, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=\frac{p}{1+e\cos v_1}, & v_1&=\vartheta-\varphi,\\ r_2&=\frac{p}{1+e\cos v_2}, & v_2&=\vartheta-\varphi+60^\circ, \end{aligned}\right\} \tag{14.29}$$

причем угол ϑ связан с временем t формулой (14.27), которая представляет собой интеграл площадей в плоскости орбиты в полярных координатах.

В частности, может быть $e=0$ и тогда точки M_1 и M_2 описывают вокруг точки M_0 окружности одинакового радиуса. В этом случае треугольник $(M_0M_1M_2)$ остается неизменным, вращаясь вокруг вершины M_0 с постоянной угловой скоростью.

Вместо того чтобы рассматривать движения точек M_1 и M_2 вокруг точки M_0, мы можем рассматривать движения всех трех точек вокруг общего центра масс G. В этом случае каждая из точек M_0, M_1, M_2 будет описывать вокруг точки G подобную кеплеровскую орбиту с фокусом G, или, в частности, концентрические окружности с центром в G.

Чтобы убедиться в этом, возьмем в плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$ неизменную систему координат с началом в M_0, причем ее осью абсцисс служит направление, от которого отсчитывается угол ϑ. Тогда координаты точек M_1 и M_2 определятся формулами

$$\begin{aligned} x_1&=r_1\cos\vartheta, & x_2&=r_2\cos(\vartheta+\psi),\\ y_1&=r_1\sin\vartheta, & y_2&=r_2\sin(\vartheta+\psi), \end{aligned}$$

а координаты точки G найдутся по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}&=\frac{1}{m}\left[m_1r_1\cos\vartheta+m_2r_2\cos(\vartheta+\psi)\right],\\ \bar{y}&=\frac{1}{m}\left[m_1r_1\sin\vartheta+m_2r_2\sin(\vartheta+\psi)\right]. \end{aligned}$$

В лагранжевом частном решении (рис. 72)

$$r_1 = r_2 = \rho, \quad \psi = 60^\circ,$$

и мы имеем

$$x_1 = \rho\cos\vartheta, \quad x_2 = \rho\cos(\vartheta + 60^\circ),$$
$$y_1 = \rho\sin\vartheta, \quad y_2 = \rho\sin(\vartheta + 60^\circ),$$
$$\bar{x} = \frac{\rho}{m}[m_1\cos\vartheta + m_2\cos(\vartheta + 60^\circ)],$$
$$\bar{y} = \frac{\rho}{m}[m_1\sin\vartheta + m_2\sin(\vartheta + 60^\circ)].$$

Вычисляя при помощи этих формул расстояния точек M_0, M_1, M_2 от общего центра масс G, мы найдем

$$\left.\begin{aligned} \overline{M_0G} &= \rho_0 = \nu_0\rho, \quad \nu_0 = \frac{1}{m}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1m_2},\\ \overline{M_1G} &= \rho_1 = \nu_1\rho, \quad \nu_1 = \frac{1}{m}\sqrt{m_0^2 + m_2^2 + m_0m_2},\\ \overline{M_2G} &= \rho_2 = \nu_2\rho, \quad \nu_2 = \frac{1}{m}\sqrt{m_0^2 + m_1^2 + m_0m_1}. \end{aligned}\right\} \quad (14.30)$$

Эти формулы показывают, что каждая из трех точек в треугольном лагранжевом решении описывает вокруг точки G кеплеровскую орбиту. Все эти три орбиты имеют один и тот же эксцентриситет и поэтому являются одновременно либо эллипсами (в частности, окружностями), либо гиперболами, либо параболами *).

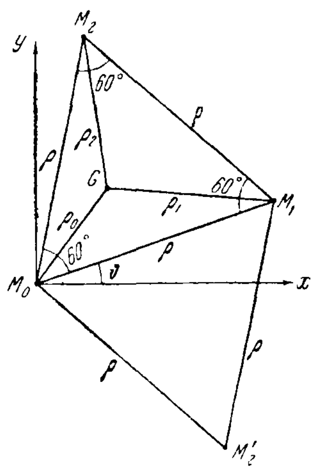

Рис. 72.

Заметим еще, что меняя местами точки M_1 и M_2, мы получим второе треугольное решение (на рис. 71 это второе решение соответствует треугольнику $(M_0M_1M_2')$).

4. Рассмотрим другое лагранжево решение, в котором все три точки располагаются на одной прямой, проходящей, конечно, через общий центр масс G. Таких решений имеется три, которые мы будем различать по положению массы m_2 относительно двух других m_0 и m_1. Эти решения назовем прямолинейными, или коллинеарными, и будем обозначать для краткости буквами L_1, L_2, L_3. Для однородности, можем обозна-

*) В вырожденном случае (когда $c=0$) все три орбиты превращаются в прямые, проходящие через G. В этом случае три точки либо движутся к G либо от G к бесконечности.

чить два треугольных решения, рассмотренные в предыдущем разделе (треугольники $(M_0M_1M_2)$ и $(M_0M_1M_2')$) соответственно символами L_4 и L_5.

Прямолинейное решение L_1. Легко видеть, что уравнения (14.24) будут удовлетворены, если мы положим

$$\left.\begin{array}{lll} \psi = 180^\circ, & \varphi_1 = 0, & \varphi_2 = 0, \\ r_2 = \rho, & r_1 = a\rho, & \Delta = (a+1)\rho, \end{array}\right\} \tag{14.31}$$

где a есть некоторая постоянная, а функции ρ и ω удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2\rho}{dt^2} - \omega^2\rho + \dfrac{\mu_1}{\rho^2} = 0, \quad \omega\rho^2 = c, \\ \mu_1 = f\left[\dfrac{m_0+m_1}{a^3} + \dfrac{m_2}{a(a+1)^2} - \dfrac{m_2}{a}\right] = \\ \qquad = f\left[(m_0+m_2) - \dfrac{m_1}{a^2} + \dfrac{m_1}{(a+1)^2}\right], \end{array}\right\} \tag{14.31'}$$

тождественным по виду с уравнениями (14.26). Отсюда следует, что точки M_1 и M_2, располагаясь на одной прямой с точкой M_0 (рис. 73), описывают подобные кеплеровские орбиты, фокус которых лежит в M_0. Постоянная a определяется условием, чтобы значение μ_1, вытекающее из первого и второго уравнений (14.24), было одно и то же, что дает для нахождения a следующее уравнение:

$$\frac{m_0+m_1}{a^3} + \frac{m_2}{a(a+1)^2} - \frac{m_2}{a} = (m_0+m_2) - \frac{m_1}{a^2} + \frac{m_1}{(a+1)^2},$$

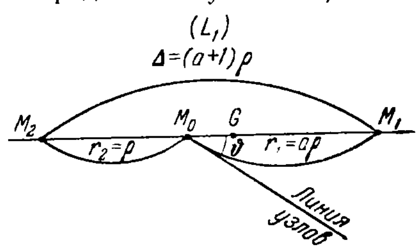

Рис. 73.

которое приводится к уравнению пятой степени, выведенному Лагранжем и имеющему вид

$$\begin{aligned} F_1(a) = (m_0+m_2)a^5 + (2m_0+3m_2)a^4 + (m_0+3m_2)a^3 - \\ - (m_0+3m_1)a^2 - (2m_0+3m_1)a - (m_0+m_1) = 0. \end{aligned} \tag{14.31''}$$

Это уравнение имеет только одну перемену знаков, а поэтому, по теореме Декарта, имеет только один вещественный положительный корень, которому соответствует единственное положение точки M_2 слева от M_0 на прямой (M_0M_1).

Будем считать, для определенности, что не нарушает общности, что массы точек удовлетворяют неравенству

$$m_0 \geqslant m_1 \geqslant m_2.$$

Тогда, так как

$$F_1(0) = -(m_0 + m_1), \quad F_1(1) = 7(m_2 - m_1),$$
$$F_1(2) = 63m_0 - 19m_1 + 104m_2,$$

при неравных массах положительный корень уравнения (14.31″) лежит в промежутке (1, 2) и равен единице, если $m_2 = m_1$.

Если рассматривать движения всех трех точек относительно общего центра масс G, то, так же как и выше, установим, что каждая из трех точек, M_0, M_1, M_2, описывает вокруг G подобную кеплеровскую орбиту.

Эти орбиты могут быть, в частности, окружностями, а в вырожденном случае все три точки движутся по неизменной прямой.

Прямолинейное решение L_2. Уравнения (14.24) будут также удовлетворены, если мы положим

$$\left.\begin{aligned} &\psi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 180^\circ, \\ &r_2 = \rho, \quad r_1 = (a+1)\rho, \quad \Delta = a\rho, \end{aligned}\right\} \tag{14.32}$$

где a опять постоянная, а функции ρ и ω удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2} - \omega^2\rho + \frac{\mu_2}{\rho^2} = 0, \quad \omega\rho^2 = c, \\ &\mu_2 = f\left[\frac{m_0 + m_1}{(a+1)^3} + \frac{m_2}{a+1} + \frac{m_2}{a^2(a+1)}\right] = \\ &\qquad = f\left[(m_0 + m_2) + \frac{m_1}{(a+1)^2} - \frac{m_1}{a^2}\right], \end{aligned}\right\} \tag{14.32′}$$

такого же вида, как и уравнения (14.31′). Постоянная a определяется уравнением

$$\frac{m_0 + m_1}{(a+1)^3} + \frac{m_2}{a+1} + \frac{m_2}{a^2(a+1)} = (m_0 + m_2) + \frac{m_1}{(a+1)^2} - \frac{m_1}{a^2},$$

которое приводится к виду

$$\begin{aligned} F_2(a) = (m_0 + m_2)a^5 + (3m_0 + 2m_2)a^4 + (3m_0 + m_2)a^3 - \\ - (3m_1 + m_2)a^2 - (3m_1 + 2m_2)a - (m_1 + m_2) = 0. \end{aligned} \tag{14.32″}$$

Это уравнение, отличающееся от уравнения (14.31″) только порядком расположения трех масс, также имеет единственный вещественный положительный корень. Так как, притом,

$$F_2(0) = -(m_1 + m_2), \quad F_2(1) = 7(m_0 - m_1),$$

то этот корень лежит между нулем и единицей и равен единице, если $m_1=m_0$. Иными словами, в этом решении точка M_2 располагается или ближе к точке M_1 (если $m_1 \neq m_0$) или находится посередине между M_0 и M_1 (если мы имеем $m_1=m_0$) (рис. 74).

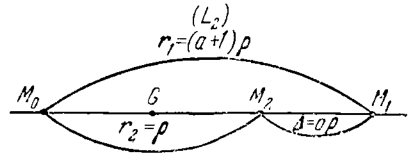

Рис. 74.

Орбиты точек M_1 и M_2 относительно M_0, или орбиты всех трех точек относительно G суть подобные кеплеровские орбиты, в частности, окружности, а в вырожденном случае все три точки движутся по неизменной прямой.

Прямолинейное решение L_3. Наконец, уравнения движения (14.24) будут удовлетвореиы, если мы положим

$$\left.\begin{aligned} \psi=0, \quad \varphi_1=180^\circ, \quad \varphi_2=0, \\ r_1=\rho, \quad r_2=(a+1)\rho, \quad \Delta=a\rho, \end{aligned}\right\} \tag{14.33}$$

где a также постояииая, а функции ρ и ω удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2}-\omega^2\rho+\frac{\mu_3}{\rho^2}=0, \quad \omega\rho^2=c, \\ &\mu_3=f\left[(m_0+m_1)+\frac{m_2}{(a+1)^2}-\frac{m_2}{a^2}\right]= \\ &\qquad =f\left[\frac{m_0+m_2}{(a+1)^3}+\frac{m_1}{a+1}+\frac{m_1}{a^2(a+1)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{14.33$'$}$$

такого же вида, как и уравнеиия (14.26). Постоянная a в этом решении определяется уравнением

$$(m_0+m_1)+\frac{m_2}{(a+1)^2}-\frac{m_2}{a^2}=\frac{m_0+m_2}{(a+1)^3}+\frac{m_1}{a+1}+\frac{m_1}{a^2(a+1)},$$

которое приводится к такому же виду, как и в двух предыдущих случаях:

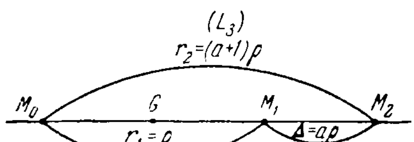

Рис. 75.

$$\begin{aligned} F_3(a) &= (m_0+m_1)a^5+(3m_0+ \\ &+2m_1)a^4+(3m_0+m_1)a^3- \\ &-(m_1+3m_2)a^2-(2m_1+ \\ &+3m_2)a-(m_1+m_2)=0. \end{aligned} \tag{14.33$''$}$$

Это уравнение также имеет единственный вещественный положительный корень. Так как в этом случае

$$F_3(0)=-(m_1+m_2), \quad F_3(1)=7(m_0-m_1),$$

то этот корень лежит между нулем и едииицей, если $m_2 \neq m_0$, и равен единице, если $m_2=m_0$. Расположение трех масс в этом решении указано на рис. 75.