§ 3. Ограниченная задача трех тел

1. В предыдущих параграфах мы рассматривали общую, или неограниченную, задачу трех тел (материальных точек!), где на три массы m_0, m_1, m_2 мы не накладывали никаких ограничений. Однако во многих случаях астрономической практики встречаются задачи, где масса одного из трех тел весьма мала по сравнению с двумя другими массами. Такова, например, задача о движении малой планеты или кометы под действием притяжения Солнца и Юпитера, или задача о движении космического корабля под действием притяжений Земли и Луны и т. д. В этих случаях малая масса практически не оказывает никакого влияния на две конечные массы, как если бы она была равна нулю, но сама ими, конечно, притягивается.

Пренебрегая в уравнениях движения общей задачи трех тел теми членами, которые имеют множителем малую массу, мы получим некоторые приближенные уравнения, описывающие движение «нулевой» массы под действием притяжения двух конечных масс и придем, таким образом, к задаче, которая, по предложению Пуанкаре, называется «ограниченной задачей трех тел».

Будем считать, что точки M_0 и M_1 имеют конечные массы m_0 и m_1 (не нарушая общности, можем считать, что $m_0 \geqslant m_1$), а точка M_2 имеет ничтожно малую, или, как иногда говорят, «нулевую» массу.

Дифференциальные уравнения этой задачи можно, конечно, вывести непосредственно, рассматривая движение материальной точки M_2 под действием ньютонианского притяжения двух других материальных точек M_0 и M_1, предполагая, что масса движущейся точки M_2 настолько мала, что ее можно считать равной нулю и что две другие массы конечны.

Однако проще получить нужные уравнения из уравнений общей задачи в относительных координатах (барицентрических, относящихся к точке M_0, Якоби или Ляпунова), полагая в этих уравнениях $m_2=0$. Тогда во всех этих случаях уравнения движения точек M_1 и M_2 «расщепляются», как нетрудно убедиться, на две отдельные системы, одна из которых определяет кеплеровское движение точки M_1 (относительно M_0 или относительно центра масс G точек M_0 и M_1 *)), а другая определяет движение «нулевой» массы, т. е. движение точки M_2 под действием притяжений точек M_0 и M_1.

Рассмотрим, для определенности, уравнения движения в координатах Якоби (14.9), или уравнения (14.11), (14.11′). По-

*) Очевидно, что при $m_2=0$ центр масс трех точек M_0, M_1 и M_2 совпадает с центром масс двух точек M_0 и M_1.

лагая в этих уравнениях $m_2=0$, мы приведем их к следующему виду:

$$\ddot{x}_1'=\frac{\partial U_1}{\partial x_1'},\quad \ddot{y}_1'=\frac{\partial U_1}{\partial y_1'},\quad \ddot{z}_1'=\frac{\partial U_1}{\partial z_1'},\tag{14.34}$$

$$\ddot{x}_2'=\frac{\partial U_2}{\partial x_2'},\quad \ddot{y}_2'=\frac{\partial U_2}{\partial y_2'},\quad \ddot{z}_2'=\frac{\partial U_2}{\partial z_2'},\tag{14.35}$$

где положено

$$U_1=\frac{f(m_0+m_1)}{\Delta_{01}},\quad U_2=f\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}}+\frac{m_1}{\Delta_{12}}\right).\tag{14.36}$$

Интегралы (14.10) и (14.10′) при $m_2=0$ примут вид

$$\left.\begin{array}{c} y_1'\dot{z}_1'-z_1'\dot{y}_1'=\bar{c}_1',\quad z_1'\dot{x}_1'-x_1'\dot{z}_1'=\bar{c}_2',\quad x_1'\dot{y}_1'-y_1'\dot{x}_1'=\bar{c}_3', \\ \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1'^2+\dot{y}_1'^2+\dot{z}_1'^2\right)=U_1+\bar{h}'. \end{array}\right\}\tag{14.34′}$$

Очевидно, что уравнения (14.34) определяют движение точки M_1 по отношению к точке M_0 так, как будто точка M_2 вовсе не существует, а (14.34′) суть интегралы площадей и живой силы этой кеплеровской задачи.

Поэтому уравнения (14.34) могут быть проинтегрированы, а координаты x_1', y_1', z_1' могут рассматриваться как известные функции времени и начальных значений

$$x_{10}',\quad y_{10}',\quad z_{10}',\quad \dot{x}_{10}',\quad \dot{y}_{10}',\quad \dot{z}_{10}',$$

которые являются произвольными постоянными этой задачи. Вместо начальных значений координат и составляющих скорости точки M_1 можно ввести, если угодно, обычные кеплеровские элементы орбиты, которая может быть эллипсом (в частности, окружностью), параболой или гиперболой в зависимости от знака постоянной энергии кеплеровского движения $\bar{h}'$.

Но если координаты точки M_1 суть известные функции времени, то силовая функция U_2 в уравнениях (14.35) есть известная функция от t и координат x_2', y_2', z_2' точки M_2. Поэтому уравнения (14.35) определяют движение точки M_2, масса которой ничтожно мала, под действием притяжения двух центров, один из которых неподвижен, а другой движется вокруг этого неподвижного по кривой второго порядка в согласии с законами Кеплера.

Однако уравнения (14.35) не имеют, вообще говоря, известных первых интегралов*) и не допускают интегрирования в

*) Исключение составляет так называемая круговая ограниченная задача, в которой точка M_1 движется вокруг M_0 по круговой орбите и где существует первый интеграл (см. ниже).

квадратурах, а поэтому ограниченная задача трех тел, хотя и более проста, чем общая, все же представляет значительные математические затруднения и ее решение не найдено и в настоящее время.

2. Известно (см. часть третью этой книги), что движение точки M_1 вокруг точки M_0 происходит в неизменной плоскости, проходящей через M_0 перпендикулярно к вектору момента скорости точки M_1, составляющие которого суть $\overline{c'_1}$, $\overline{c'_2}$, $\overline{c'_3}$.

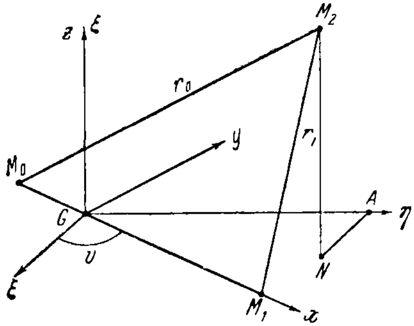

Рис. 76.

Так как выбор неизменных направлений осей якобиевских систем координат $M_0x'_1y'_1z'_1$ и $Gx'_2y'_2z'_2$ совершенно произволен, лишь бы соответствующие оси были параллельны, то мы можем выбрать эти направления так, чтобы оси аппликат обеих систем были перпендикулярны к упомянутой плоскости.

Пусть $G\xi\eta\zeta$ — система координат, в плоскости $(\xi\eta)$ которой движется точка M_1 (рис. 76). Уравнения движения точки M_2 («нулевой» массы!) будут иметь совершенно такой же вид, как и уравнения (14.35), так что дифференциальные уравнения нашей задачи могут быть написаны в следующем виде:

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \ddot{\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \tag{14.35'}$$

где положено

$$W = f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right), \tag{14.36'}$$

а взаимные расстояния определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \zeta^2, \\ r_1^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2 \end{aligned}\right\} \quad (\zeta_0 = \zeta_1 = 0), \tag{14.36''}$$

где ξ_0, η_0 и ξ_1, η_1 суть координаты точек M_0 и M_1 в системе $(G\xi\eta)$.

Эти координаты определяются очевидными формулами

$$\left.\begin{aligned} (m_0 + m_1)\,\xi_0 &= -\,m_1 r\cos v, & (m_0 + m_1)\,\eta_0 &= -\,m_1 r\sin v, \\ (m_0 + m_1)\,\xi_1 &= +\,m_0 r\cos v, & (m_0 + m_1)\,\eta_1 &= +\,m_0 r\sin v, \end{aligned}\right\} \tag{14.36'''}$$

где $r = \overline{M_0M_1}$ есть радиус-вектор точки M_1, а v — угол, образуемый радиусом вектором с положительным направлением оси $G\xi$.

Величины r и v являются известными функциями времени, определяемыми формулами кеплеровского движения.

Но орбита точки M_1 (в плоскости $G\xi\eta$), определяемая уравнением

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}, \tag{14.37}$$

может быть окружностью ($e=0$), эллипсом ($e<1$), параболой ($e=1$) или гиперболой ($e>1$), в зависимости от величины начальной скорости точки M_1 по отношению к точке M_0.

Поэтому в небесной механике различаются следующие случаи: случай гиперболической ограниченной задачи, в котором орбита точки M_1 есть гипербола с фокусом в точке M_0; случай эллиптической ограниченной задачи, когда орбита точки M_1 есть эллипс с фокусом в точке M_0 и случай круговой ограниченной задачи, в котором орбита точки M_1 есть окружность с центром в точке M_0 *).

Перейдем теперь в уравнениях (14.35′) от неподвижной системы осей $G\xi\eta\zeta$ к вращающейся вокруг оси $G\zeta$ так, чтобы новая ось абсцисс всегда проходила через точки M_0 и M_1. Обозначая координаты точки M_2 в новой системе координат просто буквами x, y, z, мы имеем следующие формулы, связывающие старые и новые координаты:

$$\left.\begin{aligned}
\xi&=x\cos v-y\sin v,\\
\eta&=x\sin v+y\cos v,\\
\zeta&=z,
\end{aligned}\right\} \tag{14.38}$$

где v есть тот же самый угол, что и в формуле (14.37), т. е. истинная аномалия кеплеровского движения точки M_1 (см. рис. 76).

Координаты точки M_2 во вращающихся осях определятся следующими уравнениями (см. гл. VI):

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}-2\dot{v}\dot{y}-\dot{v}^2x-\ddot{v}y&=\frac{\partial W}{\partial x},\\
\ddot{y}+2\dot{v}\dot{x}-\dot{v}^2y+\ddot{v}x&=\frac{\partial W}{\partial y},\\
\ddot{z}&=\frac{\partial W}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{14.39}$$

*) Можно рассматривать также еще параболическую ограниченную задачу, в которой орбита точки M_1 есть парабола, и прямолинейную ограниченную задачу, когда точка M_1 движется по прямой, проходящей через точку M_0.

где силовая функция определяется той же самой формулой (14.36′), но расстояния r_0 и r_1 ввиду (14.38) будут даны формулами

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= (x - x_0)^2 + y^2 + z^2, \\ r_1^2 &= (x - x_1)^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.39′}$$

где

$$x_0 = -\frac{m_1 r}{m_0 + m_1}, \qquad x_1 = \frac{m_0 r}{m_0 + m_1}. \tag{14.39″}$$

Далее, так как

$$r^2 \dot{v} = c = \text{const},$$

то мы имеем

$$\dot{v} = \frac{c}{p^2}(1 + e\cos v)^2; \quad \ddot{v} = -\frac{2c^2 e}{p^4}(1 + e\cos v)^3. \tag{14.40}$$

Если, в частности, орбита точки M_1 есть окружность радиуса a, то $e = 0$, $\dot{v} = \frac{c}{a^2} = n$, $\ddot{v} = 0$, и координаты x_0, x_1 точек M_0 и M_1 суть величины постоянные

$$x_0 = -\frac{m_1 a}{m_0 + m_1}, \qquad x_1 = \frac{m_0 a}{m_0 + m_1}. \tag{14.40′}$$

Тогда уравнения (14.39) превратятся в уравнения движения классической ограниченной круговой задачи трех тел и могут быть написаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{14.41}$$

где

$$\Omega = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + W \tag{14.41′}$$

зависит только от координат точки M_2 и, значит, **не зависит явно от времени**. Благодаря этому обстоятельству система (14.41) имеет один первый интеграл, аналогичный интегралу живой силы в неограниченной задаче и называемый **интегралом Якоби** *).

Чтобы получить этот интеграл непосредственным путем, умножим уравнения (14.41) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$, сложим и проинтегрируем, что дает

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n^2(x^2 + y^2) + 2f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right) + 2h, \tag{14.42}$$

*) Это наименование было затем распространено на интегралы более общего типа любой гамильтоновой системы (см. гл. VI).

или

$$V^2 = 2\Omega + 2h, \tag{14.42'}$$

где

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

есть относительная скорость точки M_1, а h есть произвольная постоянная, полностью определяемая начальным положением и начальной скоростью точки M_1.

3. Дифференциальные уравнения ограниченной задачи можно также написать и в другой форме. Получим сначала уравнения задачи в канонической форме. Так как живая сила T точки M_2 в относительных координатах выражается формулой *)

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\dot{v}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{v}^2(x^2 + y^2)\right], \tag{14.43}$$

то, принимая x, y, z за первую группу канонических переменных (обобщенные координаты), мы получим для второй группы канонических сопряженных переменных (обобщенных импульсов) следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \dot{v}y, \\ y' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + \dot{v}x, \\ z' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \dot{z}, \end{aligned}\right\} \tag{14.43'}$$

и уравнения (14.39) напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x'}, & \frac{dx'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y'}, & \frac{dy'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z'}, & \frac{dz'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{14.44}$$

где характеристическая функция (или гамильтониан) определится следующей формулой (см. опять гл. VI):

$$H = \frac{1}{2}\left[x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\dot{v}(yx' - xy')\right] - W. \tag{14.44'}$$

Заметим, что в общем случае H зависит явно от времени t (через посредство $\dot{v}$). Если же рассматривается ограниченная

*) См. § 4 гл. VI. Формулу (14.43) можно также получить и непосредственным путем, преобразуя выражение для живой силы в неподвижной системе ($M_0\xi\eta\zeta$) к новым координатам с помощью формул преобразования (14.38).

круговая задача, то $\dot{v}=\text{const}$, и H не зависит явно от времени, вследствие чего уравнения (14.44) имеют очевидный первый интеграл

$$H = h, \tag{14.44'}$$

который, разумеется, совпадает с интегралом Якоби, только выражен в канонических переменных.

Рассмотрим теперь одно примечательное преобразование уравнений (14.39), примененное впервые Нехвилом *) в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел, но пригодное вполне также и в общем случае.

Введем вместо x, y, z новые переменные, которые обозначим через ξ, η, ζ, подстановкой

$$x = \rho\xi, \quad y = \rho\eta, \quad z = \rho\zeta, \tag{14.45}$$

где

$$\rho = \frac{r}{p} = \frac{1}{1 + e\cos v}, \tag{14.45'}$$

и примем за новую независимую переменную вместо t истинную аномалию кеплеровского движения точки M_1, т. е. угол v, связанный с временем дифференциальным соотношением

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{c}{p^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}. \tag{14.46}$$

Тогда, как легко проверить, имеем

$$\dot{x} = (\rho'\xi + \rho\xi')\,\dot{v},$$
$$\ddot{x} = (\rho''\xi + 2\rho'\xi' + \rho\xi'')\,\dot{v}^2 + (\rho'\xi + \rho\xi')\,\dot{v}\dot{v}'$$

(штрихи обозначают здесь дифференцирования по переменной v) и подобные же формулы для двух других координат.

Подставляя выражения для старых координат и их производных в уравнения (14.39), мы имеем, например,

$$\rho\dot{v}^2\xi'' + (2\rho'\dot{v} + \rho\dot{v}')(\xi' - \eta)\,\dot{v} - 2\rho\dot{v}^2\eta' + (\rho''\dot{v} + \rho'\dot{v}' - \dot{v}\rho)\,\dot{v}\xi = \Xi.$$

Но простое вычисление дает

$$2\rho'\dot{v} + \rho\dot{v}' = 0, \quad \rho''\dot{v} + \rho'\dot{v}' - \dot{v}\rho = -\frac{c}{p^2}.$$

Далее имеем

$$\Xi = \frac{1}{\rho^2}\left[-\frac{fm_0(\xi - \xi_0)}{\rho_0^3} - \frac{fm_1(\xi - \xi_1)}{\rho_1^3}\right],$$

---

*) V. Nechvil, Sur une nouvelle forme des équations différentielles du problème restreint elliptique. Compte Rendus, т. 182, 1926. Для простоты мы обозначили координаты Нехвила теми же буквами, какими выше были обозначены координаты в неподвижной системе осей.

где ввиду формул преобразования

$$\xi_0 = -\frac{pm_1}{m_0+m_1}, \qquad \xi_1 = \frac{pm_0}{m_0+m_1}, \tag{14.47}$$

а

$$\left.\begin{aligned} \rho_0^2 &= (\xi-\xi_0)^2+\eta^2+\zeta^2, \\ \rho_1^2 &= (\xi-\xi_1)+\eta^2+\xi^2. \end{aligned}\right\} \tag{14.47'}$$

Полагая теперь

$$R = \frac{m_0}{\rho_0} + \frac{m_1}{\rho_1}, \tag{14.48}$$

мы получим

$$\Xi = \frac{f}{\rho^2}\frac{\partial R}{\partial \xi},$$

и преобразованное уравнение примет чрезвычайно простой вид. Преобразовывая таким же образом остальные два уравнения, мы получим в результате вместо системы (14.39) следующую:

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - \rho\xi &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' - \rho\eta &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \eta}, \\ \zeta'' + e\cos v\cdot\rho\zeta &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \zeta}, \end{aligned}\right\} \tag{14.49}$$

где

$$\nu^2 = \frac{fp^3}{c^2} = \frac{p^3}{m_0+m_1}. \tag{14.49'}$$

Преимущество этих уравнений заключается в том, что функция R не содержит в своем выражении независимую переменную v, так как ξ_0 и ξ_1 здесь величины постоянные.

Уравнения Нехвила (14.49) можно написать еще иначе, вводя в рассмотрение функцию (Ω), аналогичную функции Ω, определяемой формулой (14.41′).

Действительно, полагая

$$(\Omega) = \rho\left\{\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) - \frac{1}{2}e\cos v\cdot\zeta^2 + \nu^2 R\right\}, \tag{14.50}$$

мы получим вместо (14.49)

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{\partial(\Omega)}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{\partial(\Omega)}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial(\Omega)}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{14.51}$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и уравнения (14.41) ограниченной круговой задачи, и превращаются в них, как легко убедиться, при $e=0$.

Рассмотрим еще преобразование общих уравнений (14.39) к цилиндрическим координатам, для чего сделаем подстановку *):

$$x=\rho\cos\lambda, \quad y=\rho\sin\lambda. \tag{14.52}$$

Тогда выражение (14.43) примет следующий вид:

$$T=\frac{1}{2}\left[\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\lambda}^2+\dot{z}^2+2\dot{v}\rho^2\dot{\lambda}+\dot{v}^2\rho^2\right]. \tag{14.53}$$

Воспользовавшись опять уравнениями Лагранжа второго рода, мы найдем для определения цилиндрических координат следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho}-\rho(\dot{\lambda}+\dot{v})^2&=\frac{\partial W}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt}\left[\rho^2(\dot{\lambda}+\dot{v})\right]&=\frac{\partial W}{\partial \lambda}, \\ \ddot{z}&=\frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{14.54}$$

где W по-прежнему определяется формулой

$$W=f\left(\frac{m_0}{r_0}+\frac{m_1}{r_1}\right), \tag{14.54$'$}$$

в которой теперь

$$\left.\begin{aligned} r_0^2&=\rho^2+z^2-2x_0\rho\cos\lambda+x_0^2, \\ r_1^2&=\rho^2+z^2-2x_1\rho\cos\lambda+x_1^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.54$''$}$$

а x_0 и x_1 даются формулами (14.39′).

Если положить в уравнениях (14.54) $r=a$, $\dot{v}=n$, то получим уравнения круговой задачи в цилиндрических координатах:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho}-\rho(\dot{\lambda}+n)^2&=\frac{\partial W}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt}\left[\rho^2(\dot{\lambda}+n)\right]&=\frac{\partial W}{\partial \lambda}, \\ \ddot{z}&=\frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{14.55}$$

---

*) Здесь буква ρ обозначает проекцию радиуса-вектора точки M_2 на плоскость (xy).

4. Все рассмотренные в предыдущих разделах этого параграфа уравнения определяют движение точки M_2 («нулевой» массы) в пространстве, так что, вообще говоря, траектория точки M_2 есть *пространственная кривая* (кривая двоякой кривизны).

Но если в начальный момент времени точка M_2 находится в плоскости движения двух конечных масс и вектор ее начальной скорости также лежит в этой плоскости, то точка M_2 всегда будет оставаться в этой плоскости и ее орбита будет *плоская кривая*.

Иными словами, уравнения движения точки M_2 в виде (14.35′) или (14.39), или (14.49), или (14.54) всегда могут быть удовлетворены, если мы положим аппликату точки и ее первую производную равными нулю.

Тогда для определения движения точки в плоскости движения двух конечных масс мы будем иметь систему *четвертого порядка*, задача интегрирования которой, конечно, несколько проще задачи интегрирования первоначальной системы шестого порядка.

Соответствующая механическая задача называется *плоской ограниченной задачей трех тел* и ее дифференциальные уравнения (которые имеет смысл выписать отдельно) имеют следующий вид: в системе $(G\xi\eta\zeta)$ с неизменными направлениями осей

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\xi}&=\frac{\partial W}{\partial \xi}=-fm_0\frac{\xi-\xi_0}{r_0^3}-fm_1\frac{\xi-\xi_1}{r_1^3},\\ \ddot{\eta}&=\frac{\partial W}{\partial \eta}=-fm_0\frac{\eta-\eta_0}{r_0^3}-fm_1\frac{\eta-\eta_1}{r_1^3},\end{aligned}\right\}\tag{14.56}$$

где

$$\left.\begin{aligned}r_0^2&=(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2,\\ r_1^2&=(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2,\end{aligned}\right\}\tag{14.56′}$$

а ξ_0, η_0 и ξ_1, η_1 имеют прежние значения.

Во вращающейся системе координат имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{v}\dot{y}-\dot{v}^2x-\ddot{v}y&=\frac{\partial W}{\partial x}=-fm_0\frac{x-x_0}{r_0^3}-fm_1\frac{x-x_1}{r_1^3},\\ \ddot{y}+2\dot{v}\dot{x}-\dot{v}^2x+\ddot{v}y&=\frac{\partial W}{\partial y}=-fm_0\frac{y}{r_0^3}-fm_1\frac{y}{r_1^3},\end{aligned}\right\}\tag{14.57}$$

где

$$\left.\begin{aligned}r_0^2&=(x-x_0)^2+y^2+z^2,\\ r_1^2&=(x-x_1)^2+y^2+z^2,\end{aligned}\right\}\tag{14.57′}$$

а x_0 и x_1 определяются формулами (14.39′) (рис. 77).

При $\dot{v} = \text{const}$ получаем уравнения круговой плоской задачи

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{14.58}$$

с интегралом Якоби

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = n^2(x^2 + y^2) + 2f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right) + 2h, \tag{14.59}$$

причем x_0 и x_1 суть постоянные, определяемые формулами (14.40′).

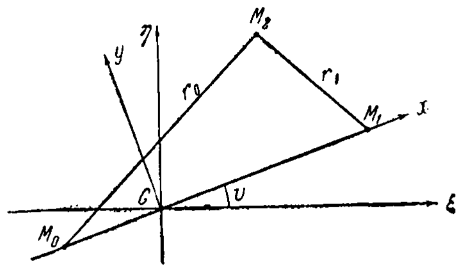

Рис. 77.

Канонические уравнения плоской ограниченной задачи во вращающихся осях имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x'}, & \frac{dx'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y'}, & \frac{dy'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{14.60}$$

где характеристическая функция определяется формулой

$$H = \frac{1}{2}\left[x'^2 + y'^2 + 2\dot{v}(yx' - xy')\right] - W, \tag{14.60′}$$

а

$$x' = \dot{x} - \dot{v}y, \quad y' = \dot{y} + \dot{v}x.$$

При $\dot{v} = n$ имеем канонические уравнения круговой плоской задачи, которые имеют интеграл Якоби

$$H = h. \tag{14.60′}$$

Далее, в координатах Нехвила *) имеем следующие уравнения

*) Величины ξ, η не нужно смешивать с координатами в неподвижных осях.

плоской ограниченной задачи:

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - \rho\xi &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \xi} = \nu^2\rho\left(-m_0\frac{\xi-\xi_0}{\rho_0^3} - m_1\frac{\xi-\xi_1}{\rho_1^3}\right), \\ \eta'' + 2\xi' - \rho\eta &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \xi} = \nu^2\rho\left(-m_0\frac{\eta}{\rho_0^3} - m_1\frac{\eta}{\rho_1^3}\right), \end{aligned}\right\} \quad (14.61)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \rho_0^2 &= (\xi-\xi_0)^2 + \eta^2, \\ \rho_1^2 &= (\xi-\xi_1)^2 + \eta^2, \end{aligned}\right\} \quad (14.61')$$

а ξ_0 и ξ_1 определяются формулами (14.47) и суть величины постоянные.

Наконец, в цилиндрических координатах, отнесенных к неподвижным осям, имеем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho(\dot{\lambda} + \dot{v})^2 &= \frac{\partial W}{\partial \rho} = -fm_0\frac{\rho - x_0\cos\lambda}{r_0^3} - fm_1\frac{\rho - x_1\cos\lambda}{r_1^3}, \\ \frac{d}{dt}\left[\rho^2(\dot{\lambda} + \dot{v})\right] &= \frac{\partial W}{\partial \lambda} = -fm_0\frac{x_0\sin\lambda}{r_0^3} - fm_1\frac{x_1\sin\lambda}{r_1^3}, \end{aligned}\right\} \quad (14.62)$$

где

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= \rho^2 - 2x_0\rho\cos\lambda + x_0^2, \\ r_1^2 &= \rho^2 - 2x_1\rho\cos\lambda + x_1^2. \end{aligned}\right\} \quad (14.62')$$

§ 4. Частные решения ограниченной задачи трех тел. Точки либрации

1. Рассматривая уравнения Ляпунова (14.24), определяющие плоские движения трех тел с произвольными массами и полагая в этих уравнениях $m_2=0$, мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2r_1}{dt^2} - \omega^2 r_1 + \frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\omega r_1^2\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (14.63)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2r_2}{dt^2} - (\omega + \dot{\psi})^2 r_2 + \frac{fm_0}{r_2^2} + \frac{fm_1\cos\psi}{r_1^2} + \frac{fm_1\cos\varphi_2}{\Delta^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left[(\omega+\dot{\psi})r_2^2\right] + \frac{fm_1r_2\sin\varphi_2}{\Delta^2} - \frac{fm_1r_2\sin\psi}{r_1^2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (14.64)$$

Уравнения (14.63) содержат только неизвестные r_1 и ω и определяют поэтому кеплеровское движение точки M_1 под действием притяжения точки M_0 так, как будто бы точка M_2 вовсе и не существовала.