

плоской ограниченной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - \rho\xi &= v^2\rho \frac{\partial R}{\partial \xi} = v^2\rho \left(-m_0 \frac{\xi - \xi_0}{\rho_0^3} - m_1 \frac{\xi - \xi_1}{\rho_1^3} \right), \\ \eta'' + 2\xi' - \rho\eta &= v^2\rho \frac{\partial R}{\partial \eta} = v^2\rho \left(-m_0 \frac{\eta}{\rho_0^3} - m_1 \frac{\eta}{\rho_1^3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (14.61)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho_0^2 &= (\xi - \xi_0)^2 + \eta^2, \\ \rho_1^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + \eta^2, \end{aligned} \right\} \quad (14.61')$$

а ξ_0 и ξ_1 определяются формулами (14.47) и суть величины постоянные.

Наконец, в цилиндрических координатах, отнесенных к неподвижным осям, имеем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho(\dot{\lambda} + \dot{\psi})^2 &= \frac{\partial W}{\partial \rho} = -fm_0 \frac{\rho - x_0 \cos \lambda}{r_0^3} - fm_1 \frac{\rho - x_1 \cos \lambda}{r_1^3}, \\ \frac{d}{dt} [\rho^2(\dot{\lambda} + \dot{\psi})] &= \frac{\partial W}{\partial \lambda} = -fm_0 \frac{x_0 \sin \lambda}{r_0^3} - fm_1 \frac{x_1 \sin \lambda}{r_1^3}, \end{aligned} \right\} \quad (14.62)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 &= \rho^2 - 2x_0\rho \cos \lambda + x_0^2, \\ r_1^2 &= \rho^2 - 2x_1\rho \cos \lambda + x_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.62')$$

§ 4. Частные решения ограниченной задачи трех тел.

Точки либрации

1. Рассматривая уравнения Ляпунова (14.24), определяющие плоские движения трех тел с произвольными массами и полагая в этих уравнениях $m_2=0$, мы получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r_1}{dt^2} - \omega^2 r_1 + \frac{f(m_0 + m_1)}{r_1^2} &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\omega r_1^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.63)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r_2}{dt^2} - (\omega + \dot{\psi})^2 r_2 + \frac{f m_0}{r_2^2} + \frac{f m_1 \cos \psi}{r_1^2} + \frac{f m_1 \cos \varphi_2}{\Delta^2} &= 0, \\ \frac{d}{dt} [(\omega + \dot{\psi}) r_2^2] + \frac{f m_1 r_2 \sin \varphi_2}{\Delta^2} - \frac{f m_1 r_2 \sin \psi}{r_1^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.64)$$

Уравнения (14.63) содержат только неизвестные r_1 и ω и определяют поэтому кеплеровское движение точки M_1 под действием притяжения точки M_0 так, как будто бы точка M_2 вовсе и не существовала.

Проинтегрировав эти уравнения, мы получим r_1 и ω как известные функции времени, а тогда уравнения (14.64) определяют движение «нулевой» массы, т. е. точки M_2 , притягиваемой точками M_0 и M_1 , но не оказывающей на них никакого влияния.

Таким образом, уравнения (14.64) являются уравнениями ограниченной задачи, определяющей движение точки M_2 в плоскости кеплеровской орбиты точки M_1 вокруг M_0 .

Но в § 2 было показано, что уравнения (14.24) имеют частные решения, в которых все три точки M_0 , M_1 и M_2 образуют равносторонний треугольник или располагаются все на одной и той же прямой, проходящей через центр масс G .

Существование этих частных решений не зависит от значений масс m_0 , m_1 и m_2 , а поэтому эти лагранжевы решения имеют место и при $m_2=0$, т. е. и в ограниченной задаче.

Нетрудно, впрочем, убедиться и непосредственно, что уравнения (14.64) удовлетворяются, если мы положим

$$r_2 = r_1, \quad \psi = \pm 60^\circ, \quad (14.65)$$

что соответствует двум треугольным лагранжевым решениям L_4 и L_5 .

Уравнения (14.64) удовлетворяются также, если мы положим соответственно:

$$r_2 = \frac{1}{a} r_1, \quad \psi = 180^\circ, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad (L_1) \quad (14.66)$$

$$r_2 = \frac{1}{a+1} r_1, \quad \psi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 180^\circ, \quad (L_2) \quad (14.67)$$

$$r_2 = \frac{1}{a+1} r_1, \quad \psi = 0, \quad \varphi_1 = 180^\circ, \quad \varphi_2 = 0, \quad (L_3) \quad (14.68)$$

где a есть постоянная, определяемая соответственно уравнениями, получаемыми из уравнений (14.31''), (14.32''), (14.33'') при $m_2=0$, а поэтому имеющими такой вид:

$$m_0 a^5 + 2m_0 a^4 + m_0 a^3 - - (m_0 + 3m_1) a^2 - (2m_0 + 3m_1) a - (m_0 + m_1) = 0, \quad (14.66')$$

$$m_0 a^5 + 3m_0 a^4 + 3m_0 a^3 - 3m_1 a^2 - 3m_1 a - m_1 = 0, \quad (14.67')$$

и

$$(m_0 + m_1) a^5 + (3m_0 + 2m_1) a^4 + (3m_0 + m_1) a^3 - - m_1 a^2 - 2m_1 a - m_1 = 0. \quad (14.68')$$

Считая по-прежнему $m_0 \geq m_1$, мы видим, что каждое из этих уравнений имеет единственный положительный корень, больший или равный единице для (L_1) , меньший или равный единице для (L_2) и меньший единицы для (L_3) .

Пять точек L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 в плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$ (рис. 78), называемые точками либрации, соответствуют пяти частным решениям ограниченной задачи (круговой, эллиптической, параболической или гиперболической), и каждая из них описывает кеплеровскую орбиту вокруг точки M_0 или вокруг центра масс G точек M_0 и M_1 , подобную той кеплеровой орбите, которую описывает точка M_1 в своем невозмущенном движении вокруг точки M_0 или вокруг точки G .

2. Представляет интерес установить существование лагранжевых частных решений, исходя также из уравнений движения ограниченной задачи в координатной форме.

Обратимся для этого к уравнениям Нехвила (14.49) пространственной ограниченной задачи, которые перепишем здесь в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \rho F(\xi, \eta, \zeta), \\ \eta'' + 2\xi' &= \rho \Phi(\xi, \eta, \zeta), \\ \zeta'' &= \rho \Psi(\xi, \eta, \zeta; v), \end{aligned} \right\} \quad (14.69)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F(\xi, \eta, \zeta) &= \xi - v^2 \left[m_0 \frac{\xi - \xi_0}{\rho_0^3} + m_1 \frac{\xi - \xi_1}{\rho_1^3} \right], \\ \Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \eta \left[1 - v^2 \left(\frac{m_0}{\rho_0^3} + \frac{m_1}{\rho_1^3} \right) \right], \\ \Psi(\xi, \eta, \zeta; v) &= \zeta \left[-e \cos v - v^2 \left(\frac{m_0}{\rho_0^3} + \frac{m_1}{\rho_1^3} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.69')$$

Покажем, что уравнения (14.69) могут быть удовлетворены некоторыми постоянными значениями координат Нехвила ξ, η и ζ . Прежде всего заметим, что последнее из уравнений (14.69) может быть удовлетворено постоянным значением ζ только в том случае, когда это значение есть нуль*). Тогда уравнения (14.69) имеют постоянное решение

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \zeta = 0, \quad (14.70)$$

*) При $e \neq 0$ функция Ψ не может обратиться в нуль ни при каких постоянных значениях ξ, η, ζ , а при $e = 0$ Ψ есть существенно отрицательная величина.

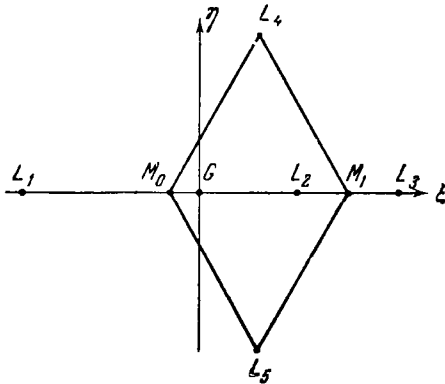


Рис. 78.

где α и β удовлетворяют двум конечным уравнениям с двумя неизвестными, которые напишутся следующим образом:

$$F(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \Phi(\xi, \eta, 0) = 0, \quad (14.71)$$

где левые части равенств определяются формулами (14.69'), в которых нужно положить $\zeta = 0$ и

$$\left. \begin{aligned} \rho_0^2 &= (\xi - \xi_0)^2 + \eta^2, \\ \rho_1^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + \eta^2, \end{aligned} \right\} \quad (14.71')$$

причем

$$\xi_0 = -\frac{pm_1}{m_0 + m_1}, \quad \xi_1 = \frac{pm_0}{m_0 + m_1}. \quad (14.71'')$$

Каждому вещественному решению системы (14.71) соответствует постоянное частное решение уравнений (14.69), представляющее в системе координат Нехвила ($G\xi\eta\zeta$) (в которой точки M_0 и M_1 неподвижны) некоторую точку, лежащую в плоскости ($\xi\eta$), т. е. в плоскости орбиты точки M_1 относительно точки M_0 (или относительно точки G).

Следовательно, в каждом таком частном решении ограниченной задачи трех тел (материальных точек) точка «нулевой» массы M_2 также остается неподвижной в плоскости ($\xi\eta$), образуя вместе с точками M_0 и M_1 некоторую неизменяющую конфигурацию.

Эти неподвижные точки плоскости ($\xi\eta$), соответствующие частным решениям уравнений Нехвила (14.69), будем называть, как уже было отмечено, точками либрации.

Нетрудно установить (что уже было сделано выше другим путем), что таких точек либрации существует только пять, причем три из них (L_1 , L_2 и L_3) лежат на оси абсцисс, т. е. на прямой, проходящей через точки M_0 и M_1 , а две остальные (L_4 и L_5) находятся в вершинах двух равносторонних треугольников, общим основанием которых служит отрезок $\overline{M_0M_1}$.

Обратимся теперь к нахождению этих точек либрации, т. е. к разысканию вещественных решений системы уравнений (14.71).

3. Прежде всего замечаем, что так как $\Phi(\xi, 0, 0) \equiv 0$, то система (14.71) имеет решения, в которых $\eta = \beta = 0$ и которые, следовательно, соответствуют точкам либрации, лежащим на оси абсцисс, т. е. на прямой M_0M_1 .

Абсциссы этих («прямолинейных», как их образно называют) точек либрации определяются уравнением

$$f(\xi) = F(\xi, 0, 0) = 0, \quad (14.72)$$

где, очевидно,

$$f(\xi) = \xi - v^2 \left[m_0 \frac{\xi - \xi_0}{[(\xi - \xi_0)^2]^{3/4}} + m_1 \frac{\xi - \xi_1}{[(\xi - \xi_1)^2]^{3/4}} \right]. \quad (14.72')$$

Функция $f(\xi)$, определяемая формулой (14.72'), конечна и непрерывна при всех вещественных значениях переменной ξ , за исключением значений $\pm\infty$, ξ_0 , ξ_1 , при которых она обращается в бесконечность.

Далее, обозначая через ε весьма малое положительное число, мы видим из (14.72'), что знаки функции $f(\xi)$ чередуются следующим образом (см. график функции, изображенный на рис. 79):

$$f\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) < 0, \quad f(\xi_0 - \varepsilon) > 0, \quad f(\xi_0 + \varepsilon) < 0, \quad f(\xi_1 - \varepsilon) > 0, \\ f(\xi_1 + \varepsilon) < 0, \quad f\left(+\frac{1}{\varepsilon}\right) > 0.$$

Отсюда следует, что функция $f(\xi)$ (т. е. уравнение (14.72)) имеет только три вещественных корня: $\alpha_1 < \xi_0$, $\xi_0 < \alpha_2 < \xi_1$ и $\alpha_3 > \xi_1$.

Поэтому, действительно, на прямой M_0M_1 мы имеем только три точки либрации: $L_1(\alpha_1, 0, 0)$, лежащую левее точки M_0 , $L_2(\alpha_2, 0, 0)$, лежащую между точками M_0 и M_2 , и $L_3(\alpha_3, 0, 0)$, лежащую правее точки M_1 (см. рис. 79).

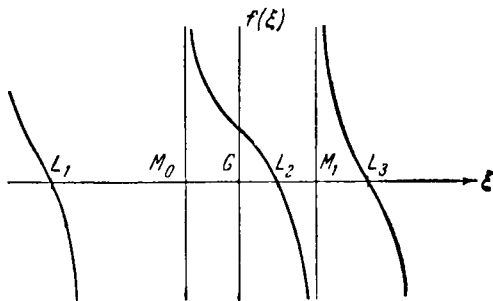


Рис. 79.

Чтобы найти α_1 , α_2 , α_3 , определяющие положения точек либрации L_1 , L_2 , L_3 на оси абсцисс $G\xi$, поступим следующим образом.

Для нахождения точки L_1 положим

$$\xi = \alpha_1 = \xi_0 - \frac{p}{a} = -\frac{pm_1}{m_0 + m_1} - \frac{p}{a}.$$

Тогда имеем

$$\xi - \xi_0 = \alpha_1 - \xi_0 = -\frac{p}{a}, \quad \xi - \xi_1 = \alpha_1 - \xi_1 = -\frac{a+1}{a}p.$$

Подставляя эти значения в уравнение (14.72) и сделав необходимые приведения и упрощения, мы получим, как нетрудно проверить, то же самое уравнение (14.66'), какое мы вывели в предыдущем разделе.

Мы перепишем это уравнение несколько иным образом, полагая

$$\frac{m}{m_0 + m_1} = \mu \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{m_0}{m_0 + m_1} = 1 - \mu \geq \frac{1}{2}, \quad (14.73)$$

так что для определения точки L_1 будем иметь следующее уравнение:

$$F_1(a, \mu) = (1 - \mu)a^5 + 2(1 - \mu)a^4 + (1 - \mu)a^3 - (1 + 2\mu)a^2 - (2 + \mu)a - 1 = 0. \quad (14.74)$$

При $\mu=0$ это уравнение имеет корень, равный единице. Так как

$$F_1(1, 0) = 0, \quad F'_{1a}(1, 0) = 12 \neq 0,$$

то при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, это уравнение имеет единственный корень, представимый рядом, расположенным по степеням μ и обращающийся в единицу при $\mu=0$ *).

Таким образом, будем иметь

$$a = 1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \dots$$

где по формулам Тейлора

$$a_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k a}{d\mu^k} \right)_{\mu=0} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Дифференцируя последовательно уравнение (14.74) по переменной μ , рассматривая a как неявную функцию от μ и полагая после каждого дифференцирования $\mu=0$, $a=1$, мы найдем числовые значения коэффициентов нашего ряда и в результате получим

$$a = 1 + \frac{7}{12}\mu + \frac{49}{144}\mu^2 + \dots \quad (14.74')$$

Для нахождения точки L_2 положим

$$\xi = a_2 = \xi_0 + \frac{p}{a+1} = \frac{p}{a+1} - \frac{pm_1}{m_0 + m_1},$$

откуда

$$\xi - \xi_0 = a_2 - \xi_0 = \frac{p}{a+1}, \quad \xi - \xi_1 = a_2 - \xi_1 = -\frac{ap}{a+1}.$$

Подставляя опять эти значения в уравнение (14.72), мы получим, как легко видеть (после приведений и упрощений), то же самое уравнение (14.67'), которое с помощью (14.73) напишем здесь в следующей форме:

$$F_2(a, \mu) = (1 - \mu)a^5 + 3(1 - \mu)a^4 + 3(1 - \mu)a^3 - 3\mu a^2 - 3\mu a - \mu = 0. \quad (14.75)$$

При $\mu=0$ это уравнение имеет тройной корень, равный нулю, а поэтому, как это следует из общих теорем о неявных функ-

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 1, перев. с франц., 1933, или любой другой учебник математического анализа.

циях*), при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, уравнение (14.75) имеет вещественный корень, представимый рядом, расположенным по целым степеням $\mu^{\frac{1}{3}}$.

Чтобы найти простейшим путем этот ряд, положим $\mu = \chi^3$ и перепишем уравнение (14.75) в виде

$$a = \chi \left[a^3 + 3 - \frac{6a + 8}{a^2 + 3a + 3} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (14.75')$$

Полагая теперь

$$a = a_1 \chi + a_2 \chi^2 + a_3 \chi^3 + \dots$$

и находя коэффициенты путем последовательных дифференцирований уравнения (14.75'), мы имеем

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad a_2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{9}}, \quad a_3 = \frac{2}{27}, \quad \dots$$

и искомый ряд будет иметь следующий вид:

$$a = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + 2 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \dots \quad (14.75'')$$

Наконец, для нахождения точки L_3 положим

$$\xi = a_3 = ap + \xi_1 = ap + \frac{pm_0}{m_0 + m_1}.$$

Тогда

$$\xi - \xi_0 = a_3 - \xi_0 = (a + 1)p; \quad \xi - \xi_1 = a_3 - \xi_1 = ap.$$

После подстановки этих значений в уравнение (14.72), приведений и упрощений, мы получим, как можно видеть, уравнение (14.68'), которое напомним с помощью (14.73) в виде

$$F_3(a, \mu) = a^5 + (3 - \mu)a^4 + (3 - 2\mu)a^3 - \mu a^2 - 2\mu a - \mu = 0. \quad (14.76)$$

При $\mu = 0$ это уравнение также имеет тройной нулевой корень, а следовательно, при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, будет иметь корень, представляемый рядом, расположенным по целым степеням $\mu^{\frac{1}{3}}$, обращаемся в нуль при $\mu = 0$.

Определяя коэффициенты этого ряда таким же образом, как и в предшествующем случае, мы найдем

$$a = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \dots \quad (14.76')$$

*) См. Э. Губса, Курс математического анализа, г. I.

4. Обратимся теперь к нахождению точек либрации, не лежащих на оси абсцисс. Тогда $\eta \neq 0$, вследствие чего координаты этих точек определяются следующей системой уравнений:

$$F(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \frac{1}{\eta} \Phi(\xi, \eta, 0) = 0. \quad (14.77)$$

Умножая второе из этих уравнений соответственно на $\xi - \xi_0$, $\xi - \xi_1$ и вычитая каждое произведение из первого уравнения системы (14.77), мы получим следующую систему, равносильную предыдущей:

$$\left. \begin{aligned} F - \frac{\xi - \xi_0}{\eta} \Phi &= \xi_0 + \frac{m_1 v^2 (\xi_1 - \xi_0)}{\rho_1^3} = 0, \\ F - \frac{\xi - \xi_1}{\eta} \Phi &= \xi_1 - \frac{m_0 v^2 (\xi_1 - \xi_0)}{\rho_0^3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.77')$$

Используя теперь (14.47) и (14.49'), мы приведем уравнения (14.77') к простейшему виду:

$$\frac{\rho^3}{\rho_1^3} - 1 = 0, \quad 1 - \frac{\rho^3}{\rho_0^3} = 0. \quad (14.77'')$$

Единственные вещественные решения этих уравнений суть

$$\rho_0 = \rho, \quad \rho_1 = \rho, \quad (14.78)$$

и следовательно, мы действительно имеем две точки либрации, каждая из которых находится в вершине равностороннего треугольника с основанием $\overline{M_0 M_1}$ (см. рис. 78).

Координаты этих точек L_4 и L_5 легко найти из уравнений (14.78) или просто из чертежа, воспользовавшись свойствами равностороннего треугольника, и мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 = \alpha_5 &= \frac{\rho(m_0 - m_1)}{2(m_0 + m_1)} = \frac{\rho}{2}(1 - 2\mu), \\ \beta_4 &= -\beta_5 = \frac{\rho\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.78')$$

Отметим, в заключение этого раздела, как изменяются положения точек либрации, когда меньшая из двух конечных масс неограниченно уменьшается.

Переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, мы найдем следующие предельные значения расстояний прямолинейных точек либрации от M_0 и M_1 (при этом считается, что точки M_0 и M_1 остаются на месте):

$$\begin{aligned} L_1: \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \rho_{01} &= \rho, & \lim_{\mu \rightarrow 0} \rho_{11} &= 2\rho, \\ L_2: \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \rho_{02} &= \rho, & \lim_{\mu \rightarrow 0} \rho_{12} &= 0, \\ L_3: \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \rho_{03} &= \rho, & \lim_{\mu \rightarrow 0} \rho_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при уменьшении μ точка L_1 перемещается слева направо, приближаясь к своему предельному положению $\bar{L}_1(-\rho + \xi_0, 0)$. Точка L_2 также перемещается слева направо, приближаясь к точке M_1 , а точка L_3 перемещается справа налево, приближаясь к точке M_1 .

Точки L_4 и L_5 при $\mu \rightarrow 0$, разумеется, остаются в вершинах равностороннего треугольника, основание которого есть $\overline{M_0M_1}$. Но центр масс G , очевидно, перемещается справа налево и приближается к точке M_0 .

5. В системе координат Нехвила точки M_0 и M_1 неподвижны, а поэтому все точки либрации также неподвижны. Чтобы найти реальные движения «нулевой» массы, т. е. точки M_2 , в каждом из найденных частных решений уравнений Нехвила нужно возвратиться к неподвижной системе координат с неизменным масштабом. Обозначим для этого расстояния точек либрации L_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) до начала координат G в системе Нехвила через δ_k . Тогда имеем, вообще,

$$\delta_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}. \quad (14.79)$$

Далее, из формул (14.15) находим решения уравнений движения во вращающихся осях (14.39), соответствующие либрационным решениям уравнений Нехвила:

$$x_k = \alpha_k \rho, \quad y_k = \beta_k \rho, \quad z_k = 0, \quad (14.80)$$

где ρ определяется формулой (14.45') и есть известная функция времени. Полагая еще

$$R_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2},$$

мы имеем из (14.80)

$$R_k = \rho \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} = \rho \delta_k. \quad (14.80')$$

Возвращаясь, наконец, к неподвижной системе координат *) ($G\xi\eta\zeta$), мы получим из (14.33) при помощи (14.80) следующие выражения для координат точки M_2 , соответствующие частным решениям уравнений (14.35'):

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= \rho(\alpha_k \cos v - \beta_k \sin v) = R_k \cos v_k, \\ \eta_k &= \rho(\alpha_k \sin v + \beta_k \cos v) = R_k \sin v_k, \end{aligned} \right\} \quad (14.81)$$

где v_k обозначает угол, образованный радиусом-вектором R_k в этих частных решениях с положительным направлением оси

*) Напоминаем, что здесь буквы ξ, η, ζ обозначают уже не координаты Нехвила, а координаты в неизменной системе.

$G\xi$, т. е. с направлением на перицентр кеплеровской орбиты точки M_1 . Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v + 180^\circ, & v_2 &= v, & v_3 &= v, \\ v_4 &= v + 60^\circ, & v_5 &= v - 60^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (14.81')$$

Из (14.80'), (14.81) и (14.81') непосредственно видно, что в каждом из пяти частных лагранжевых решений точка M_2 описывает вокруг точки G (или вокруг точки M_0) кеплеровскую орбиту, эксцентриситет которой равен эксцентриситету e кеплеровской орбиты точки M_1 . Таким образом, в лагранжевых решениях ограниченной задачи трех тел все три точки M_0, M_1, M_2 ($m_2=0$) описывают подобные конические сечения (эллипсы, параболы или гиперболы, в частности, окружности) вокруг общего центра масс G , сохраняя при этом во все время движения неизменную конфигурацию или оставаясь на одной и той же прямой, или образуя равносторонний треугольник.

Найдем еще скорость V_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) точки M_2 в каждом из лагранжевых решений относительно неподвижной системы координат ($G\xi\eta\zeta$).

Из формул (14.81) находим составляющие скорости V_k в неподвижных осях с началом в центре масс G точек M_0 и M_1 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \frac{\delta_k}{p} (\dot{r} \cos v_k - r \dot{v}_k \sin v_k), \\ \dot{\eta}_k &= \frac{\delta_k}{p} (\dot{r} \sin v_k + r \dot{v}_k \cos v_k). \end{aligned} \right\} \quad (14.82)$$

Далее, формулы (14.36''') дают составляющие скорости V точки M_1 в той же системе координат*):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= (1 - \mu) (\dot{r} \cos v - r \dot{v} \sin v), \\ \dot{\eta} &= (1 - \mu) (\dot{r} \sin v + r \dot{v} \cos v). \end{aligned} \right\} \quad (14.82')$$

Отсюда находим:

$$V_k^2 = \frac{\delta_k^2}{p^2} (\dot{r}^2 + \dot{v}_k^2 r^2), \quad V^2 = (1 - \mu)^2 (\dot{r}^2 + \dot{v}^2 r^2).$$

Так как $\dot{v}_k = \dot{v}$, то имеем

$$V_k = \frac{\delta_k}{(1 - \mu) p} V, \quad (14.83)$$

т. е. скорость точки M_2 в каждом из лагранжевых движений пропорциональна скорости кеплеровского движения точки M_1 .

*) Координаты точки M_1 здесь обозначены просто через ξ и η .

Далее, из (14.82) и (14.82') имеем для $k=1, 2, 3$

$$\frac{\dot{\xi}_k}{V_k} = \pm \frac{\dot{\xi}}{V}, \quad \frac{\dot{\eta}_k}{V_k} = \pm \frac{\dot{\eta}}{V}$$

(знак минус для $k=1$, знак плюс для $k=2, 3$), откуда следует, что скорость M_2 в лагранжевых движениях L_2 и L_3 параллельна скорости точки M_1 и имеет с ней одинаковое направление, а скорость M_2 в лагранжевом движении L_1 параллельна и противоположна по направлению скорости точки M_1 .

Для $k=4, 5$ находим из (14.82) и (14.82')

$$\frac{\dot{\xi}_k}{V_k} = \frac{\dot{\xi}}{V} \cos 60^\circ \mp \frac{\dot{\eta}}{V} \sin 60^\circ, \quad \frac{\dot{\eta}_k}{V_k} = \frac{\dot{\xi}}{V} \sin 60^\circ \pm \frac{\dot{\eta}}{V} \cos 60^\circ,$$

откуда следует, что направление скорости точки M_2 в лагранжевых движениях L_4 и L_5 образует с направлением скорости точки M_1 угол, равный $\pm 60^\circ$.

Лагранжевы решения ограниченной задачи трех тел принимают особенно простой вид в случае круговой задачи. Действительно, в этом случае точка M_1 описывает вокруг M_0 (или вокруг центра масс G) окружность, и мы имеем $e=0$, $\rho=1$ и $\dot{\nu}=n$. Тогда различие между системой (14.41) и системой уравнений Нехвила исчезает и все точки либрации оказываются неподвижными и в системе $(Gxyz)$. Следовательно, в каждом из лагранжевых решений точка M_2 описывает вокруг точки G окружность радиуса a с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости движения точки M_1 .

Неизменные конфигурации трех точек в этом случае оказываются также постоянными конфигурациями, так что в прямолинейных решениях все три точки остаются на одной прямой, а расстояния между ними суть величины постоянные. В треугольных решениях все три точки остаются в вершинах равностороннего треугольника, стороны которого также остаются равными одной и той же постоянной величине.

Примечание. Мы не только установили существование пяти частных решений ограниченной задачи трех тел, в которых отношения расстояний между движущимися точками остаются постоянными, но и доказали, по существу, что никаких других частных решений этого рода ограниченная задача трех тел не имеет. Действительно, уравнения Нехвила (14.69) имеют постоянные частные решения только при таких значениях координат, которые удовлетворяют одновременно всем трем уравнениям (14.69'). Но было показано, что эти уравнения могут быть удовлетворены, во-первых, только при $\xi=0$, а во-вторых, когда две другие координаты удовлетворяют двум первым уравнениям (14.69), в которых положено $\xi=0$.

Эти два первые уравнения имеют, как было показано, только пять решений, соответствующих пяти точкам либрации (в системе координат Нехвила), три из которых лежат на оси абсцисс, а две остальные находятся в вершинах равносторонних треугольников, имеющих общим основанием отрезок $\overline{M_0M_1}$.

Так как никаких других решений уравнения (14.69) не имеют, то ограниченная задача трех тел не имеет никаких других частных решений, в которых отношения расстояний между тремя точками оставались бы постоянными.

Разумеется, ограниченная задача трех тел имеет бесчисленное множество частных решений другого рода (например, решения, близкие к лагранжевым), но они не являются столь простыми, как решения Лагранжа и не могут быть представлены конечными формулами.

§ 5. Задача двух неподвижных центров

1. Несмотря на то, что нам известны некоторые частные решения ограниченной (и даже общей) задачи трех тел, общее ее решение до сих пор не найдено, так что уравнения движения этой задачи мы не умеем (при современном состоянии математики, по крайней мере) проинтегрировать до конца.

Даже в простейшем случае — круговой ограниченной задачи, где существует один первый интеграл (интеграл Якоби), мы не можем довести интегрирование до конца.

Однако один частный, или, лучше сказать, специальный случай ограниченной круговой задачи трех тел оказывается вполне интегрируемым, и общее решение задачи в этом специальном случае может быть написано в квадратурах. Мы имеем в виду так называемую задачу двух неподвижных центров, которая была проинтегрирована еще Эйлером и с тех пор неизменно привлекала к себе внимание многих механиков и математиков. Задача двух неподвижных центров заключается в определении движения материальной точки «нулевой массы», притягиваемой двумя конечными неподвижными точечными массами, но не оказывающей на них никакого влияния. Поэтому эту задачу можно рассматривать как специальный случай ограниченной задачи, в котором только две конечные массы остаются неподвижными, не только в относительной, но и в неизменной системе координат.

Дифференциальные уравнения движения точки M_2 в задаче двух неподвижных центров получатся из общих уравнений ограниченной задачи трех тел (14.35'), если координаты ξ_0, η_0 и ξ_1, η_1 двух конечных масс M_0 и M_1 рассматривать как величины постоянные, или, если положить в уравнениях (14.39) $\dot{\nu}=0, e=0$.