Эти два первые уравнения имеют, как было показано, только пять решений, соответствующих пяти точкам либрации (в системе координат Нехвила), три из которых лежат на оси абсцисс, а две остальные находятся в вершинах равносторонних треугольников, имеющих общим основанием отрезок $\overline{M_0M_1}$.

Так как никаких других решений уравнения (14.69) не имеют, то ограниченная задача трех тел не имеет никаких других частных решений, в которых отношения расстояний между тремя точками оставались бы постоянными.

Разумеется, ограниченная задача трех тел имеет бесчисленное множество частных решений другого рода (например, решения, близкие к лагранжевым), но они не являются столь простыми, как решения Лагранжа и не могут быть представлены конечными формулами.

§ 5. Задача двух неподвижных центров

1. Несмотря на то, что нам известны некоторые частные решения ограниченной (и даже общей) задачи трех тел, общее ее решение до сих пор не найдено, так что уравнения движения этой задачи мы не умеем (при современном состоянии математики, по крайней мере) проинтегрировать до конца.

Даже в простейшем случае — круговой ограниченной задачи, где существует один первый интеграл (интеграл Якоби), мы не можем довести интегрирование до конца.

Однако один частный, или, лучше сказать, специальный случай ограниченной круговой задачи трех тел оказывается вполне интегрируемым, и общее решение задачи в этом специальном случае может быть написано в квадратурах. Мы имеем в виду так называемую задачу двух неподвижных центров, которая была проинтегрирована еще Эйлером и с тех пор неизменно привлекала к себе внимание многих механиков и математиков. Задача двух неподвижных центров заключается в определении движения материальной точки «нулевой массы», притягиваемой двумя конечными неподвижными точечными массами, но не оказывающей на них никакого влияния. Поэтому эту задачу можно рассматривать как специальный случай ограниченной задачи, в котором только две конечные массы остаются неподвижными, не только в относительной, но и в неизменной системе координат.

Дифференциальные уравнения движения точки M_2 в задаче двух неподвижных центров получатся из общих уравнений ограниченной задачи трех тел (14.35′), если координаты ξ_0, η_0 и ξ_1, η_1 двух конечных масс M_0 и M_1 рассматривать как величины постоянные, или, если положить в уравнениях (14.39) $\dot{v}=0$, $e=0$.

Если рассматривать уравнения круговой ограниченной задачи (14.41) и положить в этих уравнениях $n=0$, то опять получим уравнения задачи двух неподвижных центров.

Таким образом, если рассмотреть две материальные точки M_0 и M_1, с массами m_0 и m_1 соответственно, неподвижные в неизменной системе координат $(Gxyz)$, с началом в центре масс G этих точек, ось абсцисс которой проходит через точки

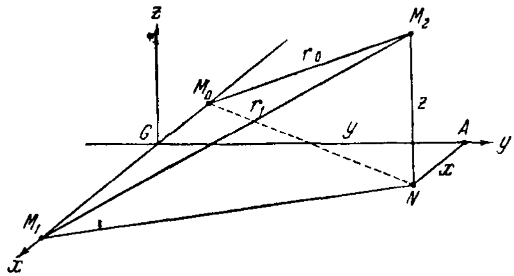

Рис. 80.

M_0, M_1, то уравнения движения материальной точки M_2 (пренебрежимо малой или нулевой массы) напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=\frac{\partial\Omega}{\partial x}=-fm_0\frac{x-x_0}{r_0^3}-fm_1\frac{x-x_1}{r_1^3},\\ \ddot{y}&=\frac{\partial\Omega}{\partial y}=-fm_0\frac{y}{r_0^3}-fm_1\frac{y}{r_1^3},\\ \ddot{z}&=\frac{\partial\Omega}{\partial z}=-fm_0\frac{z}{r_0^3}-fm_1\frac{z}{r_1^3},\end{aligned}\right\} \qquad (14.84)$$

где

$$\Omega=f\left(\frac{m_0}{r_0}+\frac{m_1}{r_1}\right). \qquad (14.85)$$

Расстояния r_0 и r_1 движущейся точки M_2 до неподвижных центров M_0 и M_1 определяются уже известными формулами (см. формулы (14.39′)) (рис. 80)

$$\left.\begin{aligned}r_0^2&=(x-x_0)^2+y^2+z^2,\\ r_1^2&=(x-x_1)^2+y^2+z^2,\end{aligned}\right\} \qquad (14.86)$$

где

$$x_0=-\frac{2cm_1}{m_0+m_1}, \quad x_1=\frac{2cm_0}{m_0+m_1}, \qquad (14.87)$$

причем расстояние $\overline{M_0M_1}$ между неподвижными точками M_0 и M_1 обозначено через $2c$.

Уравнения (14.84) можно также, разумеется, написать в канонической форме, принимая x, y, z за канонические координаты, а их производные по времени, т. е. $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, за сопряженные им обобщенные импульсы.

Канонические уравнения задачи двух неподвижных центров будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \frac{dy}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \frac{dz}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{14.88}$$

где характеристическая функция (гамильтониан) определяется формулой

$$H = T - \Omega = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right). \tag{14.89}$$

Уравнения (14.84) имеют очевидный интеграл (получающийся также из интеграла Якоби (14.42) при $n=0$)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right) + 2h, \tag{14,84'}$$

которому соответствует интеграл энергии системы (14.88) в виде

$$H = h = \text{const}, \tag{14.88'}$$

но уравнения задачи имеют в этом случае и другие интегралы, которые будут выведены в следующем разделе.

Мы уже отметили, что задача двух неподвижных центров известна еще со времен Эйлера и с тех пор служит источником множества работ, в которых рассматривались различные приемы интегрирования уравнений (14.84) и изучались весьма подробно общие свойства движений и траекторий. Однако до самого недавнего времени эта любопытная задача не имела никаких астрономических приложений, разумеется, из-за отсутствия в космическом пространстве таких систем небесных тел, которые могли бы считаться неподвижными.

Тем не менее, и ранее указывалось на возможность использования задачи двух неподвижных центров, как некоторого первого приближения в реальных астрономических задачах, например, в задачах о движении малых планет или комет под действием притяжения Солнца и Юпитера *). Действительно, так как Юпитер описывает свою почти круговую орбиту вокруг

---

*) См., например, J a c o b i, Vorlesungen uber dynamik, Berlin, 1884; русский перевод под ред. проф. Н. С. Кошлякова, ОНТИ, 1936; C. L. C h a r l i e r, Die mechanik des himmels, Berlin, 1927; русский перевод под ред. проф. Б. М. Щиголева, «Наука», 1966.

Солнца примерно за 12 лет, то в течение небольшого промежутка времени его можно считать неподвижным, а тогда движение малой планеты или кометы можно определить в первом приближении формулами задачи двух неподвижных центров. Задачу о движении космического корабля к Луне также можно рассматривать в первом приближении, как задачу двух неподвижных центров, так как за время перелета к Луне (около четырех суток) последняя переместится по своей почти круговой орбите вокруг Земли не очень значительно.

В настоящее время появились и другие возможности использования задачи двух неподвижных центров, о чем будет речь ниже.

2. Для интегрирования задачи двух неподвижных центров рассмотрим канонические уравнения (14.88).

Однако, так же как и в случае задачи двух тел (см. часть 3), применить непосредственно к системе (14.88) метод Гамильтона — Якоби не удается, поскольку в соответствующем уравнении с частными производными переменные не разделяются.

Для того чтобы получить интегрируемое в квадратурах уравнение Гамильтона — Якоби, нужно перейти к новым переменным, что можно сделать множеством различных способов.

Сделаем здесь следующее преобразование. Введем вместо координат x, y, z новые переменные, которые обозначим буквами λ, μ, w, посредством подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= c\lambda\mu + \frac{1}{2}(x_0 + x_1), \\ y &= c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\cos w, \\ z &= c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\sin w, \end{aligned}\right\} \tag{14.90}$$

где в действительных движениях

$$+1 \leqslant \lambda < +\infty, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant +1. \tag{14.90'}$$

Выразим теперь через новые переменные живую силу T и силовую функцию Ω. Прежде всего заметим, что, так как

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1}\cdot c, \quad \frac{x_1 - x_0}{2} = c,$$

то формулы (14.86) дают

$$\begin{aligned} r_0^2 &= (x - x_0)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\lambda + \mu)^2, \\ r_1^2 &= (x - x_1)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\lambda - \mu)^2, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$r_0 = c(\lambda + \mu), \quad r_1 = c(\lambda - \mu). \tag{14.91}$$

Из этих формул следует

$$\lambda = \frac{r_0 + r_1}{2c}, \quad \mu = \frac{r_0 - r_1}{2c}, \tag{14.91'}$$

что дает простое геометрическое значение новых переменных λ и μ. Из (14.91′) видно, что уравнение $\lambda = \mathrm{const}$ представляет собой эллипсоид вращения вокруг оси (Gx), фокусы которого находятся в точках M_0 и M_1. Уравнение $\mu = \mathrm{const}$ представляет гиперболоид вращения вокруг оси (Gx) также с фокусами в M_0 и M_1.

Заметим еще, что так как

$$\frac{y}{z} = \operatorname{ctg} w,$$

то уравнение $w = \mathrm{const}$ есть уравнение плоскости, проходящей через ось (Gx). Поэтому переменные λ, μ, w являются некоторым частным случаем эллипсоидальных координат Ламе (см. гл. V этой книги).

Теперь формулы (14.91) дают выражение для силовой функции Ω, определяемой формулой (14.85), в новых переменных:

$$\Omega = \frac{f}{c} \cdot \frac{(m_0 + m_1)\lambda - (m_0 - m_1)\mu}{\lambda^2 - \mu^2}. \tag{14.92}$$

Дифференцируя теперь формулы (14.90), мы найдем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= c(\mu\dot{\lambda} + \lambda\dot{\mu}),\\ \dot{y} &= c\left(\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,\lambda\dot{\lambda} - \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\,\mu\dot{\mu}\right)\cos w -\\ &\qquad - c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\,\sin w\cdot\dot{w},\\ \dot{z} &= c\left(\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,\lambda\dot{\lambda} - \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\,\mu\dot{\mu}\right)\sin w +\\ &\qquad + c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\,\cos w\cdot\dot{w}, \end{aligned}\right\} \tag{14.93}$$

откуда получим без труда выражение для живой силы T в новых переменных:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ = \frac{c^2(\lambda^2-\mu^2)}{4}\left[\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2-1} + \frac{\dot{\mu}^2}{1-\mu^2}\right] + \frac{c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)\dot{w}^2}{2}. \tag{14.94}$$

Введем обобщенные импульсы λ', μ', w' обычными формулами:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\partial T}{\partial \dot\lambda} = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}\dot\lambda, \\ \mu' &= \frac{\partial T}{\partial \dot\mu} = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}\dot\mu, \\ w' &= \frac{\partial T}{\partial \dot w} = c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)\dot w. \end{aligned}\right\} \tag{14.94'}$$

Выражение для T может быть теперь написано в виде

$$T = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}\lambda'^2 + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}\mu'^2 + \frac{1}{2c^2}\cdot\frac{1}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}w'^2. \tag{14.95}$$

Величины

$$\left.\begin{matrix} \lambda, & \mu, & w \\ \lambda', & \mu', & w' \end{matrix}\right\} \tag{14.96}$$

являются каноническими переменными (см. § 4 гл. VI) и определяются системой Гамильтона:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda'}, & \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mu'}, & \frac{d\mu'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w'}, & \frac{dw'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial w} \end{aligned}\right\} \tag{14.97}$$

с характеристической функцией

$$H = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}\lambda'^2 + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}\mu'^2 + \frac{w'^2}{2c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} - \frac{f}{c}\cdot\frac{(m_0+m_1)\lambda-(m_0-m_1)\mu}{\lambda^2-\mu^2}. \tag{14.97'}$$

3. Для интегрирования системы (14.97) составим соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби, которое ввиду (14.97′) напишется следующим образом:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{2c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2 - \frac{f}{c}\,\frac{(m_0+m_1)\lambda-(m_0-m_1)\mu}{\lambda^2-\mu^2} = h, \tag{14.98}$$

откуда, после упрощений, имеем

$$(\lambda^2-1)\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2 + (1-\mu^2)\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2-1}+\frac{1}{1-\mu^2}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2 = fc(m_0+m_1)\lambda - fc(m_0-m_1)\mu + hc^2(\lambda^2-\mu^2). \tag{14.98'}$$

Полный интеграл этого уравнения легко найти по способу разделения переменных. Действительно, будем искать решение уравнения (14.98′) в виде

$$S(\lambda,\ \mu,\ w) = S_1(\lambda) + S_2(\mu) + \alpha_3 w, \tag{14.99}$$

где α_3 — произвольная постоянная. Тогда уравнение (14.98′) будет удовлетворяться, если мы положим

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda^2-1)\left(\frac{dS_1}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{2(\lambda^2-1)} - fc(m_0+m_1)\lambda - hc^2\lambda^2 = +\alpha_2,\\ &(1-\mu^2)\left(\frac{dS_1}{d\mu}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{2(1-\mu^2)} + fc(m_0-m_1)\mu + hc^2\mu^2 = -\alpha_2, \end{aligned}\right\} \tag{14.99′}$$

где α_2 — другая произвольная постоянная.

Каждое из уравнений (14.99) содержит только одну независимую переменную и интегрируется немедленно квадратурами. Полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned} L(\lambda) &= \alpha_2(\lambda^2-1) + fc(m_0+m_1)\lambda(\lambda^2-1) + \\ &+ hc^2\lambda^2(\lambda^2-1) - \frac{1}{2}\alpha_3^2 = hc^2\lambda^4 + fc(m_0+m_1)\lambda^3 + \\ &\qquad + (\alpha_2 - hc^2)\lambda^2 - fc(m_0+m_1)\lambda - \frac{1}{2}\alpha_3^2,\\ M(\mu) &= \alpha_2(\mu^2-1) + fc(m_0-m_1)\mu(\mu^2-1) + \\ &+ hc^2\mu^2(\mu^2-1) - \frac{1}{2}\alpha_3^2 = hc\mu^4 + fc(m_0-m_1)\mu^3 + \\ &\qquad + (\alpha_2 - hc^2)\mu^2 - fc(m_0-m_1)\mu - \frac{1}{2}\alpha_3^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.100}$$

мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} S_1(\lambda) &= \int \frac{\sqrt{L(\lambda)}\,d\lambda}{\lambda^2-1},\\ S_2(\mu) &= \int \frac{\sqrt{M(\mu)}\,d\mu}{1-\mu^2}, \end{aligned}\right\} \tag{14.100′}$$

и искомый интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (14.98) напишется следующим образом:

$$S(\lambda,\ \mu,\ w,\ h,\ \alpha_2,\ \alpha_3) = \int \frac{\sqrt{L(\lambda)}\,d\lambda}{\lambda^2-1} + \int \frac{\sqrt{M(\mu)}\,d\mu}{1-\mu^2} + d_3 w. \tag{14.101}$$

Найдя функцию S, которая содержит три произвольные постоянные, $h=\alpha_1$, α_2, α_3, мы можем написать теперь общий интеграл системы (14.97) при помощи общей теоремы Гамильтона — Якоби об интегрировании канонических систем.

Этот общий интеграл напишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial h} &= \frac{c^2}{2}\int\frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} - \frac{c^2}{2}\int\frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = t+\beta_1,\\
\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{2}\int\frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} - \frac{1}{2}\int\frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \beta_2,\\
\frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= w - \frac{\alpha_3}{2}\int\frac{d\lambda}{(\lambda^2-1)\sqrt{L(\lambda)}} - \frac{\alpha_3}{2}\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)\sqrt{M(\mu)}} = \beta_3,
\end{aligned}\right\} \tag{14.102}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \lambda} &= \frac{\sqrt{L(\lambda)}}{\lambda^2-1} = \lambda'; & \dot{\lambda} &= \frac{2}{c^2}\frac{\sqrt{L(\lambda)}}{\lambda^2-\mu^2},\\
\frac{\partial S}{\partial \mu} &= \frac{\sqrt{M(\mu)}}{1-\mu^2} = \mu'; & \dot{\mu} &= \frac{2}{c^2}\frac{\sqrt{M(\mu)}}{\lambda^2-\mu^2},\\
\frac{\partial S}{\partial w} &= \alpha_3 = w'; & \dot{w} &= \frac{\alpha_3}{c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)},
\end{aligned}\right\} \tag{14.102'}$$

где β_1, β_2, β_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (14.102) связывают эллипсоидальные координаты λ, μ, w с временем t и шестью произвольными постоянными:

$$\left.\begin{matrix} h=\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3,\\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, \end{matrix}\right\} \tag{14.103}$$

и представляют собой, таким образом, уравнения орбиты (или траектории) точки M_2, движущейся под действием притяжения двух неподвижных центров M_0 и M_1.

Найдя λ, μ, w из этих уравнений в зависимости от времени и шести произвольных постоянных, мы получим затем без всякого труда обобщенные импульсы λ', μ', w', а также обобщенные скорости $\dot{\lambda}$, $\dot{\mu}$, $\dot{w}$.

После этого формулы (24.90) и (14.93) дадут прямоугольные координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Однако такая процедура требует прежде всего определения из двух первых уравнений (14.102) двух неизвестных λ и μ, что связано с решением сложной системы трансцендентных уравнений, левые части которых содержат эллиптические квадратуры.

Проще поступить следующим образом. Рассмотрим уравнения, определяющие обобщенные скорости, и напишем их в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
c^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{d\lambda}{dt} &= 2\sqrt{L(\lambda)},\\
c^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{d\mu}{dt} &= 2\sqrt{M(\mu)},\\
c^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{dw}{dt} &= \frac{\alpha_3(\lambda^2-\mu^2)}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.104}$$

Введем в этих уравнениях новую независимую переменную σ с помощью подстановки:

$$dt = \frac{1}{2} c^2 (\lambda^2 - \mu^2)\, d\sigma. \tag{14.105}$$

Тогда уравнения (14.104) напишутся в виде

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \sqrt{L(\lambda)}, \quad \frac{d\mu}{d\sigma} = \sqrt{M(\mu)}, \quad \frac{dw}{d\sigma} = \frac{\alpha_3 (\lambda^2 - \mu^2)}{2(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \tag{14.104$'$}$$

и каждое из этих уравнений интегрируется по отдельности.

Интегрируя сначала первые два уравнения (14.104), имеем

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} = \sigma - \sigma_0, \quad \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \sigma_0 - \sigma \qquad (\sigma_0 = -\beta_2),$$

откуда обращением эллиптических интегралов получим λ и μ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda(\sigma - \sigma_0,\ \lambda_0,\ h,\ \alpha_2,\ \alpha_3), \\ \mu &= \mu(\sigma - \sigma_0,\ \mu_0,\ h,\ \alpha_2,\ \alpha_3), \end{aligned}\right\} \tag{14.106}$$

как эллиптические функции вспомогательной переменной σ.

После этого квадратурами получим также w и t, как функции переменной σ:

$$\left.\begin{aligned} w - w_0 &= \frac{\alpha_3}{2} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\, d\sigma}{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \\ t - t_0 &= \frac{c^2}{2} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} (\lambda^2 - \mu^2)\, d\sigma \end{aligned}\right\} \tag{14.106$'$}$$

и задача будет полностью разрешена.

Произвольными постоянными в формулах (14.106), (14.106′) являются h, α_2, α_3, λ_0, μ_0 и w_0, которые связаны с начальными значениями прямоугольных координат и составляющих скорости легко выводимыми соотношениями.

4. Орбиту точки M_2, определяемую квадратурами (14.102) задачи двух неподвижных центров, можно рассматривать так же, как *первоначальную*, *промежуточную* или *невозмущенную* орбиту в ограниченной задаче трех тел. Тогда метод изменения произвольных постоянных позволит нам найти решение ограниченной задачи, определяемое теми же формулами (14.102), (14.102′), в которых только произвольные постоянные (элементы невозмущенной орбиты) будут некоторыми функциями времени, определяемыми соответствующей системой канонических уравнений.

Чтобы показать это, возьмем уравнения ограниченной задачи (круговой, эллиптической, параболической или гиперболической) в координатах Нехвила, т. е. уравнения (14.98), в которых ξ_0 и ξ_1 суть величины постоянные, так что M_0 и M_1 являются в этой системе координат неподвижными центрами.

Для большего удобства введем в этих уравнениях вместо v новую независимую переменную τ, посредством подстановки

$$dv = n\,d\tau, \quad n = \frac{\sqrt{f}}{\nu}, \tag{14.107}$$

так что уравнения (14.49) будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2n\frac{d\eta}{d\tau} - n^2\rho\xi = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi},\\
&\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2n\frac{d\xi}{d\tau} - n^2\rho\eta = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta},\\
&\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + e\cos v\cdot n^2\rho\zeta = \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.108}$$

Нетрудно видеть, что уравнения (14.108) можно рассматривать как уравнения Лагранжа второго рода, в которых живая сила T определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2) + n(\xi\dot\eta - \eta\dot\xi) + \\ + \frac{1}{2}n^2\rho(\xi^2 + \eta^2 - e\cos v\cdot\zeta^2), \tag{14.109}$$

а силовая функция есть

$$\Omega = f\rho R = f\rho\left(\frac{m_0}{\rho_0} + \frac{m_1}{\rho_1}\right). \tag{14.110}$$

Введем теперь вместо прямоугольных координат Нехвила эллипсоидальные координаты λ, μ, w теми же формулами (14.90), в которых нужно только буквы x, y, z заменить на ξ, η, ζ. Тогда первые производные $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ *) определятся также формулами (14.93) и выражение для живой силы T в новых переменных представится в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{14.109'}$$

где T_2 определяется формулой (14.94), T_1 есть линейная функция от $\dot\lambda$, $\dot\mu$, $\dot w$ вида **)

$$T_1 = b_1\dot\lambda + b_2\dot\mu + b_3\dot w,$$

*) «Точкой» здесь обозначено дифференцирование по переменной τ, которая совпадает с t в случае круговой задачи.

**) Развернутые выражения для T_1 и T_0 легко написать.

коэффициенты которой зависят от λ, μ, w, а T_0 — некоторая функция от эллипсоидальных координат.

Теперь вводим обобщенные импульсы обычными формулами, которые здесь напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1} \dot{\lambda} + b_1, \\ \mu' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\mu}} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \dot{\mu} + b_2, \\ w' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = c^2 (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2) \dot{w} + b_3. \end{aligned}\right\} \qquad (14.110')$$

Определяя отсюда $\dot{\lambda}$, $\dot{\mu}$, $\dot{w}$ и подставляя полученные значения в формулу (14.109), мы получим новое выражение для T, которое представим в следующей форме:

$$T = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} \lambda'^2 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2} \mu'^2 + \frac{1}{2c^2} \frac{w'^2}{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} + \\ + B_1 \lambda' + B_2 \mu' + B_3 w' + T_0 (\lambda, \mu, w, \tau). \qquad (14.110'')$$

Переменные λ, μ, w и λ', μ' w' являются сопряженными каноническими переменными, а поэтому уравнеиия ограниченной задачи в канонических эллипсоидальных координатах могут быть написаны в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= + \frac{\partial H}{\partial \lambda'}, & \frac{d\mu}{d\tau} &= + \frac{\partial H}{\partial \mu'}, & \frac{dw}{d\tau} &= + \frac{\partial H}{\partial w'}, \\ \frac{d\lambda'}{d\tau} &= - \frac{\partial H}{\partial \lambda}, & \frac{d\mu'}{d\tau} &= - \frac{\partial H}{\partial \mu}, & \frac{dw'}{d\tau} &= - \frac{\partial H}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.111)$$

где характеристическая функция H определяется формулой

$$H = T_2 - T_0 - \Omega. \qquad (14.111')$$

Разобьем функцию H на сумму двух слагаемых, полагая

$$H = H_0 + H_1, \qquad (14.112)$$

где

$$H_0 = T_2 - \frac{1}{\rho} \Omega = \frac{1}{c^2} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} \cdot \lambda'^2 + \frac{1}{c^2} \frac{1 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2} \cdot \mu'^2 + \\ + \frac{w'^2}{2c^2 (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} - \frac{f}{c} \cdot \frac{(m_0 + m_1)\lambda - (m_0 - m_1)\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \qquad (14.112')$$

и

$$H_1 = - T_0 - e \cos v \cdot \Omega = - \tilde{H}. \qquad (14.112'')$$

Если мы заменим теперь в уравнениях (14.111) функцию H на H_0, определяемую формулой (14.112'), то получим в точности канонические уравнения задачи двух неподвижных центров, общий интеграл которой представится формулами (14.102), (14.102′) с заменой t на τ.

Метод изменения произвольных постоянных Лагранжа позволяет теперь представить общий интеграл уравнений (14.111), т. е. уравнений движения ограниченной задачи трех тел, теми же самыми формулами (14.102), (14.102′), в которых только величины α_k и β_k ($k=1, 2, 3$) уже не являются постоянными, а суть некоторые функции времени, определяемые следующей канонической системой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.113)$$

Уравнения (14.113) являются точными уравнениями возмущенного движения, для которого оскулирующей орбитой является орбита задачи двух неподвижных центров, независимо от типа движения конечных масс (в неподвижных осях).

Если ограниченная задача является круговой или эллиптической и если угловая скорость n и эксцентриситет e орбиты точки M_1 суть величины малые, то и возмущающая функция в системе (14.113) будет сохранять, по крайней мере в течение некоторого времени, численно малые значения и для нахождения приближенных значений функций α_k и β_k можно с успехом применить те же методы, которые были описаны в гл. XIII.

Однако для интегрирования уравнений (14.113) необходимо знать выражения для эллипсоидальных координат λ, μ, w в функции τ и величин α_k и β_k. Как уже было отмечено, эти выражения являются комбинациями эллиптических функций, тип которых зависит от начальных значений эллипсоидальных координат и их производных по времени.

Нашей целью было только указать, что для интегрирования ограниченной задачи трех тел (круговой, эллиптической, параболической или гиперболической) вполне можно использовать в качестве первого приближения (промежуточной орбиты) орбиту точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами, а развитие метода и вывод всех необходимых и весьма громоздких формул не входит в задачи этой книги.

§ 6. Обобщенная задача двух неподвижных центров

1. В последнее время выявилась возможность использовать результаты интегрирования классической задачи двух неподвижных центров для изучения движения материальной точки (весьма малой, «нулевой» массы) в гравитационном поле, близком