ров, общий интеграл которой представится формулами (14.102), (14.102′) с заменой t на τ.

Метод изменения произвольных постоянных Лагранжа позволяет теперь представить общий интеграл уравнений (14.111), т. е. уравнений движения ограниченной задачи трех тел, темиже самыми формулами (14.102), (14.102′), в которых только величины α_k и β_k ($k=1, 2, 3$) уже не являются постоянными, а суть некоторые функции времени, определяемые следующей канонической системой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_3}. \end{aligned}\right\} \quad (14.113)$$

Уравнения (14.113) являются точными уравнениями возмущенного движения, для которого оскулирующей орбитой является орбита задачи двух неподвижных центров, независимо от типа движения конечных масс (в неподвижных осях).

Если ограниченная задача является круговой или эллиптической и если угловая скорость n и эксцентриситет e орбиты точки M_1 суть величины малые, то и возмущающая функция в системе (14.113) будет сохранять, по крайней мере в течение некоторого времени, численно малые значения и для нахождения приближенных значений функций α_k и β_k можно с успехом применить те же методы, которые были описаны в гл. XIII.

Однако для интегрирования уравнений (14.113) необходимо знать выражения для эллипсоидальных координат λ, μ, w в функции τ и величин α_k и β_k. Как уже было отмечено, эти выражения являются комбинациями эллиптических функций, тип которых зависит от начальных значений эллипсоидальных координат и их производных по времени.

Нашей целью было только указать, что для интегрирования ограниченной задачи трех тел (круговой, эллиптической, параболической или гиперболической) вполне можно использовать в качестве первого приближения (промежуточной орбиты) орбиту точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами, а развитие метода и вывод всех необходимых и весьма громоздких формул не входит в задачи этой книги.

§ 6. Обобщенная задача двух неподвижных центров

1. В последнее время выявилась возможность использовать результаты интегрирования классической задачи двух неподвижных центров для изучения движения материальной точки (весьма малой, «нулевой» массы) в гравитационном поле, близком к гравитационному полю Земли, или Луны, причем было отмечено, что возможна такая постановка задачи, в которой дифференциальные уравнения движения могут быть проинтегрированы в квадратурах *).

Рассмотрим сначала общую задачу о движении материальной точки в гравитационном поле произвольного твердого тела, которое, для простоты, будем здесь рассматривать как неподвижное.

Пусть нам задано некоторое твердое тело, т. е. заданы его форма, размеры и внутренняя структура. Выберем некоторую прямоугольную декартову систему координат с неизменными направлениями осей и с началом в центре масс O этого тела.

Тогда дифференциальные уравнения движения материальной точки P, притягиваемой (но не притягивающей) телом M, будут иметь следующий вид:

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{14.114}$$

где U — силовая функция притяжения точки P телом M, определяемая вообще следующим разложением (см. гл. V):

$$U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n(\theta, v)}{r^{n+1}}, \tag{14.115}$$

где

$$Y_n(\theta, v)=\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos kv+B_{nk}\sin kv\right], \tag{14.115'}$$

а A_{nk} и B_{nk} суть постоянные коэффициенты, характеризующие форму, размеры и структуру тела M.

Выделим из разложения (14.115) члены, не зависящие от долготы v, и положим

$$U=U_0+\tilde{U}, \tag{14.116}$$

где

$$U_0=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{n0}P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \tag{14.116'}$$

а $\tilde{U}$ — остальная часть разложения.

---

*) См. Е. А. Гребеников, В. Г. Демин, Е. П. Аксенов, Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. См. также Г. Н. Дубошин, Небесная механика. Аналитические и качественные методы, гл. VI; Д. Брауэр и Дж. Клеменс, Методы небесной механики. См. также статьи в сборнике «Проблемы движения искусственных небесных тел», 1963.

Обозначая через m массу тела M, а через a некоторую постоянную, имеющую размерность длины *), мы напишем разложение функции U_0 в следующей стандартной форме:

$$U_0 = \frac{fm}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right)\right\}, \tag{14.117}$$

где коэффициенты J_n выражаются через коэффициенты A_{n0} формулами

$$J_n = \frac{A_{n0}}{m \cdot a^n} \qquad (J_1 = 0). \tag{14.117'}$$

Задача о движении материальной точки в силовом поле, определяемом функцией (14.117), приводится к кеплеровской задаче, если все коэффициенты J_n равны нулю. В самом деле, тогда

$$U_0 = \frac{fm}{r} \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

и уравнения (14.114) определяют движение точки под действием ньютоновского притяжения неподвижной массы m, находящейся в начале координат. Если коэффициенты J_n не равны все нулю, то уравнения (14.114) вообще не интегрируются в квадратурах, и для решения задачи мы можем применить только метод изменения произвольных постоянных, основываясь на общей теории возмущенного кеплеровского движения и рассматривая функцию

$$U_0 - \frac{fm}{r} = \frac{fm}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right)$$

как возмущающую функцию.

Однако, как показал М. Д. Кислик, коэффициенты J_n можно подобрать таким образом, чтобы уравнения движения (14.114) также интегрировались в квадратурах и чтобы подобранная таким образом силовая функция была достаточно близка к силовой функции (14.117), которая в свою очередь является главной частью разложения полной силовой функции U.

Проще всего показать это, рассматривая некоторую задачу двух неподвижных центров, которую мы поставим здесь (несколько меняя для удобства обозначения предыдущего параграфа) следующим образом.

2. Представим себе на оси аппликат системы координат ($Oxyz$) две материальные точки M_1 и M_2 (неподвижные центры), массы которых обозначим через m_1 и m_2, а аппликаты соответственно через c_1 и c_2.

---

*) Для Земли эта постоянная есть не что иное, как экваториальный радиус земного шара. В формуле (14.117) J_n — безразмерные величины.

Тогда задача о движении материальной точки P, притягиваемой этими двумя неподвижными центрами (но не притягивающей их!), приведется к интегрированию системы такого же вида как система (14.114), но с силовой функцией

$$\Omega = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right), \tag{14.118}$$

где расстояния r_1 и r_2 точки P до неподвижных центров M_1 и M_2 определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + (z - c_1)^2, \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + (z - c_2)^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.118'}$$

Рассмотрим какое-либо из двух обратных расстояний, например, функцию r_1^{-1}. Мы имеем

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2c_1 z + c_1^2}} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\frac{c_1}{r}\cdot\frac{z}{r} + \left(\frac{c_1}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

По свойствам производящей функции многочленов Лежандра (см. формулы (4.31) и (4.31′) гл. IV) мы можем теперь написать

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_1}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_2}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right),$$

где второе разложение написано по очевидной аналогии.

Вследствие этих разложений силовая функция Ω представится следующим разложением:

$$\Omega = \frac{fm}{r}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{r^n}\cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right)\right\}, \tag{14.119}$$

где положено

$$m = m_1 + m_2, \quad m\gamma_n = m_1 c_1^n + m_2 c_2^n. \tag{14.119'}$$

Сравнивая теперь разложения (14.117) и (14.119), мы видим, что силовая функция (14.118) может представить силовую функцию U_0 некоторого осесимметричного тела, если характеристические постоянные последнего удовлетворяют следующим условиям:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_n = J_n \cdot a^n. \tag{14.120}$$

Считая величины m, a и все J_n данными, посмотрим, можно ли определить m_1, m_2, c_1 и c_2 так, чтобы выполнялись условия

(14.120). Формулы (14.119′) и (14.120) дают прежде всего следующие четыре уравнения:

$$\left.\begin{array}{ll} m_1+m_2=m, & m_1c_1^2+m_2c_2^2=mJ_2a^2, \\ m_1c_1+m_2c_2=0, & m_1c_2^3+m_2c_2^3=mJ_3a^3, \end{array}\right\} \tag{14.121}$$

из которых выводим

$$m_1=\frac{-mc_2}{c_1-c_2}, \quad m_2=\frac{+mc_1}{c_1-c_2}, \tag{14.122}$$

что определяет массы двух неподвижных центров M_1 и M_2, когда известны аппликаты c_1, c_2, и

$$c_1c_2=-J_2a^2, \quad c_1+c_2=a\frac{J_3}{J_2}, \tag{14.123}$$

что определяет аппликаты c_1 и c_2.

Равенства (14.123) показывают, что аппликаты c_1 и c_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\chi^2-a\frac{J_3}{J_2}\chi-J_2a^2=0, \tag{14.124}$$

решая которое, найдем c_1 и c_2, а затем, по формулам (14.122), m_1 и m_2.

Этим мы установили, что первые три члена в разложениях (14.117) и (14.119) *совпадают*, но все остальные члены в этих разложениях, конечно, совпадать не будут, так как все J_n $(n>2)$ суть определенные для данного тела постоянные, а найденные уже m_1, m_2, c_1, c_2 вообще не будут удовлетворять соотношениям (14.120) для $n\geqslant 4$.

Однако если $r>a$, то степени отношения a/r весьма быстро убывают при возрастании показателя n, а поэтому практически можно добиться, чтобы разложения (14.117) и (14.119) совпадали с достаточной степенью точности. Вследствие этого для приближенного изучения движения точки P в гравитационном поле тела с силовой функцией (14.117) можно в ряде случаев пользоваться формулами, получаемыми при решении задачи двух неподвижных центров.

Более строго задачу о движении точки в гравитационном поле любого (неподвижного) тела можно трактовать следующим образом. Представим силовую функцию U, определяемую общим разложением (14.115), в виде

$$U=\Omega+R_1+R_2, \tag{14.125}$$

где Ω определяется формулой (14.118), которой соответствует разложение (14.119), а R_1 и R_2 определяются соответственно формулами

$$R_1=U_0-\Omega=\frac{fm}{r}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{J_n\cdot a^n-\gamma^n}{r^n}\cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right), \tag{14.125′}$$

и

$$R_2 = U - U_0 = f \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos kv + B_{nk}\sin kv\right]}{r^{n+1}}. \quad (14.125'')$$

Движение точки P в силовом поле, определяемом функцией Ω, мы можем рассматривать как невозмущенное движение, а функции R_1, или $R_1 + R_2$ как возмущающие функции. Но уравнения невозмущенного движения суть уравнения движения в задаче двух неподвижных центров, общий интеграл которой может быть получен, как показано выше, в виде квадратурных соотношений. Применяя теперь к уравнениям движения с полной силовой функцией U метод изменения произвольных постоянных, мы можем также найти решение (приближенное) первоначальной задачи. Пренебрегая частью R_2 полной силовой функции, мы получим несколько более простую задачу, которая также решается методом вариации постоянных.

3. Исследуем теперь полученные в предыдущем разделе формулы, определяющие массы и аппликаты двух неподвижных центров, когда все характеристические постоянные тела M известны.

Если рассматриваемое тело, все параметры которого будем считать действительными (причем m и a — положительными), таково, что дискриминант квадратного уравнения (14.124) есть величина положительная, то корни этого уравнения, т. е. величины c_1 и c_2, окажутся действительными, а следовательно, действительными будут также массы неподвижных центров m_1 и m_2, определяемые формулами (14.122). Силовая функция Ω задачи двух неподвижных центров также, разумеется, будет действительной.

Этот случай мы будем иметь когда $J_2 > 0$ (как, например, для однородного вытянутого эллипсоида вращения; см. § 5, гл. V) или при выполнении условия $J_3^2/J_2^2 + 4J_2 > 0$.

Если же дискриминант уравнения (14.124) отрицателен, то корни c_1, c_2 этого уравнения будут комплексными сопряженными, а тогда и величины m_1, m_2 также выйдут комплексными сопряженными.

Получающаяся задача, в которой массы и аппликаты неподвижных центров суть величины комплексные, называется в настоящее время обобщенной задачей двух неподвижных центров.

Следует заметить, что силовая функция Ω этой обобщенной задачи будет действительна, что вытекает из сопряженности комплексных масс и комплексных радиусов-векторов. Легко также убедиться, что все коэффициенты γ_n также окажутся величинами действительными.

Случай обобщенной задачи будет иметь место, когда $J_2<0$, и при этом выполняется неравенство $J_3^2/J_2^2 < -4J_2$.

Это имеет место для реальной Земли. Действительно, мы имеем следующие значения коэффициентов J_2 и J_3, полученные из обработки наблюдений искусственных спутников или из геодезических измерений (мы приводим округленные значения)

$$J_2 \approx -10^{-3}, \quad J_3 \approx +10^{-5}.$$

Таким образом, для Земли $\frac{J_3^2}{J_2^2} + 4J_2 < 0$, а поэтому и массы неподвижных центров и их аппликаты суть величины комплексные.

Заметим, что коэффициент J_3, характеризующий асимметрию Земли относительно экватора, весьма мал. Если пренебречь членом с этим коэффициентом, то величины c_1 и c_2 окажутся чисто мнимыми, а массы m_1 и m_2 — действительными, каждая из которых равна $m/2$.

Рассмотрим теперь обобщенную задачу двух неподвижных центров несколько подробнее. Положим для удобства последующих выкладок

$$c_1 = c(\sigma + i), \quad c_2 = c(\sigma - i), \quad i = \sqrt{-1}, \tag{14.126}$$

так что имеем

$$c = \frac{a}{2}\sqrt{-\Delta}, \quad \sigma = \frac{J_3}{2\sqrt{-\Delta}}, \qquad \Delta = \frac{J_3^2}{J_2^2} + 4J_2. \tag{14.126'}$$

Очевидно, постоянная c имеет размерность длины, а σ есть безразмерная постоянная, характеризующая асимметрию тела M относительно его экватора *). Если тело M симметрично, то $J_3 = \sigma = 0$ и $c_1 = +ci$, $c_2 = -ci$.

Теперь из (14.122) с помощью (14.126) получим

$$m_1 = \frac{m}{2}(1 + \sigma i), \quad m_2 = \frac{m}{2}(1 - \sigma i), \tag{14.126''}$$

и силовая функция Ω обобщенной задачи двух неподвижных центров представится следующей формулой:

$$\Omega = \frac{fm}{2}\left\{\frac{1+\sigma i}{r_1} + \frac{1-\sigma i}{r_2}\right\}, \tag{14.127}$$

где радиусы-векторы r_1 и r_2 определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2, \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2. \end{aligned}\right\} \tag{14.127'}$$

---

*) «Экватором» тела M мы называем плоскость, проходящую через его центр инерции перпендикулярно к оси вращения (см. часть первую, гл. V).

Дифференциальные уравнения движения точки P в действительных прямоугольных координатах имеют вид

$$\ddot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \tag{14.128}$$

Интегрирование этих уравнений даст, как уже было установлено, некоторое первое приближение в задаче о движении точки P в гравитационном поле произвольного неподвижного твердого тела.

Так как формулы рассматриваемой обобщенной задачи двух неподвижных центров несколько отличаются (впрочем, только обозначениями) от соответствующих формул обычной задачи двух неподвижных центров, рассмотренной в предыдущем параграфе, то полезно вывести все эти формулы непосредственно.

Обозначая через T живую силу движущейся точки, т. е. полагая

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{14.129}$$

мы можем опять рассматривать уравнения (14.128) как уравнения Лагранжа второго рода, что позволяет весьма просто перейти от прямоугольных координат x, y, z к каким угодно новым переменным, например, к эллипсоидальным координатам.

4. Введем вместо действительных переменных x, y, z новые действительные переменные λ, μ, w подстановкой

$$\left.\begin{aligned} x &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\cos w, \\ y &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\sin w, \\ z &= c\sigma + c\lambda\mu. \end{aligned}\right\} \tag{14.130}$$

Тогда формулы (14.127′) дают

$$r_1 = c(\lambda - \mu i), \quad r_2 = c(\lambda + \mu i), \tag{14.131}$$

откуда имеем также

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \mu = \frac{r_2 - r_1}{2i}. \tag{14.131′}$$

Подставляя в формулу (14.127) вместо r_1 и r_2 их выражения (14.131), мы получим без труда выражение силовой функции Ω в новых переменных:

$$\Omega = \frac{fm}{c}\frac{\lambda - \sigma\mu}{\lambda^2 + \mu^2}. \tag{14.132}$$

Это выражение оказывается д е й с т в и т е л ь н ы м, как это и должно быть.

Дифференцируя затем формулы (14.130) по времени t, имеем следующие выражения для составляющих скорости в новых переменных:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{c} &= \frac{\lambda\dot{\lambda}(1-\mu^2)-\mu\dot{\mu}(1+\lambda^2)}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}}\cos w - \\ &\qquad -\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\,\dot{w}\sin w, \\ \frac{\dot{y}}{c} &= \frac{\lambda\dot{\lambda}(1-\mu^2)-\mu\dot{\mu}(1+\lambda^2)}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}}\sin w + \\ &\qquad +\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\,\dot{w}\cos w, \\ \frac{\dot{z}}{c} &= \mu\dot{\lambda}+\lambda\dot{\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{14.133}$$

Подставляя эти выражения в (14.129), получим

$$T=\frac{c^2}{2}\left\{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}\dot{\lambda}^2+\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\dot{\mu}^2+(1+\lambda^2)(1-\mu^2)\dot{w}^2\right\}. \tag{14.134}$$

Определяя теперь обобщенные импульсы формулами

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}} = c^2\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}\dot{\lambda}, \\ \mu' &= \frac{\partial T}{\partial\dot{\mu}} = c^2\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\dot{\mu}, \\ w' &= \frac{\partial T}{\partial\dot{w}} = c^2(1+\lambda^2)(1-\mu^2)\dot{w}, \end{aligned}\right\} \tag{14.133'}$$

мы будем иметь также

$$T=\frac{1}{2c^2}\left\{\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}\lambda'^2+\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}\mu'^2+\frac{w'^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\right\}. \tag{14.134'}$$

Новые переменные

$$\lambda,\quad \mu,\quad w,\quad \lambda',\quad \mu',\quad w'$$

определятся канонической системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial\lambda'}, & \frac{d\mu}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial\mu'}, & \frac{dw}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial w'}, \\ \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial\lambda}, & \frac{d\mu'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial\mu}, & \frac{dw'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \tag{14.135'}$$

с характеристической функцией

$$H=T-\Omega, \tag{14.135}$$

где Ω и T определяются формулами (14.132) и (14.134').

Интегрирование системы (14.135) приводится, как известно, к решению соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби, которое напишется в виде

$$(1+\lambda^2)\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2+(1-\mu^2)\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)^2+\left[\frac{1}{1-\mu^2}-\frac{1}{1+\lambda^2}\right]\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2=$$
$$=2fmc(\lambda-\sigma\mu)+2hc^2(\lambda^2+\mu^2). \quad (14.136)$$

Полагая

$$S=S_1(\lambda)+S_2(\mu)+\alpha_3 w, \quad (14.136')$$

где α_3 есть произвольная постоянная, мы удовлетворим уравнению (14.136), выбирая функции S_1 и S_2 согласно следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}(1+\lambda^2)\left(\frac{dS_1}{d\lambda}\right)^2&=2hc^2\lambda^2+2fmc\lambda+\frac{\alpha_3^2}{1+\lambda^2}+2\alpha_2,\\ (1-\mu^2)\left(\frac{dS_2}{d\mu}\right)^2&=2hc^2\mu^2-2fmc\sigma\mu-\frac{\alpha_3^2}{1-\mu^2}-2\alpha_2,\end{aligned}\right\} \quad (14.136'')$$

где α_2 — новая произвольная постоянная.

Полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned}L(\lambda)&=2(1+\lambda^2)(hc^2\lambda^2+fmc\lambda+\alpha_2)+\alpha_3^2,\\ M(\mu)&=2(1-\mu^2)(hc^2\mu^2-fmc\sigma\mu-\alpha_2)-\alpha_3^2\end{aligned}\right\} \quad (14.137)$$

и интегрируя равенства (14.136″), мы найдем S_1 и S_2, а затем и нужное решение уравнения (14.136) в виде

$$S=\int\frac{\sqrt{L(\lambda)}\,d\lambda}{1+\lambda^2}+\int\frac{\sqrt{M(\mu)}\,d\mu}{1-\mu^2}+\alpha_3 w. \quad (14.138)$$

Зная S, найдем обычным способом общий интеграл канонической системы (14.135) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}}+\int\frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}=\frac{1}{c^2}(t+\beta_1),\\ &\int\frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}}-\int\frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}=\beta_2,\\ &\alpha_3\int\frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)\sqrt{L(\lambda)}}-\alpha_3\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)\sqrt{M(\mu)}}+w=\beta_3,\end{aligned}\right\} \quad (14.139)$$

$$\frac{\sqrt{L(\lambda)}}{1+\lambda^2}=\lambda', \quad \frac{\sqrt{M(\mu)}}{1-\mu^2}=\mu', \quad \alpha_3=w', \quad (14.139')$$

где β_1, β_2, β_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (14.139) и (14.139′) дают полное решение обобщенной задачи двух неподвижных центров, рассматриваемой как первое приближение задачи о движении в гравитационном поле тела M.

Рассматривая теперь величины α_k и β_k как функции времени, определяемые каноническими уравнениями $(\alpha_1=h)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt}&=+\frac{\partial R}{\partial\beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt}&=+\frac{\partial R}{\partial\beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt}&=+\frac{\partial R}{\partial\beta_3},\\ \frac{d\beta_1}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_3},\end{aligned}\right\} \tag{14.140}$$

где возмущающая функция

$$R=R_1+R_2 \tag{14.140'}$$

должна быть выражена через λ, μ, w при помощи формул (14.130), мы получим общее решение уравнений (14.114).