Часть первая

ОБЩИЕ МЕТОДЫ

Глава I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

В этой главе рассматриваются вкратце некоторые общие теоремы математического анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в дальнейшем часто будут применяться.

§ 1. Теорема Коши. Усиливающие функции

1. Рассмотрим некоторую функцию

$$X(x) = X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, конечную, непрерывную и однозначную при всех вещественных и комплексных значениях аргументов, удовлетворяющих условиям

$$|x_s| \leqslant A_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где A_s — отличные от нуля положительные постоянные.

Допустим, что X является *голоморфной функцией* в области (1.1), т. е. разложима в этой области в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по целым положительным степеням независимых переменных x_s.

Тогда мы можем написать

$$X = \sum P^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{1.2}$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$, удовлетворяющие условиям вида $m_1 + \ldots + m_n \geqslant \delta$ $(\delta = 0, 1, 2, \ldots)$.

Коэффициенты ряда (1.2) суть комплексные числа, полностью определяемые значениями частных производных функций X в начале координат.

Действительно, по теореме Тэйлора мы имеем

$$P^{(m_1, \ldots, m_n)} = \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} \left[\frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_n} X(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \right]_{x=0}. \tag{1.3}$$

Вместо точных значений коэффициентов ряда (1.2) мы будем пользоваться иногда некоторыми их оценками, получаемыми из одной теоремы Коши, которая формулируется следующим образом:

Теорема Коши. *Если M есть некоторый высший предел функции X при всевозможных комплексных значениях величин x_s, модули которых равны соответственно числам A_s, то справедливо следующее неравенство*:

$$\left| P^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| < \frac{M}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_n^{m_n}} \tag{1.4}$$

для всяких m_s, для которых $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \geqslant \delta$.

Доказательство. Так как значение x_s, модуль которой равен A_s, может быть представлено в виде $A_s e^{i\varphi_s}$ (e — неперово число, $i = \sqrt{-1}$, φ_s — любые вещественные числа), то по условию теоремы имеем неравенство

$$\left| X\left(A_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, A_n e^{i\varphi_n}\right) \right| = \left| X\left(Ae^{i\varphi}\right) \right| \leqslant M. \tag{1.5}$$

Но формула (1.2) дает

$$X\left(Ae^{i\varphi}\right) = \sum P^{(m_1, \ldots, m_n)} A_1^{m_1} e^{m_1 i\varphi_1} \ldots A_n^{m_n} e^{m_n i\varphi_n}, \tag{1.6}$$

причем этот ряд сходится абсолютно при любых вещественных значениях величин φ_s.

Замена i на $-i$ не изменит модулей величин x_s, а поэтому из равенства (1.6) имеем также

$$X\left(Ae^{-i\varphi}\right) = \sum \overline{P}^{\left(m_1', \ldots, m_n'\right)} A_1^{m_1'} e^{-m_1' i\varphi_1} \ldots A_n^{m_n'} e^{-m_n' i\varphi_n}, \tag{1.6'}$$

где для удобства дальнейшей выкладки индексы суммирования заменены другими.

Перемножая абсолютно сходящиеся ряды (1.6) и (1.6′), мы получим опять абсолютно сходящийся ряд

$$X\overline{X} = X\left(Ae^{i\varphi}\right) X\left(Ae^{-i\varphi}\right) =$$
$$= \sum P^{(m_1, \ldots, m_n)} \overline{P}^{\left(m_1', \ldots, m_n'\right)} A_1^{m_1 + m_1'} e^{i\left(m_1 - m_1'\right)\varphi_1} \ldots$$
$$\ldots A_n^{m_n + m_n'} e^{i\left(m_n - m_n'\right)\varphi_n},$$

который можно интегрировать по переменным φ_s в любых конечных пределах, после чего опять получим ряд абсолютно сходящийся.

Интегрируя по каждой из переменных φ_s в пределах от нуля до 2π, мы имеем

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X\bar{X}\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n =$$

$$= \sum P^{(m_1, \dots, m_n)} \bar{P}^{(m_1', \dots, m_n')} \prod_{s=1}^{n} A_s^{m_s+m_s'} \int_0^{2\pi} e^{i(m_s-m_s')\varphi_s}\, d\varphi_s.$$

Но каждый из интегралов равен нулю при $m_s' \neq m_s$ и равен 2π при $m_s' = m_s$, а поэтому предыдущее равенство приведется к виду

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |X(Ae^{i\varphi})|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_n = (2\pi)^n \sum |P^{(m_1, \dots, m_n)}|^2 A_1^{2m_1} \dots A_n^{2m_n},$$

откуда в силу (1.5) имеем следующее неравенство:

$$\sum |P^{(m_1, \dots, m_n)}|^2 A_1^{2m_1} \dots A_n^{2m_n} < M^2.$$

Так как все слагаемые левой части положительны, то имеем заведомо

$$|P^{(m_1, \dots, m_n)}|^2 A_1^{2m_1} \dots A_n^{2m_n} < M^2$$

для любых m_s, для которых $m_1 + \dots + m_n \geqslant \delta$.

Из последнего неравенства прямо следует неравенство (1.4), называемое *неравенством Коши*, и теорема доказана.

Примечание. Может случиться, что функция X зависит от времени t, оставаясь голоморфной по отношению к переменным x_s при всех значениях t, удовлетворяющих условию $|t - t_0| \geqslant 0$, где t_0 — постоянная.

Тогда, как видно из формулы (1.3), коэффициенты P также будут зависеть от t, а следовательно, A_s и M вообще тоже суть некоторые функции времени.

Однако если величины A_s при $|t - t_0| \geqslant 0$ никогда не обращаются в нули, а величина M остается конечной, то в неравенстве Коши можно взять вместо A_s их положительные низшие пределы, а вместо M его некоторый высший предел, вследствие чего (1.4) дадут постоянные высшие пределы для коэффициентов разложения функции $X(t|x)$.

2. Полученное неравенство Коши мы применим теперь для построения так называемых *усиливающих функций*, играющих важную роль в доказательствах некоторых теорем.

Пусть дана функция X, голоморфная в области (1.1), т. е. разложимая в этой области в абсолютно сходящийся ряд (1.2). Рассмотрим некоторую другую функцию $\hat{X}$ также голоморфную

в области (1.1) и представляемую рядом

$$\hat{X} = \sum \hat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{1.7}$$

коэффициенты которого суть положительные постоянные.

Если коэффициенты ряда (1.2) удовлетворяют при всевозможных значениях индексов m_s неравенствам

$$\left| P^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| \leqslant \hat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \tag{1.8}$$

то функция $\hat{X}$ называется *усиливающей* по отношению к функции X, а ряд (1.7) — *усиливающим рядом* для ряда (1.2)*).

Это соответствие между функциями X и $\hat{X}$ мы будем обозначать следующим образом:

$$X \ll \hat{X} \quad \text{или} \quad \hat{X} \gg X.$$

Теперь очевидно, что неравенство Коши дает возможность построить простейшую усиливающую функцию для X.

Действительно, пусть $\delta = 0$, и положим в (1.7)

$$\hat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} = \frac{M}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_n^{m_n}}.$$

Тогда, в силу неравенства Коши, неравенства (1.8) также будут удовлетворены для всех m_s, для которых $\sum m_s \geqslant 0$, а следовательно, функция $\hat{X}$, определяемая формулой

$$\hat{X} = \sum M \left(\frac{x_1}{A_1}\right)^{m_1} \left(\frac{x_2}{A_2}\right)^{m_2} \ldots \left(\frac{x_n}{A_n}\right)^{m_n} = \\ = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{A_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{A_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{A_n}\right)}, \tag{1.9}$$

заведомо будет одной из усиливающих функций для X.

Если $\delta = 1$, т. е. если $X(x)$ обращается в нуль в начале координат, то за усиливающую функцию можно взять

$$\hat{X} = M \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{A_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{A_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{A_n}\right)} - 1 \right\}. \tag{1.9'}$$

Наконец, если $\delta = 2$, т. е. если и сама функция X, и все ее первые частные производные обращаются в нуль в начале координат, то усиливающую функцию можно определить формулой

$$\hat{X} = M \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{A_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{A_n}\right)} - 1 - \frac{x_1}{A_1} - \ldots - \frac{x_n}{A_n} \right\}. \tag{1.9''}$$

---

*) Функция $\hat{X}$, усиливающая для X, называется также иногда мажорантной функцией (fonction majorante) для X или даже просто *мажорантой*.

Пусть теперь A есть наименьшее из всех A_s. Тогда функция

$$\hat{X} = \frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{A}\right)\left(1-\frac{x_2}{A}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n}{A}\right)} \tag{1.10}$$

также, очевидно, будет усиливающей для X, и притом более простой. Аналогичные, более простые, усиливающие функции можем вывести также из (1.9′) и (1.9″).

Усиливающие функции можно строить, конечно, и бесчисленным множеством других способов.

Сравнивая, например, два ряда

$$1+\left(\frac{x_1}{A_1}+\ldots+\frac{x_n}{A_n}\right)+\left(\frac{x_1}{A_1}+\ldots+\frac{x_n}{A_n}\right)^2+\ldots$$

и

$$\left(1+\frac{x_1}{A_1}+\frac{x_1^2}{A_1^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{x_2}{A_2}+\frac{x_2^2}{A_2^2}+\ldots\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1+\frac{x_n}{A_n}+\frac{x_n^2}{A_n^2}+\ldots\right),$$

после раскрытия всех скобок мы немедленно убедимся, что некоторые коэффициенты первого превышают соответствующие коэффициенты второго, откуда сейчас же следует, что функции

$$\frac{M}{1-\left(\frac{x_1}{A_1}+\frac{x_2}{A_2}+\ldots+\frac{x_n}{A_n}\right)},\quad \frac{M}{1-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}}$$

также будут усиливающими для функции X в случае $\delta=0$.

Точно так же функции

$$\frac{M\left(\frac{x_1}{A_1}+\frac{x_2}{A_2}+\ldots+\frac{x_n}{A_n}\right)}{1-\left(\frac{x_1}{A_1}+\frac{x_2}{A_2}+\ldots+\frac{x_n}{A_n}\right)},\quad \frac{M\,\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}}{1-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}}$$

будут усиливающими для функции X, обращающейся в нуль в начале координат, а функции

$$\frac{M\left(\frac{x_1}{A_1}+\frac{x_2}{A_2}+\ldots+\frac{x_n}{A_n}\right)^2}{1-\left(\frac{x_1}{A_1}+\frac{x_2}{A_2}+\ldots+\frac{x_n}{A_n}\right)},\quad \frac{M\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}\right)^2}{1-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}}$$

будут усиливающими для X в случае $\delta=2$.

3. Усиливающие функции обладают многими замечательными свойствами, часть которых полезно здесь отметить.

Рассмотрим сначала многочлен, аргументами которого являются некоторые из величин $P^{(m_1,\ldots,m_n)}$ и коэффициенты которого — вещественные положительные числа.

Обозначим такой многочлен символом

$$\Pi\{P^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\}, \tag{1.11}$$

где $\bar{m}_s$ — некоторые определенные значения индексов m_s, удовлетворяющих условию $\sum m_s \geqslant \delta$ ($\delta = 0, 1, 2, \ldots$).

Заменяя в (1.11) коэффициенты ряда (1.2) соответствующими коэффициентами ряда (1.7), мы получим многочлен

$$\Pi\{\hat{P}^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\} \tag{1.11'}$$

с теми же положительными коэффициентами, как и (1.11).

Так как многочлен (1.11) содержит конечное число членов, а модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых, то мы можем написать неравенство

$$|\Pi\{P^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\}| \leqslant \Pi\{|P^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}|\}.$$

Заменяя аргументы правой части этого неравенства величинами $\hat{P}^{(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)}$, мы в силу неравенств (1.8), справедливых для любых систем индексов, только усилим неравенство и получим следующее:

$$|\Pi\{P^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\}| \leqslant \Pi\{\hat{P}^{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n)}\}, \tag{1.12}$$

которое и выражает одно из тех свойств усиливающих функций, что мы хотели отметить.

Допустим теперь, что в результате некоторой процедуры мы получили ряд вида (1.2), о сходимости которого нам ничего заранее не известно.

Пусть нам удалось построить для ряда (1.2) усиливающий ряд (1.7). Таким образом, для любой системы индексов m_s ($\sum m_s \geqslant \delta$) выполняются неравенства (1.8). Тогда мы можем утверждать, что если построенный нами ряд сходится в некоторой области, определяемой условиями (1.1), то исследуемый ряд (1.2) заведомо будет абсолютно сходящимся в той же области.

Таким образом, нахождение или построение усиливающих функций может явиться полезным средством для исследования сходимости рядов, получаемых некоторой формальной процедурой.

Заметим еще, что в некоторых случаях усиливающий ряд с n переменными можно заменить рядом с одним-единственным переменным.

В самом деле, собирая в разложении функции X члены одной и той же степени m, мы можем переписать формулу (1.2) в следующем виде:

$$X = \sum_{m=\delta}^{\infty} X^{(m)} \qquad (\delta = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.13}$$

где

$$X^{(m)} = \sum P^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \tag{1.13'}$$

$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m)$ есть целая однородная функция степени m от величин x_s (*форма* m-*й степени*).

Совершенно таким же образом мы представим и функцию $\hat{X}$, усиливающую для X, так что имеем

$$\hat{X} = \sum_{m=\delta}^{\infty} \hat{X}^{(m)}, \tag{1.14}$$

где соответственно

$$\hat{X}^{(m)} = \sum \hat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{1.14'}$$

а соответствующие коэффициенты форм (1.13′) и (1.14′) удовлетворяют неравенствам (1.8).

Мы можем сказать, что форма $\hat{X}^{(m)}$ — усиливающая для формы $X^{(m)}$, т. е.

$$X^{(m)} \ll \hat{X}^{(m)}.$$

Отсюда следует, наоборот, что если для всякого $m \geqslant \delta$ форма $\hat{X}^{(m)}$ есть усиливающая функция для формы $X^{(m)}$, то и ряд (1.14) будет усиливающим для ряда (1.13).

Обозначим теперь через χ наибольшую из величин $|x_s|$ и рассмотрим ряд, расположенный по степеням положительной переменной

$$\hat{X}^* = \sum_{m=\delta}^{\infty} \hat{P}^*_m \chi^m \qquad (\delta = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.15}$$

где

$$\hat{P}^*_m = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} \hat{P}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}. \tag{1.15'}$$

Из предыдущего очевидно, что

$$\hat{P}^*_m \chi^m \gg \hat{X}^{(m)},$$

а поэтому также

$$\hat{X}^* \gg X,$$

т. е. мы можем считать ряд (1.15) усиливающим для функции X, определенной рядом (1.13).

§ 2. Теоремы о неявных функциях

1. Применим прежде всего усиливающие функции для доказательства нескольких важных теорем анализа, которыми далее нам придется пользоваться.

Сначала рассмотрим следующую теорему.