

где

$$X^{(m)} = \sum P^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \quad (1.13')$$

$(m_1 + m_2 + \dots + m_n = m)$  есть целая однородная функция степени  $m$  от величин  $x_s$  (форма  $m$ -й степени).

Совершенно таким же образом мы представим и функцию  $\hat{X}$ , усилывающую для  $X$ , так что имеем

$$\hat{X} = \sum_{m=\delta}^{\infty} \hat{X}^{(m)}, \quad (1.14)$$

где соответственно

$$\hat{X}^{(m)} = \sum \hat{P}^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}, \quad (1.14')$$

а соответствующие коэффициенты формы (1.13') и (1.14') удовлетворяют неравенствам (1.8).

Мы можем сказать, что форма  $\hat{X}^{(m)}$  — усилывающая для формы  $X^{(m)}$ , т. е.

$$X^{(m)} \ll \hat{X}^{(m)}.$$

Отсюда следует, наоборот, что если для всякого  $m \geq \delta$  форма  $\hat{X}^{(m)}$  есть усилывающая функция для формы  $X^{(m)}$ , то и ряд (1.14) будет усилывающим для ряда (1.13).

Обозначим теперь через  $\chi$  наибольшую из величин  $|x_s|$  и рассмотрим ряд, расположенный по степеням положительной переменной

$$\hat{X}^* = \sum_{m=\delta}^{\infty} \hat{P}_m^* \chi^m \quad (\delta = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.15)$$

где

$$\hat{P}_m^* = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \hat{P}^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}. \quad (1.15')$$

Из предыдущего очевидно, что

$$\hat{P}_m^* \chi^m \gg \hat{X}^{(m)},$$

а поэтому также

$$\hat{X}^* \gg X,$$

т. е. мы можем считать ряд (1.15) усилывающим для функции  $X$ , определенной рядом (1.13).

## § 2. Теоремы о неявных функциях

1. Применим прежде всего усилывающие функции для доказательства нескольких важных теорем анализа, которыми далее нам придется пользоваться.

Сначала рассмотрим следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть  $F(x, y)$  — заданная функция вещественных или комплексных переменных  $x$  и  $y$ , обращающаяся в нуль при  $x = y = 0$  и голоморфная при

$$|x| \leq A, \quad |y| \leq B.$$

Если  $F'_y(0, 0) \neq 0$ , то существует единственная функция  $y = f(x)$  ( $f'(0) = 0$ ), удовлетворяющая уравнению

$$F(x, y) = 0 \quad (1.16)$$

и голоморфная при  $|x| < a$ , где  $0 < a \leq A$ .

Пусть

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{m_1+m_2 \geq 1} P^{(m_1, m_2)} x^{m_1} y^{m_2} = \\ &= P^{(1, 0)} x + P^{(0, 1)} y + P^{(2, 0)} x^2 + P^{(1, 1)} x y + P^{(0, 2)} y^2 + \dots, \end{aligned}$$

причем  $P^{(0, 1)} \neq 0$ , так как по условию  $F'_y(0, 0) \neq 0$ .

Поэтому, полагая

$$P_{m_1, m_2} = -\frac{P^{(m_1, m_2)}}{P^{(0, 1)}},$$

можем написать уравнение (1.16) в виде

$$y = P_{1, 0} x + P_{2, 0} x^2 + P_{1, 1} x y + P_{0, 2} y^2 + \dots \quad (1.16')$$

Требуется доказать, что уравнению (1.16') удовлетворяет ряд

$$y = f(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots, \quad (1.17)$$

сходящийся абсолютно, пока  $|x|$  не превосходит некоторого положительного предела  $a$ .

Подставляя ряд (1.17) в равенство (1.16) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях равенства, мы получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= P_{1, 0}, \\ c_2 &= P_{2, 0} + c_1 P_{1, 1} + c_1^2 P_{0, 2}, \\ c_3 &= P_{3, 0} + c_1 P_{2, 1} + c_2 P_{1, 1} + c_1^2 P_{1, 2} + 2c_1 c_2 P_{0, 2} + c_1^3 P_{0, 3}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

из которых все  $c_k$  определяются последовательно, в порядке возрастания  $k$ , и притом единственным образом.

Легко видеть, что общее выражение для коэффициентов  $c_k$  представляет собой многочлен с целыми положительными коэффициентами относительно тех величин  $P_{\bar{m}_1, \bar{m}_2}$ , для которых  $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 \leq k$ .

Поэтому, применяя обозначение (1.11), можем написать

$$c_k = \Pi \{P_{\bar{m}_1, \bar{m}_2}\}. \quad (1.18')$$

Для доказательства сходимости ряда (1.17) построим сначала усиливающий ряд для ряда (1.16'). Из предыдущего следует, что за такой ряд можно взять разложение функции

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{A}\right)\left(1 - \frac{y}{B}\right)} - M - M \frac{y}{B} = \hat{P}_{1,0}x + \hat{P}_{2,0}x^2 + \hat{P}_{1,1}xy + \dots,$$

все коэффициенты которого положительны и таковы, что мы имеем  $|P_{m_1, m_2}| < \hat{P}_{m_1, m_2}$  для всех  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 + m_2 \geq 1$ ).

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение

$$Y = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{A}\right)\left(1 - \frac{Y}{B}\right)} - M - M \frac{Y}{B}, \quad (1.19)$$

решение которого также представим в виде ряда

$$Y = \hat{c}_1x + \hat{c}_2x^2 + \hat{c}_3x^3 + \dots, \quad (1.20)$$

коэффициенты которого определяются единственным образом такими же формулами, как и (1.18'), но дающими для всех  $\hat{c}_k$  только положительные значения.

Так как по свойству усиливающих функций

$$|\Pi\{P_{\bar{m}_1, \bar{m}_2}\}| \leq \Pi\{\hat{P}_{\bar{m}_1, \bar{m}_2}\},$$

то мы имеем для всех  $k$  неравенства  $|c_k| \leq \hat{c}_k$ , откуда следует, что если ряд (1.20) сходится при  $|x| < a$ , то ряд (1.17) будет абсолютно сходящимся при том же условии.

Но решение уравнения (1.19), обращающееся в нуль при  $x = 0$  определяется следующей очевидной формулой:

$$Y = \frac{B^2}{2(B+M)} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4M(B+M)}{B^2} \cdot \frac{x}{A-x}} \right\},$$

правая часть которой может быть разложена в ряд по степеням  $\frac{x}{A-x}$ , а следовательно, и по степеням  $x$ , если

$$\left| \frac{x}{A-x} \right| < \frac{B^2}{4M(B+M)},$$

то есть, если

$$|x| < \frac{A}{1 + \frac{4M(B+M)}{B^2}} = a < A.$$

Следовательно, ряд (1.17) заведомо будет сходиться абсолютно при  $|x| < a$ , и теорема доказана.

Примечание. Если функция  $F(x, y)$  есть многочлен относительно  $x$  и  $y$ , то она голоморфна при любых (конечных) значениях этих переменных, и теорема остается справедливой.

То же замечание относится к случаю, когда  $F(x, y)$  есть многочлен относительно одной из двух переменных.

2. Полученный результат обобщается на случай любого числа уравнений, что показывает следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть даны  $m$  функций  $F_s(y_\sigma | x_v)$  от  $m + n$  вещественных или комплексных переменных  $y_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, m$ ) и  $x_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ), уничтожающих при одновременном равенстве нулю всех аргументов и голоморфных при  $|x_v| \leq A_v$ ,  $|y_\sigma| \leq B_\sigma$ . Если якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \left\| \frac{\partial F_s}{\partial y_\sigma} \right\| \quad (1.21)$$

не обращается в нуль, когда все  $x$  и  $y$  делаются нулями, то существует единственная система функций  $y_s = f_s(x_v)$  от  $n$  переменных, обращающихся в нуль при  $x_1 = \dots = x_n = 0$ , голоморфных при  $|x_v| \leq a_v < A_v$  и удовлетворяющих уравнениям

$$F_s(y_\sigma | x_v) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m). \quad (1.22)$$

Это решение представляется рядами вида

$$y_s = \sum_{m_1 + \dots + m_n \geq 1} C_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}, \quad (1.23)$$

абсолютно сходящимися при  $|x_v| \leq a_v$ .

Напишем уравнения (1.22) в виде

$$\sum_{\sigma=1}^m p_{s\sigma} y_\sigma = \sum_{v=1}^n q_{sv} x_v + \dots, \quad (1.22')$$

где определитель  $\|p_{s\sigma}\|$  численно равен значению якобиана (1.21) в начале координат и, следовательно, отличен от нуля.

Вводя вместо  $y_s$  новые неизвестные  $z_s$  подстановкой

$$z_s = \sum_{\sigma=1}^m p_{s\sigma} y_\sigma, \quad (1.24)$$

мы преобразуем уравнения (1.22') к виду

$$z_s = \sum_{v=1}^n q_{sv} x_v + \dots, \quad (1.22'')$$

где невыписанные члены содержат  $x$  и  $z$  в степенях выше первой. Стараясь удовлетворить уравнениям (1.22'') рядами

$$z_s = \sum_{v=1}^n \bar{c}_{sv} x_v + \sum_{m_1 + \dots + m_n \geq 2} \bar{C}_s^{(m_1, \dots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}, \quad (1.24')$$

мы получим бесконечную последовательность равенств, определяющих коэффициенты этих рядов в порядке возрастания

суммы  $m_1 + \dots + m_n$  от единицы до бесконечности, причем  $\tilde{c}_{sv} = q_{sv}$ , а все коэффициенты порядка  $k = m_1 + \dots + m_n$  представляются многочленами с целыми положительными коэффициентами относительно тех коэффициентов рядов в (1.22''), порядок которых меньше чем  $k$ . Поэтому все коэффициенты рядов (1.24') определяются однозначно, и мы получим единственную систему рядов, удовлетворяющих формально уравнениям (1.22'').

После этого мы выведем из (1.24) единственную систему рядов (определитель  $\| p_{ss} \| \neq 0$ ), представляющих  $y_s$ , удовлетворяющих формально уравнениям (1.22).

Остается доказать сходимость полученных формальных рядов. Построим вспомогательные уравнения

$$Z_s = \sum_{v=1}^n \hat{q}_{sv} x_v + \dots \quad (s = 1, 2, \dots, m), \quad (1.25)$$

правые части которых — ряды, усиливающие для рядов (1.22'').

Тогда ряды, удовлетворяющие этим вспомогательным уравнениям, будут усиливающими для рядов (1.24'), и достаточно показать, что эти усиливающие ряды сходятся.

Из свойств усиливающих функций следует, что вспомогательные уравнения можно написать в виде

$$Z_s = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 + \dots + x_n}{A}\right)\left(1 - \frac{Z_1 + \dots + Z_m}{B}\right)} - M - M \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{B}, \quad (1.25')$$

где через  $A$  обозначена наименьшая из  $A_v$ , а  $B$  — наименьшая из величин  $\sum_{\sigma=1}^m |p_{s\sigma}| \cdot B_{\sigma}$ .

Полагая

$$Z = Z_1 + \dots + Z_m, \quad x = x_1 + \dots + x_n$$

и складывая все равенства (1.25'), мы получим единственное уравнение

$$Z = \frac{mM}{\left(1 - \frac{x}{A}\right)\left(1 - \frac{Z}{B}\right)} - mM - mM \frac{Z}{B} \quad (1.25'')$$

такого же вида, как и уравнение (1.19).

Поэтому решение уравнения (1.25''), обращающееся в нуль при  $x = 0$ , может быть представлено в виде ряда, расположенного по степеням  $x$ , сходящегося при условии

$$|x| \leqslant \frac{A}{1 + \frac{4mM(B + mM)}{B^2}} = a < A.$$

Так как все уравнения (1.25') совершенно одинаковы, то ясно, что  $Z_1 = \dots = Z_m = \frac{1}{m}Z$ , откуда следует, что каждое из  $Z_s$  представляется рядом, расположенным по степеням  $x$  и сходящимся при  $|x| < a$ . А отсюда вытекает, что все ряды (1.24'), удовлетворяющие уравнениям (1.22''), будут абсолютно сходящимися при  $|x_v| < \frac{a}{n}$ , а поэтому при тех же условиях будут абсолютно сходящимися также ряды (1.23), представляющие голоморфное решение системы уравнений (1.22).

3. Обратимся теперь к случаям более общим, чем те, которые мы рассмотрели выше.

Пусть опять дана функция  $F(x, y)$ , обращающаяся в нуль при  $x = y = 0$  и голоморфная при  $|x| \leq A, |y| \leq B$ .

Уравнение  $F(0, y) = 0$  имеет корень  $y = 0$  некоторой кратности. В теореме 1  $y = 0$  было однократным корнем и ему соответствовало единственное решение уравнения (1.16), обращающееся в нуль вместе с  $x$  и голоморфное по крайней мере при достаточно малых значениях  $|x|$ .

Теперь мы рассмотрим тот случай, когда 0 — корень кратности  $n (n > 1)$  уравнения  $F(0, y) = 0$ , т. е. когда все  $n - 1$  первые частные производные от  $F(x, y)$  по  $y$  обращаются в нуль в начале координат, но  $n$ -я производная не равна нулю при  $x = y = 0$ .

Тогда разложение  $F(x, y)$  можно представить в виде

$$F(x, y) = P_0 + P_1 y + \dots + P_n y^n + P_{n+1} y^{n+1} + \dots, \quad (1.26)$$

где  $P_i$  — ряды, расположенные по степеням  $x$ , из которых  $n$  первых равны нулю при  $x = 0$ , тогда как  $P_n$  не обращается в нуль при  $x = 0$ .

Может случиться, что все  $P_i$ , для которых  $i > n$ , тождественно равны нулю, так что  $F$  есть многочлен относительно  $y$ . Если же  $F$  — бесконечный ряд относительно  $y$ , то, как показал Вейерштрасс, существует такой многочлен

$$f(x, y) = y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1} y + p_n, \quad (1.27)$$

коэффициенты которого — голоморфные при  $|x| \leq A$  функции от  $x$ , обращающиеся в нуль при  $x = 0$ , что имеем

$$F(x, y) = f(x, y) \cdot H(x, y),$$

где  $H(x, y)$  — голоморфная при  $|x| \leq A, |y| \leq B$  функция, не обращающаяся в нуль при  $x = y = 0$ .

Отсюда следует, что уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (1.28)$$

имеет те же корни, обращающиеся в нуль при  $x = 0$ , как и уравнение

$$f(x, y) = 0, \quad (1.28')$$

которое является алгебраическим уравнением относительно  $y$  и имеет, следовательно, для всякого значения  $x$  ровно  $n$  корней.

Рассмотрим теперь уравнение (1.28'). Обозначим через  $\Delta(x)$  дискриминант этого уравнения, т. е. результат исключения  $y$  из двух уравнений  $f(x, y) = 0$  и  $f'_y(x, y) = 0$ .  $\Delta(x)$  есть целый многочлен относительно коэффициентов  $p_i$  и, следовательно, голоморфная функция в области точки  $x = 0$ . При  $x = 0$  дискриминант  $\Delta$  равен нулю, а так как нули голоморфной функции образуют систему изолированных точек, то мы можем взять такой круг  $C$  с центром в начале, чтобы внутри этого круга уравнение  $\Delta(x) = 0$  не имело другого корня, кроме  $x = 0$ .

Возьмем внутри  $C$  какую-либо точку  $x_0$ , отличную от начала координат, так что  $\Delta(x_0) \neq 0$ . Тогда уравнение  $f(x_0, y) = 0$  имеет  $n$  различных корней  $y_i(x_0)$ , стремящихся к нулю вместе с  $x_0$ . Пусть точка  $x$  описывает петлю вокруг точки  $O$ , выходя из точки  $x_0$ .

Вдоль этой петли  $n$  корней  $y_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) уравнения (1.28') различны и изменяются непрерывно. Выходя из точки  $x_0$  с корнем  $y_1(x_0)$ , например, и следуя за непрерывным изменением этого корня вдоль петли, мы получим после такого обхода значение, опять удовлетворяющее уравнению  $f(x_0, y) = 0$ . Следовательно, или  $y_1(x_0)$  после обхода опять вернется к прежнему значению и функция  $y_1(x)$  окажется однозначной и конечной функцией  $x$  в области нуля, или после обхода  $y_1(x_0)$  перейдет в какую-то другую функцию  $y_i(x_0)$ .

В этом случае, обходя несколько раз подряд вокруг нуля, мы необходимо придем к первоначальному значению  $y_1(x_0)$ .

Пусть это случится после  $r$  обходов вокруг нуля. Тогда  $r$  корней  $y_1, y_2, \dots, y_r$  переставляются в круговом порядке, когда  $x$  описывает петлю вокруг начала, и мы скажем, что эти  $r$  корней образуют круговую систему, или цикл. Если  $r = n$ , то  $n$  корней образуют единственную круговую систему, а если  $r < n$ , то мы повторим предыдущие рассуждения, исходя от одного из остающихся корней и т. д., пока не исчерпаем все корни.

В результате приходим к следующему предложению.

*Корни уравнения  $f(x, y) = 0$ , обращающиеся в нуль при  $x = 0$ , образуют в круге  $C$  одну или несколько круговых систем.*

Чтобы это предложение было вполне общим, достаточно условиться, что цикл может состоять только из одного корня, который в этом случае есть однозначная функция от  $x$  в области  $x = 0$ .

Корни одной и той же круговой системы  $y_1, y_2, \dots, y_p$  можно представить одним общим разложением.

Положим  $x = x'^p$ . Каждый из корней цикла есть голоморфная функция от  $x'$  при всех значениях  $x'$ , кроме  $x' = 0$ ; с другой стороны, когда  $x'$  описывает петлю вокруг точки  $x' = 0$ , точка  $x$  описывает  $p$  последовательных петель в том же направлении вокруг начала.

Следовательно, каждый из корней цикла возвращается к своему начальному значению и есть однозначная функция от  $x'$  в области  $x' = 0$ . Так как эти корни стремятся к нулю вместе с  $x'$ , то точка  $x' = 0$  может быть только обыкновенной точкой. Поэтому эти корни будут голоморфными функциями от  $x'$  и, следовательно, представляются разложением вида

$$y = c_1 x' + c_2 x'^2 + \dots + c_k x'^k + \dots \quad (1.29)$$

Заменяя  $x'$  через  $x^{\frac{1}{p}}$ , будем иметь разложение

$$y = c_1 x^{\frac{1}{p}} + c_2 x^{\frac{2}{p}} + \dots + c_k x^{\frac{k}{p}} + \dots; \quad (1.29')$$

подставляя сюда различные значения корня  $\sqrt[p]{x}$ , получим все  $p$  корней, образующих цикл.

Полагая для этого

$$\lambda_p = \sqrt[p]{1} = e^{\frac{2q\pi i}{p}} \quad (q = 1, 2, \dots, p),$$

будем иметь разложение всех корней цикла в виде

$$y_q = c_1 \lambda_p^q x^{\frac{1}{p}} + c_2 \lambda_p^{2q} x^{\frac{2}{p}} + \dots + c_k \lambda_p^{kq} x^{\frac{k}{p}} + \dots \quad (1.29'')$$

Формулы (1.29'') определят также корни одного и того же цикла и уравнения (1.28).

Чтобы показать, как можно распределить  $n$  корней уравнения (1.28) в круговые системы и как вычислить коэффициенты разложений (1.29''), рассмотрим один достаточно общий случай, когда частная производная  $F'_x(x, y)$  не обращается в нуль при  $x = y = 0$ . Тогда разложение  $F(x, y)$  обязательно содержит член первой степени относительно  $x$ , и мы можем написать уравнение (1.28) в виде

$$F(x, y) = Ax + By^n + \dots = 0 \quad (AB \neq 0), \quad (1.30)$$

где невыписанные члены делятся на один из множителей  $x^2, xy, y^{n+1}$ . Примем временно в уравнении (1.30) за неизвестную функцию величину  $x$ . Тогда, так как  $F'_x(0, 0) \neq 0$ , то относительно  $x$  выполнены условия теоремы 1, и мы можем, следовательно, утверждать, что уравнение (1.30) имеет единствен-

ный корень  $x$ , стремящийся к нулю вместе с  $y$  и голоморфный в области начала координат.

Определяя коэффициенты разложения этого корня по способу неопределенных коэффициентов, мы убедимся, что  $n - 1$  первых коэффициентов суть нули и что, следовательно, мы имеем

$$x = y^n(a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots) \quad (a_0 \neq 0). \quad (1.30')$$

Извлекая корень  $n$ -й степени из левой и правой частей равенства, мы получим

$$x^{\frac{1}{n}} = y \sqrt[n]{a_0 + a_1y + \dots} = b_1y + b_2y^2 + \dots \quad (b_1 \neq 0).$$

Обращая ряд и давая  $\sqrt[n]{x}$  все его  $n$  значений, мы получим разложение  $y$  по степеням величины  $x^{\frac{1}{n}}$  в виде

$$y = c_1 \lambda_n^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} + c_2 \lambda_n^{\frac{2}{n}} x^{\frac{2}{n}} + \dots + c_k \lambda_n^{\frac{k}{n}} x^{\frac{k}{n}} + \dots, \quad (1.31)$$

где  $\lambda_n = \sqrt[n]{1}$ . Этот ряд представляет  $n$  корней уравнения (1.30), стремящихся к нулю вместе с  $x$ .

4. Изложенное можно обобщить на случай какого угодно числа уравнений с несколькими независимыми переменными. Мы ограничимся рассмотрением следующего случая.

Пусть имеем систему  $m$  уравнений вида

$$F_s(y_\sigma | x) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m), \quad (1.32)$$

где по-прежнему все  $F_s$  — голоморфные функции в области начала, обращающиеся в нуль при одновременном равенстве нулю всех своих аргументов, и где  $x$  — единственная независимая переменная.

Выписывая только члены первой степени в разложениях функций  $F_s$ , мы представим систему (1.32) в виде

$$F_s(y_\sigma | x) = \sum_{\sigma=1}^m p_{s\sigma} y_\sigma + p_s x + \dots = 0, \quad (1.32')$$

а поэтому

$$\left[ \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right]_0 = \|p_{s\sigma}\| = \Delta.$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то по теореме 2 уравнения (1.32) имеют единственное решение, стремящееся к нулю вместе с  $x$  и определяемое рядами

$$y_s = c_s^{(1)} x + c_s^{(2)} x^2 + \dots + c_s^{(k)} x^k + \dots,$$

абсолютно сходящимися по крайней мере при достаточно малых значениях  $|x|$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $\Delta = 0$ , но среди первых миноров якобиана есть по крайней мере один, не обращающийся в нуль при равенстве нулю всех аргументов.

Не нарушая общности, можем считать, что этот минор есть якобиан первых  $m - 1$  функций по переменным  $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ , так что

$$\left[ \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{m-1})}{D(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})} \right]_0 = \Delta_1 \neq 0.$$

Переписав уравнения (1.32') в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{m-1} p_{s\sigma} y_\sigma + p_{sm} y_m + p_s x + \dots = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m-1), \quad (1.33)$$

$$\sum_{\sigma=1}^m p_{m\sigma} y_\sigma + p_m x + \dots = 0, \quad (1.33')$$

мы видим, что система (1.33), в которой  $y_m$  рассматривается как независимая переменная наравне с  $x$ , удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, имеет единственное голоморфное решение, уничтожающееся при  $x = y_m = 0$ .

В этом решении

$$y_s = \varphi_s(y_m, x) \quad (s = 1, 2, \dots, m-1); \quad (1.34)$$

$\varphi_s(y_m, x)$  — ряды, расположенные по целым степеням  $y_m$  и  $x$ , абсолютно сходящиеся в области начала координат.

Подставляя полученные выражения для  $y_s$  в уравнение (1.33'), мы получим уравнение с двумя переменными вида

$$F(y_m, x) = 0, \quad (1.34')$$

левая часть которого голоморфна относительно  $y_m$  и  $x$  и обращается в нуль при  $y_m = x = 0$ . Кроме того, легко проверить, что  $F'_{y_m}(0, 0) = 0$ , вследствие чего мы можем утверждать, что  $y_m$ , удовлетворяющая этому уравнению и обращающаяся в нуль

вместе с  $x$ , есть голоморфная функция от  $x^{\frac{1}{p}}$ , где  $p$  — целое число, не меньшее чем 2.

Поэтому в силу равенств (1.34) все остальные  $y_s$  также выйдут голоморфными функциями от  $x^{\frac{1}{p}}$  ( $p \geq 2$ ).

Подобным же образом можно рассмотреть и более сложные случаи, в которых не только  $\Delta$ , но и все миноры якобиана до некоторого порядка  $k - 1$  включительно обращаются в нуль в начале координат, а среди миноров  $\Delta_k$  есть хотя бы один, отличный от нуля.

Во всех случаях такого рода система (1.32) будет иметь не одно, а множество решений (конечное число!), обращающихся в нуль вместе с  $x$ . В любом из таких решений  $y_s$  будут голоморфными функциями некоторой дробной степени  $x^{\frac{1}{p}}$  независимой переменной и представляться рядами вида

$$y_s = c_s^{(1)}x^{\frac{1}{p}} + c_s^{(2)}x^{\frac{2}{p}} + \dots + c_s^{(l)}x^{\frac{l}{p}} + \dots, \quad (1.35)$$

абсолютно сходящимися по крайней мере в достаточно малой окрестности начала координат.

**П р и м е ч а н и е.** Во всех рассуждениях и выводах этого параграфа все переменные могут принимать как вещественные, так и комплексные значения. Точно так же и коэффициенты рядов, как данных (левые части уравнений), так и искомых (неизвестные функции), могут быть какими угодно комплексными числами.

Однако иногда мы будем иметь дело с уравнениями, все коэффициенты которых — вещественные числа, и нас тогда будут интересовать вещественные значения неизвестных функций, соответствующие вещественным значениям независимых переменных.

Поэтому в каждом таком случае нужно будет дополнительно проверять, что получающиеся решения оказываются на самом деле вещественными. Такая проверка основывается обычно на простых соображениях. Если, например, наша задача заключается в нахождении действительного корня уравнения (1.28'), все коэффициенты которого — вещественные функции вещественной переменной, то мы можем утверждать, что при нечетном  $n$  это уравнение обязательно будет иметь по крайней мере один вещественный корень, стремящийся к нулю вместе с  $x$ . Этот корень представится поэтому действительным рядом с вещественными коэффициентами.

### § 3. Системы линейных дифференциальных уравнений

#### 1. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma} x_\sigma \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (1.36)$$

коэффициенты которых  $p_{s\sigma}$  — заданные функции времени, однозначные и непрерывные для всякого значения  $t$ , удовлетворяющего условию  $|t - t_0| \geqslant 0$ .

Применим для интегрирования системы (1.36) способ, предложенный А. М. Ляпуновым, для чего заменим уравнения (1.36)