Во всех случаях такого рода система (1.32) будет иметь не одно, а множество решений (конечное число!), обращающихся в нуль вместе с x. В любом из таких решений y_s будут голоморфными функциями некоторой дробной степени $x^{\frac{1}{p}}$ независимой переменной и представятся рядами вида

$$y_s = c_s^{(1)} x^{\frac{1}{p}} + c_s^{(2)} x^{\frac{2}{p}} + \ldots + c_s^{(l)} x^{\frac{l}{p}} + \ldots, \qquad (1.35)$$

абсолютно сходящимися по крайней мере в достаточно малой окрестности начала координат.

Примечание. Во всех рассуждениях и выводах этого параграфа все переменные могут принимать как вещественные, так и комплексные значения. Точно так же и коэффициенты рядов, как данных (левые части уравнений), так и искомых (неизвестные функции), могут быть какими угодно комплексными числами.

Однако иногда мы будем иметь дело с уравнениями, все коэффициенты которых — вещественные числа, и нас тогда будут интересовать вещественные значения неизвестных функций, соответствующие вещественным значениям независимых переменных.

Поэтому в каждом таком случае нужно будет дополнительно проверять, что получающиеся решения оказываются на самом деле вещественными. Такая проверка основывается обычно на простых соображениях. Если, например, наша задача заключается в нахождении действительного корня уравнения (1.28′), все коэффициенты которого — вещественные функции вещественной переменной, то мы можем утверждать, что при нечетном n это уравнение обязательно будет иметь по крайней мере один вещественный корень, стремящийся к нулю вместе с x. Этот корень представится поэтому действительным рядом с вещественными коэффициентами.

§ 3. Системы линейных дифференциальных уравнений

1. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.36)$$

коэффициенты которых $p_{s\sigma}$ — заданные функции времени, однозначные и непрерывные для всякого значения t, удовлетворяющего условию $|t - t_0| \geqslant 0$.

Применим для интегрирования системы (1.36) способ, предложенный А. М Ляпуновым, для чего заменим уравнения (1.36)

следующими:

$$\dot{x}_s = \alpha \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.36'}$$

где α — вспомогательный параметр.

Пусть $x_s^{(0)}$ — заданные начальные значения величин x_s, соответствующие $t = t_0$ (t_0 — начальный момент).

Будем стараться удовлетворить уравнениям (1.36′) рядами, расположенными по степеням α, следующего вида:

$$x_s = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x_s^{(k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.37}$$

где $x_s^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — неизвестные функции, обращающиеся в нуль при $t = t_0$.

Подставляя ряды (1.37) в уравнения (1.36′) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α слева и справа, мы получим следующие системы уравнений:

$$\dot{x}_s^{(1)} = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma^{(0)}, \ldots, \qquad \dot{x}_s^{(k)} = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma^{(k-1)}, \ldots,$$

из которых функции $x_s^{(k)}$ определяются последовательно в порядке возрастания k при помощи квадратур

$$x_s^{(1)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{s\sigma} x_\sigma^{(0)}\, dt, \ldots, \quad x_s^{(k)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{s\sigma} x_\sigma^{(k-1)}\, dt, \ldots \tag{1.38}$$

Из этих формул следует, что все функции $x_s^{(k)}$ — непрерывные функции t, обращающиеся в нуль при $t = t_0$.

Остается доказать сходимость рядов, коэффициенты которых определяются формулами (1.38). Для этого обозначим через p постоянное положительное число, большее всех значений, которые может принимать модуль каждой из функций $p_{s\sigma}$ при $|t - t_0| \geqslant 0$, и через $x^{(0)}$ наибольшую из величин $|x_s^{(0)}|$.

Тогда из формул (1.38) выводим последовательно

$$|x_s^{(k)}| \leqslant n^k p^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} x^{(0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Но ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^k p^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} \alpha^k,$$

представляющий разложение функции $e^{\alpha n p |t - t_0|}$, сходится, как известно, для всякого значения t и при любом α.

Поэтому все ряды (1.37) будут абсолютно сходящимися при всяком t и при любом α и будут представлять решение системы (1.36′) с начальными условиями $x_s^{(0)}$.

Полагая теперь в рядах (1.37) $\alpha = 1$, мы получим абсолютно сходящиеся ряды

$$x_s = \sum_{k=0}^{\infty} x_s^{(k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.39}$$

удовлетворяющие уравнениям (1.36). Эти ряды и представляют общее решение системы (1.36), содержащее n произвольных постоянных $x_s^{(0)}$.

Легко видеть, что все функции $x_s^{(k)}$ $(k > 1)$ суть линейные функции величин $x_s^{(0)}$, а поэтому формулы (1.39) можно представить в следующем виде:

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma^{(0)} x_{s\sigma}, \tag{1.39′}$$

где n^2 функций $x_{s\sigma}$ образуют систему n независимых решений системы (1.36), удовлетворяющих условиям

$$x_{ss}(t_0) = 1, \qquad x_{s\sigma}(t_0) = 0 \qquad (\sigma \neq s).$$

Все эти функции, легко получаемые при помощи формул (1.38), представляются рядами, абсолютно сходящимися для всякого t. Если ввести символ 1_s^σ, полагая

$$1_s^s = 1, \qquad 1_s^\sigma = 0 \qquad (\sigma \neq s),$$

то эти ряды можно написать следующим образом:

$$x_{s\sigma} = 1_s^\sigma + \sum_{k=1}^{\infty} p_{s\sigma}^{(k)}, \tag{1.40}$$

где функции $p_{s\sigma}^{(k)}$ определяются последовательно в порядке возрастания k следующими формулами:

$$p_{s\sigma}^{(1)} = \int_{t_0}^{t} p_{s\sigma}\, dt, \ \ldots, \qquad p_{s\sigma}^{(k)} = \sum_{r=1}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{sr} p_{r\sigma}^{(k-1)}\, dt, \ \ldots \tag{1.40′}$$

Из формул (1.39′) можно получить и другие, содержащие не начальные значения $x_s^{(0)}$, а некоторые другие произвольные постоянные. Действительно, выберем каким-нибудь способом n систем начальных значений $x_{sr}^{(0)}$ при единственном условии, что определитель, элементами которого являются эти числа, не равен нулю. Каждой такой системе чисел $x_{sr}^{(0)}$ соответствует некоторое частное решение системы (1.36), определяемое

формулами

$$\hat{x}_{sr}(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} x_{\sigma r}^{(0)} x_{s\sigma}(t).$$

Определитель $\| \hat{x}_{sr}(t) \|$ не равен тождественно нулю, так как, очевидно, $\| \hat{x}_{sr}(t_0) \| = \| x_{sr}^{(0)} \|$, что не равно нулю по условию. Следовательно, функции $\hat{x}_{\sigma r}(t)$ также образуют систему n линейно независимых решений уравнений (1.36), а поэтому, обозначая через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвольные постоянные, мы можем написать общее решение системы (1.36) еще в следующем виде:

$$x_s = \sum_{r=1}^{n} a_r \hat{x}_{sr} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.41}$$

Выведем теперь одну важную формулу, называемую обычно *формулой Лиувилля*. Для этого найдем производную по t от определителя $\Delta = \| \hat{x}_{s\sigma} \|$, дифференцируя последовательно строки определителя и используя при этом тождества

$$\frac{d\hat{x}_{s\sigma}}{dt} \equiv \sum_{r=1}^{n} p_{sr} \hat{x}_{r\sigma}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, получим соотношение

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \sum_{s=1}^{n} p_{ss},$$

откуда интегрированием получаем искомую формулу Лиувилля

$$\Delta = \Delta_0 e^{\int_{t_0}^{t} (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})\, dt}, \tag{1.42}$$

где $\Delta_0 = \Delta(t_0)$. Если за произвольные постоянные взяты начальные значения $x_s^{(0)}$, то $\hat{x}_{s\sigma} \equiv x_{s\sigma}$, а следовательно, $\Delta_0 = \| 1_s^{\sigma} \| = 1$.

Примечание. Иногда более удобно записывать систему (1.36) в векторной или в матричной форме. Пусть

$$P(t) = \| p_{s\sigma}(t) \|$$

есть матрица n-го порядка, составленная из коэффициентов уравнений (1.36), и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть матрица из одного столбца (вектор) с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда система (1.36) запишется следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x,$$

и это уравнение называется *векторным*.

Всякую матрицу, столбцами которой являются n линейно независимых решений системы (1.36), называют *интегральной матрицей* этой системы. Так, матрицы $X(t) = \| x_{s\sigma}(t) \|$ и $\hat{X}(t) = \| \hat{x}_{s\sigma}(t) \|$ являются интегральными.

Так как каждый столбец матрицы X (или $\hat{X}$) удовлетворяет векторному уравнению, то интегральная матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X \quad \left(\text{или } \frac{d\hat{X}}{dt} = P(t)\hat{X}\right),$$

которое и называется *матричным уравнением*. Зная интегральную матрицу X или $\hat{X}$, мы можем написать общее решение системы (1.36) в следующем виде:

$$x = Xx^{(0)} \quad \text{или} \quad x = \hat{X}a,$$

где $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — начальный вектор и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — вектор, компонентами которого являются произвольные постоянные. Заметим еще, что, разрешая предыдущие равенства относительно $x^{(0)}$ или a, мы получим *общий интеграл* системы (1.36) в виде

$$X^{-1}x = x^{(0)} \quad \text{или} \quad \hat{X}^{-1}x = a,$$

где X^{-1} (соответственно $\hat{X}^{-1}$) — обратная матрица.

2. Формулы (1.39) и (1.40) пригодны, конечно, и для того случая, когда все $p_{s\sigma}$ — величины постоянные, и представляют тогда решение системы (1.36), как легко проверить, в виде рядов, расположенных по степеням $t - t_0$, абсолютно сходящихся при всяком t. Действительно, при постоянных $p_{s\sigma}$ формулы (1.40′) дают:

$$p_{s\sigma}^{(1)} = p_{s\sigma}(t - t_0); \quad p_{s\sigma}^{(k)} = \tilde{p}_{s\sigma}^{(k)} \frac{(t - t_0)^k}{k!},$$

где все $\tilde{p}_{s\sigma}^{(k)}$ — постоянные, определяемые последовательно следующими формулами:

$$\tilde{p}_{s\sigma}^{(2)} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}p_{r\sigma}; \quad \tilde{p}_{s\sigma}^{(k)} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}\tilde{p}_{r\sigma}^{(k-1)}.$$

Формулы (1.40) примут в этом случае следующий вид:

$$x_{s\sigma} = 1_s^\sigma + p_{s\sigma}(t - t_0) + \tilde{p}_{s\sigma}^{(2)} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \ldots + \tilde{p}_{s\sigma}^{(k)} \frac{(t - t_0)^k}{k!} + \ldots \tag{1.40″}$$

Эти формулы могут служить для непосредственного вычисления функций $x_{s\sigma}$, т. е. для непосредственного интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и особенно удобны для числовых вычислений при помощи электронных вычислительных машин. Но для решения

уравнений с постоянными коэффициентами в буквенном виде, что часто необходимо, нужно уметь выразить общее решение системы с постоянными коэффициентами через элементарные функции, как это и излагается в известных учебниках. Напомним основные результаты этой теории.

Решение системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами можно искать в виде

$$x_s = K_s e^{\varkappa t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.43}$$

где K_s и $\varkappa$ — некоторые постоянные.

Подставляя (1.43) в уравнения (1.36), найдем условия

$$p_{s1}K_1 + \ldots + (p_{ss} - \varkappa) K_s + \ldots + p_{sn}K_n = 0.$$

Для того чтобы не все K_s были равны нулю, необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при K_s, был равен нулю, откуда следует, что постоянная $\varkappa$ должна быть корнем следующего алгебраического уравнения:

$$P - \varkappa E = 0, \tag{1.44}$$

где $E = \| 1_s^\sigma \|$ — единичная матрица.

Следуя А. М. Ляпунову, мы будем называть (1.44) *определяющим уравнением* (характеристическим — по другой терминологии), а определитель, представляющий его левую часть, — *основным*.

Обозначая этот определитель через $D(\varkappa)$, мы имеем

$$D(\varkappa) = p_0\varkappa^n + p_1\varkappa^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\varkappa + p_n, \tag{1.44'}$$

где $p_0 = (-1)^n$, $p_n = \| p_{s\sigma} \|$, а всякий другой коэффициент p_k равен $(-1)^{n-k}$, помноженной на сумму всех миноров k-го порядка определителя $\| p_{s\sigma} \|$.

Каждому корню $\varkappa_\sigma$ определяющего уравнения соответствуют определенные значения постоянных $K_{s\sigma}$, и когда уравнение (1.44) имеет только простые корни $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, то получим n решений вида (1.43), которые будут линейно независимыми. Поэтому общее решение системы представится в виде

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} a_\sigma K_{s\sigma} e^{\varkappa_\sigma t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.45}$$

Решая уравнения (1.45) относительно величин $a_s e^{\varkappa_s t}$, мы получим следующие равенства, представляющие общий интеграл

$$K a_s e^{\varkappa_s t} = \sum_{\sigma=1}^{n} \bar{K}_{\sigma s} x_\sigma, \tag{1.45'}$$

где $\bar{K}_{s\sigma}$ — алгебраические дополнения элементов $K_{s\sigma}$ определителя $K = \| K_{s\sigma} \|$. Из (1.45′) найдем также

$$a_s = \frac{1}{K} e^{-\varkappa_s t_0} \sum_{\sigma=1}^{n} \bar{K}_{\sigma s} x_\sigma^{(0)},$$

а подставляя эти выражения в (1.45), получим

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma^{(0)} x_{s\sigma}, \tag{1.45''}$$

где $x_{s\sigma}$ — элементы матрицы X, определяемые формулами

$$x_{s\sigma} = \frac{1}{K} \sum_{r=1}^{n} \bar{K}_{\sigma r} K_{sr} e^{\varkappa_r (t-t_0)}.$$

Заметим, что во всех приведенных формулах мы не различаем случаев вещественных и комплексных корней определяющего уравнения, так что при наличии последних и когда все $p_{s\sigma}$ суть вещественные постоянные, формулы (1.45), (1.45′) и (1.45″) нужно еще привести к действительному виду.

Если определяющее уравнение имеет кратные корни, то уравнения (1.36) вообще будут иметь решения вида

$$x_s = f_s(t) e^{\varkappa t}, \tag{1.46}$$

где $f_s(t)$ — многочлены относительно t, степени которых не выше числа, на единицу меньшего кратности корня.

Если решения типа (1.43) рассматривать как частные случаи решений вида (1.46) (когда $f_s(t)$ — постоянные), то каждому корню кратности μ будет соответствовать μ независимых решений вида (1.46). Притом, если в числе этих решений находится такое, в котором степени по крайней мере некоторых из функций $f_s(t)$ достигают своего высшего предела $\mu - 1$, то, исходя из этого решения, можем получить все μ независимых решений, соответствующих корню $\varkappa$, заменой функций $f_s(t)$ их производными по t от нулевого до $(\mu - 1)$-го порядка включительно.

Мы будем говорить, что в этом случае корню $\varkappa$ соответствует одна группа решений. Случай этот представится всякий раз, когда рассматриваемый μ-кратный корень не обращает в нуль по крайней мере один из первых миноров основного определителя $D(\varkappa) = \| p_{s\sigma} - 1_s^\sigma \varkappa \|$.

Может случиться, что μ-кратный корень обращает в нуль все миноры $D(\varkappa)$ до $k - 1$-го порядка включительно, не обращая в нуль по крайней мере один из миноров k-го порядка. Тогда этому корню будут соответствовать k групп независимых

решений, составленных подобно предыдущей. Высшим пределом для числа k служит μ. Этот высший предел может достигаться, и тогда все решения, соответствующие корню $\varkappa$, будут типа (1.43) (т. е. не будут иметь множителями степень t).

Пусть вообще определяющее уравнение имеет ν различных корней $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$, кратности которых суть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$, так что $\sum_{\sigma=1}^{\nu} \mu_\sigma = n$. Пусть каждому корню $\varkappa_\sigma$ кратности μ_σ соответствует k_σ групп независимых решений и каждая из этих групп содержит соответственно $l_1^{(\sigma)}, \ldots, l_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ решений.

Основное решение в каждой из этих групп имеет вид

$$f_{1,\sigma}(t)\, e^{\varkappa_\sigma t}, \quad f_{2,\sigma}(t)\, e^{\varkappa_\sigma t}, \quad \ldots, \quad f_{n,\sigma}(t)\, e^{\varkappa_\sigma t},$$

где $f_{s,\sigma}(t)$ — многочлены, степени которых не выше чем $l_r^{(\sigma)} - 1$, а каждое из остальных решений, входящих в ту же группу, будет

$$f_{1,\sigma}^{(i)}(t)\, e^{\varkappa_\sigma t}, \quad f_{2,\sigma}^{(i)}(t)\, e^{\varkappa_\sigma t}, \quad \ldots, \quad f_{n,\sigma}^{(i)}(t)\, e^{\varkappa_\sigma t}$$

((i) обозначает число дифференцирований по t).

Общее решение системы (1.36) имеет вид ($P = \text{const}$)

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{\nu} e^{\varkappa_\sigma t} \sum_{r=1}^{k_\sigma} \sum_{i=1}^{l_r^{(\sigma)}-1} C_{\sigma r}^{(i)} f_{s,\sigma}^{(i)}(t), \tag{1.46'}$$

где $C_{\sigma r}^{(i)}$ обозначают n произвольных постоянных.

Рассмотрим отдельно случай, когда предложенные линейные уравнения имеют каноническую форму. Обозначая неизвестные через x_s и y_s ($s = 1, 2, \ldots, n$) и через H_2 — характеристическую функцию, мы напишем уравнения в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial y_s}, \quad \frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_s}, \tag{1.47}$$

где H_2 — однородный многочлен второй степени относительно x_s и y_s (квадратичная форма), так что

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum A_{s\sigma} x_s x_\sigma + \frac{1}{2} \sum B_{s\sigma} y_s y_\sigma + \sum C_{s\sigma} x_s y_\sigma, \tag{1.48}$$

где все коэффициенты A, B, C — постоянные, удовлетворяющие условиям $A_{s\sigma} = A_{\sigma s}$, $B_{s\sigma} = B_{\sigma s}$.

Напишем уравнения (1.47) в раскрытом виде, т. е.:

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} (C_{\sigma s} x_\sigma + B_{\sigma s} y_\sigma), \quad \dot{y}_s = -\sum_{\sigma=1}^{n} (A_{s\sigma} x_\sigma + C_{s\sigma} y_\sigma), \tag{1.47'}$$

и предположим, что все коэффициенты суть вещественные постоянные. Рассмотрим основной определитель системы (1.47'),

который есть определитель порядка $2n$, считая, что переменные располагаются в порядке $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Тогда можем написать $D(\varkappa)$ в виде

$$D(\varkappa) = (-1)^n \begin{vmatrix} \|C_{\sigma s} - 1_\sigma^s \varkappa\| & \|B_{\sigma s}\| \\ \|A_{s\sigma}\| & \|C_{s\sigma} + 1_s^\sigma \varkappa\| \end{vmatrix}. \qquad (1.48')$$

Легко убедиться в том, что в силу свойств постоянных A и B определитель $D(\varkappa)$ не меняется при замене $\varkappa$ на $-\varkappa$. Действительно, мы имеем

$$C(-\varkappa) = (-1)^n \begin{vmatrix} \|C_{\sigma s} + 1_\sigma^s \varkappa\| & \|B_{\sigma s}\| \\ \|A_{s\sigma}\| & \|C_{s\sigma} - 1_s^\sigma \varkappa\| \end{vmatrix}.$$

Делая в этом определителе строки столбцами и наоборот, имеем

$$D(-\varkappa) = (-1)^n \begin{vmatrix} \|C_{s\sigma} + 1_s^\sigma \varkappa\| & \|A_{\sigma s}\| \\ \|B_{s\sigma}\| & \|C_{\sigma s} - 1_\sigma^s \varkappa\| \end{vmatrix},$$

а переставляя здесь надлежащим образом строки и столбцы, мы опять придем к определителю $D(\varkappa)$. Таким образом,

$$D(-\varkappa) = D(\varkappa),$$

вследствие чего после раскрытия определителя мы получим многочлен $2n$-й степени, содержащий только четные степени переменной $\varkappa$.

Поэтому $2n$ корней определяющего уравнения распределяются на n пар $\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \ldots, \pm\varkappa_n$, среди которых могут быть, разумеется, и равные.

Примером канонической системы является линейная система второго порядка следующего, часто встречающегося вида:

$$\ddot{x}_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n. \qquad (1.49)$$

где $p_{s\sigma}$ — постоянные коэффициенты. Действительно, полагая

$$\dot{x}_s = y_s, \quad H_2 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 - \frac{1}{2}\sum p_{s\sigma}x_s x_\sigma,$$

мы приведем систему (1.49) к виду (1.47), причем

$$A_{s\sigma} = -p_{s\sigma}, \quad B_{s\sigma} = 1_s^\sigma, \quad C_{s\sigma} = 0.$$

Тогда по формуле (1.48) имеем

$$D(\varkappa) = (-1)^n \begin{vmatrix} -E\varkappa & E \\ -P & +E\varkappa \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(P - E\varkappa^2),$$

откуда непосредственно видно, что определяющее уравнение содержит только четные степени $\varkappa$.

3. Другим важным частным случаем является тот, в котором коэффициенты $p_{s\sigma}$ системы (1.36) суть периодические функции времени с одним и тем же вещественным периодом ω.

Допустим, что мы нашли каким-нибудь способом *) систему независимых решений $x_{s\sigma}$ уравнений (1.36). Так как по условию $p_{s\sigma}(t+\omega)=p_{s\sigma}(t)$, то группа функций $x_{sj}(t+\omega)$, соответствующая какому угодно j, взятому из ряда 1, 2, ..., n, также будет некоторым решением системы (1.36). По свойствам линейных уравнений это решение выразится линейно через основные, а поэтому, обозначая через a_{ij} некоторые постоянные, будем иметь

$$x_{sj}(t+\omega)=a_{1j}x_{s1}(t)+a_{2j}x_{s2}(t)+\ \ldots\ +a_{nj}x_{sn}(t). \qquad (1.50)$$

При посредстве определенных таким образом постоянных составляем следующее алгебраическое уравнение

$$\|a_{ij}\|-\rho E=0, \qquad (1.51)$$

которое будем называть, следуя А. М. Ляпунову, *характеристичным*, соответствующим периоду ω. Если бы вместо x_{sj} мы взяли какую-либо другую систему n независимых решений, то получили бы вообще другие значения для постоянных a_{ij}, но коэффициенты A_s характеристичного уравнения, приведенного к виду

$$\rho^n+A_1\rho^{n-1}+\ \ldots\ +A_{n-1}\rho+A_n=0, \qquad (1.51')$$

остались бы прежними. В этом состоит одно из основных свойств этих коэффициентов (а следовательно, и корней характеристичного уравнения), в силу которого они могут быть названы *инвариантами*. Действительно, пусть $\bar{x}_{sj}$ — другая система независимых решений. Тогда будем иметь для нее

$$\bar{x}_{sj}(t+\omega)=\bar{a}_{1j}\bar{x}_{s1}(t)+\bar{a}_{2j}\bar{x}_{s2}(t)+\ \ldots\ +\bar{a}_{nj}\bar{x}_{sn}(t), \qquad (1.50')$$

где $\bar{a}_{ij}$ вообще отличны от a_{ij}. С другой стороны,

$$\bar{x}_{sj}(t)=\tilde{a}_{1j}x_{s1}(t)+\tilde{a}_{2j}x_{s2}(t)+\ \ldots\ +\tilde{a}_{nj}x_{sn}(t), \qquad (1.50'')$$

где $\tilde{a}_{ij}$ — некоторые постоянные. В матричном виде зависимости (1.50), (1.50′), (1.50″) запишутся следующим образом:

$$X(t+\omega)=X(t)A, \quad \bar{X}(t+\omega)=\bar{X}(t)\bar{A}, \quad \bar{X}(t)=X(t)\tilde{A},$$

где $X(t)$, $\bar{X}(t)$ — интегральные матрицы, а A, $\bar{A}$, $\tilde{A}$ — матрицы составленные из коэффициентов a, $\bar{a}$, $\tilde{a}$ соответственно. Далее получаем

$$\bar{X}(t+\omega)=X(t+\omega)\tilde{A}=X(t)A\tilde{A}.$$

*) Для этого можем использовать способ А. М. Ляпунова, изложенный в разделе I этого параграфа. Но можно, разумеется, воспользоваться и каким-нибудь другим методом.

С другой стороны, имеем

$$X(t) = \bar{X}(t)\tilde{A}^{-1},$$

а поэтому

$$\bar{X}(t+\omega) = \bar{X}(t)\tilde{A}^{-1}A\tilde{A} = \bar{X}(t)\bar{A},$$

откуда

$$\bar{A} = \tilde{A}^{-1}A\tilde{A}.$$

Поэтому определитель из $\bar{a}_{ij}$ может быть представлен в виде

$$|\bar{A} - \rho E| = |\tilde{A}^{-1}A\tilde{A} - \rho\tilde{A}^{-1}E\tilde{A}| = |\tilde{A}^{-1}(A - \rho E)\tilde{A}| = |A - \rho E|,$$

откуда и следует доказательство отмеченного свойства.

Из всех коэффициентов A_s только A_n выражается просто через коэффициенты $p_{s\sigma}$ системы (1.36).

В самом деле, формула Лиувилля (1.42) дает

$$\Delta(t+\omega) = \Delta(t_0)\, e^{\int\limits_{t_0}^{t+\omega}(p_{11}+\dots+p_{nn})\,dt} = \Delta(t)\, e^{\int\limits_{t}^{t+\omega}(p_{11}+\dots+p_{nn})\,dt},$$

откуда, в силу периодичности коэффициентов p_{ss}, получим

$$\Delta(t+\omega) = \Delta(t)\, e^{\int\limits_{0}^{\omega}(p_{11}+\dots+p_{nn})\,dt}$$

Но формулы (1.50) показывают, что определитель $\Delta(t+\omega)$ равен произведению определителя $\Delta(t)$ на определитель $\|a_{ij}\|$, вследствие чего предыдущее равенство приведется к виду

$$(-1)^n A_n = \|a_{ij}\| = e^{\int\limits_{0}^{\omega}(p_{11}+\dots+p_{nn})\,dt}. \tag{1.52}$$

Из (1.52) следует, что *характеристичное уравнение не может иметь равных нулю корней* и что если оно имеет отрицательные корни, то *число таких корней всегда будет четным.*

Установим теперь аналитический вид решений системы (1.36) с периодическими коэффициентами. Пусть ρ — корень характеристичного уравнения (1.51). Положим $\varkappa = \frac{1}{\omega}\ln\rho$ и покажем, что уравнения (1.36) имеют частное решение

$$x_s = f_s(t)e^{\varkappa t} \qquad (s = 1, 2, \dots, n), \tag{1.53}$$

где все $f_s(t)$ — периодические функции с периодом ω.

Из (1.53) мы имеем

$$x_s(t+\omega) = f_s(t+\omega)e^{\varkappa\omega}e^{\varkappa t} = \rho f_s(t)e^{\varkappa t},$$

откуда следует, что функции (1.53) обладают свойством

$$x_s(t+\omega) = \rho x_s(t). \tag{1.53'}$$

Но если x_s — решение системы (1.36), то мы имеем

$$x_s = b_1 x_{s1} + b_2 x_{s2} + \ldots + b_n x_{sn},$$

где b_j — некоторые постоянные. В силу (1.53′)

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_{sj}(t+\omega) = \rho \sum_{j=1}^{n} b_j x_{sj}(t)$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{si}(t) = \rho \sum_{i=1}^{n} b_i x_{si}(t).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при x_{si}, получим для определения b_j следующую систему однородных уравнений:

$$a_{i1} b_1 + \ldots + (a_{ii} - \rho) b_i + \ldots + a_{in} b_n = 0.$$

Так как ρ — корень уравнения (1.51), то определитель этой системы равен нулю и система заведомо имеет ненулевые решения, откуда следует, что функции (1.53) действительно представляют частное решение уравнений (1.36).

Если характеристичное уравнение не имеет кратных корней, то система (1.36) имеет n частных решений вида (1.53), которые, очевидно, линейно независимы. Поэтому, если $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — различные корни уравнения (1.51), то общее решение системы (1.36) с периодическими коэффициентами напишется следующим образом:

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} C_\sigma f_{s\sigma}(t) e^{\varkappa_\sigma t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.54}$$

где все $f_{s\sigma}(t)$ — периодические функции с периодом ω, C_s — произвольные постоянные, а $\varkappa_s = \frac{1}{\omega} \ln \rho_s$ называются *характеристическими показателями.*

В случае существования кратных корней характеристичного уравнения система (1.36) с периодическими коэффициентами может допускать решения более общего вида. А именно, кратному корню ρ могут соответствовать решения, для которых функции $f_s(t)$ в (1.53) будут представляться выражениями

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{m} t^k f_{sk}(t) \tag{1.54′}$$

при условии, что все $f_{sk}(t)$ — периодические функции от t с периодом ω.

Чтобы указать общий способ составления характеристичного уравнения, предположим, что исходная система функций $x_{s\sigma}$ выбрана так, что $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$. Тогда из (1.50) непосредственно сле-

дует, что $a_{sj} = x_{sj}(t_0 + \omega)$, и следовательно, характеристичное уравнение будет иметь вид

$$\| x_{sj}(t_0 + \omega) \| - \rho E = 0. \tag{1.55}$$

Величины $x_{sj}(t_0 + \omega)$ можно вычислить по формулам (1.40), которые дают

$$x_{sj}(t_0 + \omega) = 1_s^j + \sum_{k=1}^{\infty} p_{sj}^{(k)}(t_0 + \omega),$$

где величины $p_{sj}^{(k)}$ определяются последовательно формулами

$$p_{sj}^{(1)}(t_0 + \omega) = \int_{t_0}^{t_0+\omega} p_{sj}(t)\,dt = \int_0^{\omega} p_{sj}(t)\,dt,$$

$$p_{sj}^{(k)}(t_0 + \omega) = \sum_{r=1}^{n} \int_{t_0}^{t_0+\omega} p_{sr} p_{rj}^{(k-1)}\,dt.$$

Существуют и другие способы составления характеристичного уравнения. Например, часто встречается случай, когда коэффициенты $p_{s\sigma}$, будучи периодическими функциями t, зависят еще от одного или нескольких малых параметров μ_r, по отношению к которым они голоморфны при $|\mu_r| \leqslant \bar{\mu}$.

Тогда, как будет показано ниже *), всякое решение системы (1.36) будет голоморфным относительно μ_r в той же области. Поэтому и все $x_{s\sigma}$ будут обладать этим же свойством, откуда следует сразу теорема А. М. Ляпунова.

Теорема А. М. Ляпунова. *Коэффициенты A_s характеристичного уравнения являются голоморфными функциями параметров μ_r в области $|\mu_r| \leqslant \bar{\mu}$.*

4. Допустим теперь, что предложенная система имеет каноническую форму

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial y_s}, \quad \frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.56}$$

в которой H_2 — квадратичная форма переменных x_s и y_s, коэффициенты которой — периодические функции.

Тогда имеет место следующая важная теорема А. М. Ляпунова:

Теорема А. М. Ляпунова. *Если предложенная система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами имеет каноническую форму, то соответствующее ей характеристичное уравнение всегда возвратное.*

Для доказательства рассмотрим два каких-либо решения системы (1.56): x_{s1}, y_{s1} и x_{s2}, y_{s2}. Обозначая через $H_2^{(i)}$ резуль-

*) См. теоремы следующего параграфа.

тат замены в H_2 величин x_s, y_s величинами x_{si}, y_{si}, мы найдем

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}(x_{j1}y_{j2}-x_{j2}y_{j1})=$$
$$=-\sum_{j=1}^{n}\left(x_{j1}\frac{\partial H_2^{(2)}}{\partial x_{j2}}-x_{j2}\frac{\partial H_2^{(1)}}{\partial x_{j1}}+y_{j1}\frac{\partial H_2^{(2)}}{\partial y_{j2}}-y_{j2}\frac{\partial H_2^{(1)}}{\partial y_{j1}}\right).$$

Но правая часть этого равенства тождественно равна нулю, так как представляет функцию, уничтожающуюся при одновременном равенстве нулю всех аргументов и обладает (как нетрудно проверить) тождественно равными нулю частными производными.

Вследствие этого мы приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^{n}(x_{j1}y_{j2}-x_{j2}y_{j1})=\text{const},$$

которым будут таким образом связаны всякие два решения системы (1.56). Следовательно, если рассмотрим $2n$ линейно независимых решений этой системы, то между ними будут существовать $n(2n-1)$ соотношений вида

$$\sum_{j=1}^{n}(x_{ji}y_{jk}-x_{jk}x_{ji})=C_{ik}, \tag{1.57}$$

в которых постоянные $C_{ik}=-C_{ki}$ $(i, k=1, 2, \ldots, 2n)$ вследствие независимости рассматриваемых решений будут таковы, что во всякой группе их $C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{i,2n}$, каково бы ни было данное число i, найдется по крайней мере одна постоянная C_{ik}, соответствующая отличному от i числу k, которая не будет нулем.

Обозначая теперь через $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$ корни характеристического уравнения системы (1.56), допустим, что наши решения выбраны так, чтобы функции $x_{s\sigma}$, $y_{s\sigma}$ были вида $x_{s\sigma}=f_{s\sigma}(t)\rho_\sigma^{\frac{t}{\omega}}$, $y_{s\sigma}=\varphi_{s\sigma}(t)\rho_\sigma^{\frac{t}{\omega}}$, где $f_{s\sigma}(t)$, $\varphi_{s\sigma}(t)$ — или периодические функции, или (если есть кратные корни) суммы конечного числа членов, представляющих произведения из периодических функций на степени t.

Тогда равенство (1.57) приведется к виду

$$(\rho_i\rho_k)^{\frac{t}{\omega}}\sum_{j=1}^{n}[f_{ji}(t)\varphi_{jk}(t)-f_{jk}(t)\varphi_{ji}(t)]=C_{ik},$$

откуда заключаем, что если C_{ik} — не нуль, то необходимо будет $\rho_i\rho_k = 1$. А так как по замеченному выше для каждого данного i можно найти отличное от него число k, при котором C_{ik} не будет нулем, то отсюда следует, что каждому корню ρ_i характеристичного уравнения будет соответствовать корень ρ_i^{-1}, и что если уравнение это имеет корень $+1$ или -1, то последний всегда будет кратным.

Вследствие этого можем утверждать, что если характеристичное уравнение системы (1.56) не имеет кратных корней, то между коэффициентами его будут существовать соотношения

$$A_{2n} = 1, \quad A_{2n-s} = A_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.58}$$

(что легко проверяется при помощи известных формул Виета).

Но, доказав соотношения (1.58) для случая простых корней, легко убедиться в справедливости их и для случая кратных. Для этого можно рассуждать, как показывает А. М. Ляпунов, следующим образом: в функции H_2, которая имеет вид (1.48), но с периодическими коэффициентами, заменим коэффициенты $A_{s\sigma}$, $B_{s\sigma}$, C_{ss} и $C_{s\sigma}$ (для $s \neq \sigma$) величинами $\varepsilon A_{s\sigma}$, $\varepsilon B_{s\sigma}$, $\varkappa_s + \varepsilon(C_{ss} - \varkappa_s)$, $\varepsilon C_{s\sigma}$, где ε — произвольный параметр, а $\varkappa_s$ — какие-нибудь постоянные, для которых числа

$$e^{\varkappa_s\omega}, \quad e^{-\varkappa_s\omega} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.59}$$

все различны, и рассмотрим каноническую систему с измененной функцией H_2. Система эта при $\varepsilon = 0$ обращается в каноническую систему с постоянными коэффициентами, для которой числа $\varkappa_s$, $-\varkappa_s$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) будут корнями определяющего уравнения, а, следовательно, числа (1.59) — корнями характеристичного уравнения, соответствующего периоду ω *). Поэтому, замечая, что для нашей новой системы коэффициенты характеристичного уравнения будут непрерывными функциями ε, так как в силу теоремы А. М. Ляпунова, установленной в предыдущем разделе, являются голоморфными функциями при всяком ε, и принимая в расчет, что по условию все числа (1.59) различны, заключим, что характеристичное уравнение этой системы не будет иметь кратных корней ни при $\varepsilon = 0$, ни при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$. Поэтому для таких значений ε будут выполняться соотношения (1.58). Но в таком случае соотношения эти, как выражающие равенства между целыми функциями ε, необходимо будут выполняться для всяких его значений, а следовательно, и для $\varepsilon = 1$, когда наша новая система переходит в первоначальную.

*) Уравнения с постоянными коэффициентами можно рассматривать, очевидно, как уравнения с периодическими коэффициентами.

Таким образом, теорема А. М. Ляпунова доказана полностью *).

В заключение этого параграфа напомним общий метод Лагранжа для интегрирования системы линейных, неоднородных, уравнений. Пусть дана система

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + R_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.60}$$

где $p_{s\sigma}$ — непрерывные функции t и где свободные члены R_s — также заданные непрерывные функции времени.

Допустим, что нам известна интегральная матрица $\| x_{s\sigma} \|$ однородной системы (1.36). Тогда, обозначая через C_s произвольные постоянные, напишем общее решение однородной системы, соответствующей (1.60), в виде

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} C_\sigma x_{s\sigma} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.61}$$

По методу Лагранжа мы сохраняем формулы (1.61) также и для неоднородной системы, рассматривая все C_s уже как некоторые, неизвестные, функции времени. Иными словами, мы вводим в (1.60) вместо x_s новые переменные C_s посредством линейной подстановки (1.61), коэффициенты которой $x_{s\sigma}$ суть известные функции.

Дифференцируя равенства (1.61), мы имеем

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} \dot{C}_\sigma x_{s\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{n} C_\sigma \dot{x}_{s\sigma}. \tag{1.61'}$$

Подставляя теперь выражения (1.61) и (1.61′) в уравнения (1.60), мы найдем в силу уравнений (1.36)

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \dot{C}_\sigma x_{s\sigma} = R_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.62}$$

Так как определитель $\Delta = \| x_{s\sigma} \|$ отличен от нуля при любом t (что следует из формулы Лиувилля), то мы можем разрешить уравнения (1.62) относительно величин C_s.

Обозначая для этого через $\Delta_{s\sigma}$ алгебраические дополнения элементов $x_{s\sigma}$ определителя Δ, мы получим

$$\dot{C}_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i\sigma}}{\Delta} R_i \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n),$$

*) Теорема А. М. Ляпунова опубликована в 1892 г. в его знаменитом сочинении «Общая задача об устойчивости движения», которое было переведено на французский язык и издано в Тулузе в 1907 г. Однако и в настоящее время теорема Ляпунова приписывается иногда другим авторам.

откуда интегрированием найдем

$$C_\sigma = \bar{C}_\sigma + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{i\sigma}}{\Delta} R_i \, dt \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.63}$$

где $\bar{C}_s$ — постоянные интегрирования.

Подставляя теперь полученные выражения для C_s в формулы (1.61), мы найдем общее решение неоднородной системы

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} \bar{C}_\sigma x_{s\sigma} + \bar{x}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.64}$$

где

$$\bar{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{s\sigma} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{i\sigma}}{\Delta} R_i \, dt \tag{1.64'}$$

суть функции, образующие некоторое частное решение системы неоднородных уравнений (1.60).

Формулы (1.64′) довольно громоздки, так как содержат в себе определители, элементы которых представляются бесконечными рядами. Можно получить для $\bar{x}_s$ более простые формулы, применяя к системе (1.60) способ А. М. Ляпунова.

Заменим систему (1.60) системой с параметром α

$$\dot{x}_s = R_s + \alpha \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \tag{1.65}$$

и будем искать частное решение этой системы в виде

$$\bar{x}_s = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{x}_s^{(k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.66}$$

Так же как и в разделе 1, находим без труда

$$\bar{x}_s^{(0)} = \int_{t_0}^{t} R_s \, dt, \ \ldots, \ \bar{x}_s^{(k)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{s\sigma} \bar{x}_s^{(k-1)} \, dt, \ \ldots \tag{1.66'}$$

Легко доказать (так же как и в разделе 1), что ряды (1.66) сходятся абсолютно при всяком t и при любом α, так что, полагая $\alpha = 1$, получим абсолютно сходящиеся ряды, представляющие частное решение системы (1.60).

Примечание. Все изложенное в этом параграфе распространяется без всяких затруднений на линейные системы второго и более высокого порядка.