§ 4. Основные теоремы о нелинейных уравнениях

1. Переходя к изложению некоторых, нужных нам для дальнейшего, результатов из области теории нелинейных дифференциальных уравнений, рассмотрим прежде всего основную теорему А. М. Ляпунова, позволяющую не только провести с полной строгостью и наиболее просто доказательство существования решения, но и приводящую вместе с тем к весьма удобному практическому приему для нахождения приближенного решения.

Эту теорему мы сформулируем следующим образом.

Теорема А. М. Ляпунова. *Пусть дана нормальная система дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.67}$$

где X_s — данные функции t и величин x_s, уничтожающиеся при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, непрерывные по отношению к t при $|t - t_0| \geqslant 0$ и голоморфные относительно x_s для всякого t в области $|x_s| \leqslant A_s$, где A_s — такие непрерывные функции t, которые никогда не делаются нулями. Пусть, кроме того, функции X_s таковы, что, обозначая через M_s некоторый высший предел модуля совокупности членов выше первого измерения в разложении X_s при всевозможных комплексных значениях x_s, модули которых равны A_s, мы можем принять за величины A_s, M_s такие функции t, чтобы для всякого $T > 0$, при t, изменяющемся в промежутке $(t_0 - T, t_0 + T)$, для каждой из функций A_s существовал некоторый положительный низший предел, а для каждой из функций M_s — некоторый высший предел.

Тогда, если $A_0 = \min|A_s(t_0)|$, то при всяких $|x_s^{(0)}| < A$ найдется такой предел $T > 0$, что функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (1.67) и принимающие значения $x_s^{(0)}$ при $t = t_0$, представятся абсолютно сходящимися рядами, расположенными по степеням $x_s^{(0)}$, для всякого t в промежутке $(t_0 - T, t_0 + T)$.

Обращаясь к доказательству, покажем сначала, что существует единственная система рядов, расположенных по степеням $x_s^{(0)}$ и формально удовлетворяющих уравнениям (1.67).

Представим эти уравнения в следующей форме:

$$\dot{x}_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + \overline{X}_s, \tag{1.67'}$$

где $p_{s\sigma}$ — непрерывные для $|t| \geqslant t_0$ функции t, а

$$\overline{X}_s = \sum_{m=2}^{\infty} X_s^{(m)}(t \mid x_\sigma), \tag{1.68}$$

причем $X_s^{(m)}$ — формы m-й степени вида (1.13′), т. е.

$$X_s^{(m)} = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}(t)\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \qquad (1.68')$$

коэффициенты которых — непрерывные для $|t| \geqslant t_0$ функции.

Будем искать решение уравнений (1.67′) в виде рядов

$$x_s = x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + \ldots + x_s^{(m)} + \ldots, \qquad (1.69)$$

рассматривая величины $x_s^{(m)}$ вместе с их производными по t как обладающие m-м измерением.

Подставляя ряды (1.69) в уравнения (1.67′) и приравнивая в каждом из последних совокупности членов одинакового измерения в левой и правой частях равенств, мы получим для определения $x_s^{(m)}$ следующие системы уравнений:

$$\dot{x}_s^{(1)} = p_{s1} x_1^{(1)} + p_{s2} x_2^{(1)} + \ldots + p_{sn} x_n^{(1)}, \qquad (1.70)$$

и для $m \geqslant 2$:

$$\dot{x}_s^{(m)} = p_{s1} x_1^{(m)} + p_{s2} x_2^{(m)} + \ldots + p_{sn} x_n^{(m)} + R_s^{(m)}. \qquad (1.70')$$

Здесь $R_s^{(m)}$ $(m = 2, 3, \ldots)$ — известные целые рациональные функции величин $x_\sigma^{(\mu)}$ с коэффициентами, представляющими суммы произведений коэффициентов форм (1.68′) на целые положительные числа. Легко видеть притом, что все $R_s^{(m)}$ будут зависеть (при данном m) только от тех $x_\sigma^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$. Например, $R_s^{(2)} = X_s^{(2)}(t \mid x_s^{(1)})$ *).

Таким образом, если все функции $x_\sigma^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$, уже найдены, то величины $R_s^{(m)}$ сделаются известными функциями времени и уравнения (1.70′) будут линейными, неоднородными, отличающимися при различных m только свободными членами. Поэтому, найдя общее решение однородной системы (1.70), можно будет определять функции $x_s^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$ последовательно в порядке возрастания m путем квадратур.

Как было показано выше, всегда можно найти группу n^2 функций, образующих интегральную матрицу системы (1.70), определенных и непрерывных для всякого $|t| \geqslant t_0$. Обозначая эти функции вообще через $x_{s\sigma}$, напишем общее решение системы (1.70) в виде

$$x_s^{(1)} = a_1 x_{s1} + a_2 x_{s2} + \ldots + a_n x_{sn} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.71)$$

---

*) Заметим, что все $R_s^{(m)}$, рассматриваемые как функции величин $x_\sigma^{(\mu)}$, обладают некоторой однородностью относительно верхних значков: в каждом члене выражения $R_s^{(m)}$ сумма всех верхних значков $x_\sigma^{(\mu)}$ равна m.

где a_s — произвольные постоянные. Если притом функции $x_{s\sigma}$ выбраны согласно условиям $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$, то имеем $a_s = x_s^{(1)}(t_0)$, и произвольными постоянными будут служить начальные значения функций $x_s^{(1)}$.

После того как функции $x_s^{(1)}$ найдены, все остальные $x_s^{(m)}$ найдутся по формулам вида (1.64), в которых произвольные постоянные можно выбирать как угодно (так как n произвольных постоянных мы уже ввели формулами (1.71)), лишь бы получаемые ряды, по крайней мере в известных пределах, были сходящимися. Мы вполне определим постоянные, возникающие при интегрировании систем (1.70), если введем условие, чтобы все $x_s^{(m)}$, для которых $m > 1$, обращались в нуль при $t = t_0$. Тогда, если вдобавок $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$, то постоянные a_s — начальные значения неизвестных функций, т. е.

$$a_s = x_s(t_0) = x_s^{(0)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.72}$$

Теперь по формулам (1.64′) имеем

$$x_s^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{sj} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)}\, dt \qquad (m = 2, 3, \ldots), \tag{1.73}$$

и функции, определяемые этими формулами, остаются определенными и непрерывными для всякого $|t| \geqslant t_0$, так как $\Delta = \| x_{s\sigma} \|$ никогда не обращается в нуль, и равны нулю при $t = t_0$.

При этом из свойства функций $R_s^{(m)}$, как однородных относительно верхних значков величин $x_\sigma^{(\mu)}$, немедленно выводим, что все функции $x_s^{(m)}$ будут целыми однородными функциями m-й степени относительно постоянных a_s.

Поэтому этим функциям можно придать вид

$$x_s^{(m)} = \sum x_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}, \tag{1.73′}$$

где сумма распространяется на все целые неотрицательные числа m_s, удовлетворяющие условию $\sum_{s=1}^{n} m_s = m$, а все коэффициенты — непрерывные функции, уничтожающиеся при $t = t_0$.

Теперь формулы (1.69) дают функции, удовлетворяющие уравнениям (1.67) в виде

$$x_s = a_1 x_{s1} + \ldots + a_n x_{sn} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{sj} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)}\, dt \tag{1.74}$$

или в виде

$$x_s = a_1 x_{s1} + a_2 x_{s2} + \ldots + a_n x_{sn} + \sum x_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}, \tag{1.74'}$$

т. е. в виде рядов, расположенных по степеням произвольных постоянных a_s. Если же $x_{s\sigma}$ выбраны по условиям $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$, то ряды эти располагаются по степеням величин $x_s^{(0)}$.

2. Обращаемся теперь к исследованию сходимости рядов (1.74). Пусть T — некоторое конечное, произвольно назначаемое положительное число. Так как все функции $x_{s\sigma}$ непрерывны в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$, то таковыми же будут и определитель Δ, и все определители $\Delta_{s\sigma}$. Так как Δ не обращается в нуль ни при каком значении t, то будут также непрерывными и все отношения $\Delta_{s\sigma}/\Delta$.

Поэтому, по свойствам непрерывных функций, при t, не выходящем из границ $t_0 - T$ и $t_0 + T$, можно назначить некоторые постоянные (зависящие от T) высшие пределы для модулей всех величин $x_{ii} - 1$, x_{ij} $(j \neq i)$ и для модулей величин $\frac{\Delta_{ii}}{\Delta} - 1$, $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ $(j \neq i)$. Пусть K есть такой высший предел для величин первой группы, а K' — для величин второй группы, так что имеем

$$\left.\begin{aligned} &|x_{ii}| < 1 + K, \quad |x_{ij}| < K \quad (j \neq i), \\ &\left|\frac{\Delta_{ii}}{\Delta}\right| < 1 + K', \quad \left|\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\right| < K' \quad (j \neq i) \end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

для всех значений t в указанном выше промежутке.

Заметим, что если функции $x_{s\sigma}$, выбраны так, что мы имеем $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$, то за величины K и K' можно взять такие непрерывные функции T, которые будут обращаться в нуль при $T = 0$.

Обозначим теперь через $\{u\}$ результат замены в какой-либо целой функции u от величин a_s всех членов их модулями. Тогда формулы (1.71) дают

$$\{x_s^{(1)}\} = |a_1| \cdot |x_{s1}| + |a_2| \cdot |x_{s2}| + \ldots + |a_n| \cdot |x_{sn}|,$$

откуда, обозначая через a наибольшую из $|a_s|$ и имея в виду неравенства (1.75), получим неравенства

$$\{x_s^{(1)}\} < (1 + nK)\, a. \tag{1.76}$$

Подобным же образом формулы (1.73) дают

$$\{x_s^{(m)}\} = |x_{s1}| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\Delta_{i1}}{\Delta}\right| \{R_i^{(m)}\}\, dt + \ldots + |x_{sn}| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\Delta_{in}}{\Delta}\right| \{R_i^{(m)}\}\, dt,$$

откуда в силу неравенств (1.75) выводим неравенства

$$\{x_s^{(m)}\} < \int_{t_0-T}^{t_0+T} \{R_i^{(m)}\}\, dt + (K + K' + nKK') \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \{R_i^{(m)}\}\, dt. \qquad (1.76')$$

Неравенства (1.76) и (1.76′) будут справедливы для всякого значения t в промежутке от $t_0 - T$ до $t_0 + T$.

Так как, далее, $R_i^{(m)}$ есть целая рациональная функция величин $x_\sigma^{(\mu)}$ $(\mu < m)$, коэффициентами которой являются суммы произведений коэффициентов $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ на целые положительные числа, то величину $\{R_i^{(m)}\}$ получим, заменяя в выражении для $R_i^{(m)}$ все величины $x_\sigma^{(\mu)}$ величинами $\{x_\sigma^{(\mu)}\}$ и все $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ их модулями. Поэтому, заменяя $\{x_\sigma^{(\mu)}\}$, $|P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}|$ их высшими пределами, найдем высший предел для величины $\{R_i^{(m)}\}$.

Обозначим теперь через $x^{(\mu)}$ некоторый общий высший предел величин $\{x_s^{(\mu)}\}$ в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$, а через $R^{(m)}$ обозначим то, во что обратится каждая из функций $R_s^{(m)}$ после замены $x_\sigma^{(\mu)}$ величинами $x^{(\mu)}$ и величин $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ некоторыми, не зависящими от нижнего значка высшими пределами их числовых значений в тех же пределах изменяемости t.

Тогда из (1.76′) получим

$$\{x_s^{(m)}\} < 2(1 + nK)(1 + nK')TR^{(m)}.$$

Следовательно, мы можем принять

$$\left.\begin{aligned} &x^{(1)} = (1 + nK)\, a, \\ &x^{(m)} = 2(1 + nK)(1 + nK')TR^{(m)} \qquad (m = 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (1.77)$$

Поэтому, если рассмотрим ряд

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(m)} + \ldots, \qquad (1.78)$$

все члены которого положительны, то для всякого t в промежутке от $t_0 - T$ до $t_0 + T$ будем иметь

$$\{x_s^{(1)}\} < x^{(1)}, \quad \{x_s^{(2)}\} < x^{(2)}, \ldots, \{x_s^{(m)}\} < x^{(m)}, \ldots,$$

и из сходимости ряда (1.78) будет следовать абсолютная сходимость каждого из рядов (1.74) для всякого t в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$. Таким образом, вопрос приводится к исследованию сходимости ряда (1.78). Для этого А. М. Ляпунов составляет алгебраическое уравнение, решение которого дает этот ряд.

Чтобы получить это уравнение, положим

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x^{(m)},$$

что с помощью (1.77) приводится к виду

$$x = (1 + nK)\,a + 2T\,(1 + nK)\,(1 + nK') \sum_{m=2}^{\infty} R^{(m)}. \qquad (1.79)$$

Но, согласно условиям теоремы и неравенствам Коши, для $P^{(m_1, \ldots, m_n)}$ можно взять величины $M \cdot A^{-(m_1 + \ldots + m_n)}$, где M — некоторый общий высший предел для всех функций M_s, а A — некоторый положительный низший предел, общий для всех функций A_s (в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$).

А тогда, как легко убедиться, функция

$$\hat{X} = M \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{A}\right)\left(1 - \frac{x_2}{A}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{A}\right)} - 1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A} \right\}$$

будет усиливающей для каждой из $\bar{X}_s$. Поэтому, если в выражении для $\hat{X}$ каждое x_s заменить рядом, сумму которого мы обозначили через x, то при сделанном выборе величин $P^{(m_1, \ldots, m_n)}$ величина $R^{(m)}$ представит совокупность членов m-го измерения относительно значков величин $x^{(\mu)}$ в разложении выражения для $\hat{X}$ после упомянутой замены.

А так как сумма $\sum\limits_{m=2}^{\infty} R^{(m)}$ представляет, очевидно, совокупность всех членов упомянутого разложения, то будем иметь

$$\sum_{m=2}^{\infty} R^{(m)} = M \left\{ \left(1 - \frac{1}{A} \sum_{\mu=1}^{\infty} x^{(\mu)}\right)^{-n} - 1 - \frac{n}{A} \sum_{\mu=1}^{\infty} x^{(\mu)} \right\},$$

что после подстановки в (1.79) и замены $\sum x^{(\mu)}$ на x приведет к следующему уравнению:

$$x = (1 + nK)\,a + Ah \left\{ \left(1 - \frac{x}{A}\right)^{-n} - 1 - n\frac{x}{A} \right\}, \qquad (1.80)$$

где

$$h = \frac{2MT}{A}\,(1 + nK)\,(1 + nK').$$

Поэтому ряд (1.78), формально удовлетворяющий уравнению (1.80), представит разложение по целым положительным степеням a того корня этого уравнения, который обращается в нуль вместе с a. Уравнение (1.80), или

$$F(a, x) = x - (1 + nK)\,a - Ah \left\{ \left(1 - \frac{x}{A}\right)^{-n} - 1 - \frac{x}{A} \right\} = 0, \qquad (1.80')$$

принадлежит к типу, рассмотренному в § 2, причем $F(a, x)$ есть голоморфная функция при любом a и $x < A$, обращающаяся в нуль при $a = x = 0$. Так как $F'_x(0, 0) = 1$, то по теореме 1 § 2 это уравнение имеет единственный корень, стремящийся к нулю вместе с a. Этот корень есть голоморфная функция от a, представляющаяся абсолютно сходящимся рядом, пока a не превышает известного предела.

В силу единственности разложения упомянутый ряд совпадает с рядом (1.78), и нам остается только найти область сходимости этого разложения *).

Рассмотрим для этого всевозможные (вообще говоря, комплексные) значения a и x, удовлетворяющие двум уравнениям $F(a, x) = 0$, $F'_x(a, x) = 0$. Если g — наименьший из модулей всех значений a, удовлетворяющих этим уравнениям, то x будет аналитической функцией от a при $|a| < g$, а следовательно, ряд (1.78) будет сходиться абсолютно при этом же условии. Составляя уравнение $F'_x(a, x) = 0$ и исключая затем x из двух уравнений $F(a, x) = 0$ и $F'_x(a, x) = 0$, мы получим единственное значение a, которое и обозначим через g, определяемое формулой

$$g = \frac{A}{1 + nK}\left\{1 - (n+1)h\left[\left(\frac{1}{nh} + 1\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1\right]\right\}. \qquad (1.81)$$

Этот предел g есть, очевидно, функция от T, неограниченно убывающая при бесконечном возрастании T, так как из (1.81) прямо следует (после соответствующего раскрытия неопределенности), что $\lim\limits_{T \to \infty} g = 0$.

Ряд (1.78) будет сходиться и при $a = g$, так как обладает положительными коэффициентами, а для корня x уравнения (1.80), несомненно, существует предел, когда a стремится к g.

А отсюда следует, что все ряды (1.74) сходятся абсолютно при всяком t, лежащем между $t_0 - T$ и $t_0 + T$, если $|a_s| \leqslant g$.

Найденный предел g при $T = 0$ принимает значение величины $A/(1 + nK)$, соответствующее тому же T. А значение это, согласно замеченному выше относительно величины K, можно считать равным соответствующему значению величины A, если функции $x_{s\sigma}$ таковы, что $x_{s\sigma}(t_0) = 1_s^\sigma$, так как при последнем условии за K можно взять такую функцию T, которая обращается в нуль при $T = 0$.

Но тогда $a_s = x_s^{(0)}$, и поэтому мы можем утверждать, что если все A_s — непрерывные функции t и если A_0 — наименьшее из значений, принимаемых ими для $t = t_0$, то при всяких $x_s^{(0)}$, удо-

*) Теорема 1 § 2 не дает возможности определить область сходимости, так как ряд для $F(a, x)$ здесь сходится при любом a, откуда следует только, что радиус сходимости ряда конечен.

влетворяющих условиям $|x_s^{(0)}| < A_0$, найдется такое число $T \neq 0$, что функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (1.67) и принимающие значения $x_s^{(0)}$ при $t = t_0$, представятся абсолютно сходящимися рядами, расположенными по степеням $x_s^{(0)}$, для всякого t в промежутке $(t_0 - T, t_0 + T)$.

Таким образом, теорема А. М. Ляпунова доказана полностью.

3. Из теоремы А. М. Ляпунова, рассмотренной в предыдущем разделе, вытекает, как частный случай, одна теорема Пуанкаре, доказанная знаменитым французским ученым независимо от Ляпунова и являющаяся основой широко известного «метода малого параметра».

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz_s}{dt} = Z_s(t \mid z_\sigma \mid \mu_j) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.82}$$

правые части которых суть данные функции времени t, величин z_s, являющихся неизвестными функциями, и ν параметров μ_i. Допустим, что при некоторых частных значениях $\mu_i^{(0)}$ этих параметров мы умеем интегрировать систему (1.82) или, по крайней мере, можем найти некоторое ее частное решение

$$z_s = f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.83}$$

так что имеем тождественно

$$\frac{df_s(t)}{dt} \equiv Z_s(t \mid f_\sigma(t) \mid \mu_j^{(0)}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.82'}$$

Задача, поставленная А. Пуанкаре, заключается в нахождении решений системы (1.82), близких к решению (1.83) и обращающихся в него при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Введем в уравнения (1.82) неизвестные x_s подстановкой

$$x_s = z_s - f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.84}$$

и положим, сверх того,

$$x_{k+i} = \mu_i - \mu_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{1.84'}$$

Рассматривая x_{k+i} так же как неизвестные функции (что, очевидно, возможно), и обозначая $k + \nu$ через n, мы получим следующую систему n уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.85}$$

где для $s = 1, 2, \ldots, k$ функции X_s определяются формулами

$$X_s = Z_s(t \mid x_\sigma + f_\sigma(t) \mid x_{k+j} + \mu_j^{(0)}) - Z_s(t \mid f_\sigma(t) \mid \mu_j^{(0)}), \tag{1.86}$$

а для $s = k+1, k+2, \ldots, k+\nu$:

$$X_s \equiv 0. \tag{1.86'}$$

Поэтому функции X_s уничтожаются для всякого t при одновременном равенстве нулю всех x_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ и уравнения (1.85) имеют нормальный вид (1.67).

Допустим теперь, что исходные уравнения (1.82) и решение (1.83) таковы, что функции X_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ оказываются для всякого t голоморфными функциями величин x_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ в области $|x_s| \leqslant A_s$ и удовлетворяют, сверх того, всем прочим условиям теоремы А. М. Ляпунова, рассмотренной в предыдущем разделе.

Тогда мы можем утверждать, что решение системы (1.85) представится рядами, расположенными по степеням начальных значений $x_s^{(0)}$ и абсолютно сходящимися для всякого t в промежутке $(t_0 - T, t_0 + T)$ при $|x_s^{(0)}| < g(T)$.

Ряды эти будут иметь следующий вид:

$$x_s = \sum_{m=1}^{\infty} x_s^{(m)}\left(t \mid x_\sigma^{(0)}\right) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.87}$$

где

$$x_s^{(m)}\left(t \mid x_\sigma^{(0)}\right) = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}(t)\left(x_1^{(0)}\right)^{m_1}\left(x_2^{(0)}\right)^{m_2} \ldots \left(x_n^{(0)}\right)^{m_n} \tag{1.87'}$$

есть форма степени m от величин $x_s^{(0)}$, коэффициенты которой суть непрерывные функции времени.

Возвращаясь теперь к уравнениям (1.82), мы получим уже без всяких затруднений их решение при μ_i, не равных $\mu_i^{(0)}$, но достаточно близких к ним численно, и обращающееся в решение (1.83) при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Действительно, для $s = k+1, k+2, \ldots, k+\nu$ мы имеем, очевидно, $x_{k+i} = x_{k+i}^{(0)} = \mu_i - \mu_i^{(0)}$, а для $s = 1, 2, \ldots, k$:

$$z_s = f_s(t) + x_s,$$

причем по формулам (1.84), $x_s^{(0)} = z_s^{(0)} - f_s(t_0)$.

Поэтому ряды (1.87) для $s = 1, 2, \ldots, k$ прямо дадут нам разложения функций z_s, удовлетворяющих уравнениям (1.82) с начальными условиями $z_s^{(0)}$. Ряды эти располагаются по степеням разностей

$$\left.\begin{array}{ll} z_s^{(0)} - f_s(t_0) & (s = 1, 2, \ldots, k), \\ \mu_i - \mu_i^{(0)} & (i = 1, 2, \ldots, \nu) \end{array}\right\} \tag{1.88}$$

и сходятся абсолютно для всякого t, лежащего между $t_0 - T$ и $t_0 + T$, пока числовые значения этих разностей не превосходят

некоторого предела, зависящего от T, который можно определить. Наоборот, для всякого заданного (сколь угодно большого) значения T величины (1.88) возможно выбрать настолько малыми численно, чтобы ряды (1.87) были абсолютно сходящимися в промежутке $(t_0 - T, t_0 + T)$.

В частности, полагая в этих рядах $z_s^{(0)} = f_s(t_0)$, мы получим разложения функций z_s, удовлетворяющих уравнениям (1.82) и принимающих при $t = t_0$ значения $f_s(t_0)$.

Эти ряды напишутся в виде

$$z_s = f_s(t) + \sum P_s^{(m_1, \ldots, m_\nu)}(t) \left(\mu_1 - \mu_1^{(0)}\right)^{m_1} \ldots \left(\mu_\nu - \mu_\nu^{(0)}\right)^{m_\nu}, \quad (1.89)$$

где сумма распространяется на все целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{\nu} m_i \geqslant 1$, а $P_s^{(m_1, \ldots, m_\nu)}(t)$ — непрерывные функции, обращающиеся в нуль при $t = t_0$.

Заметим, что если (1.83) — частное решение уравнений (1.82) при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$, содержащее l $(0 \leqslant l < k)$ произвольных постоянных, то ряды (1.89) также дадут частное решение уравнений (1.82) при $\mu_i \neq \mu_i^{(0)}$ с таким же числом произвольных постоянных. Если же $l = k$, то (1.83) есть общее решение системы (1.82) при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$, а (1.89) — общее решение той же системы при $\mu_i \neq \mu_i^{(0)}$.

Полагая, наоборот, в рядах (1.87) $\mu_i = \mu_i^{(0)}$, мы получим функции z_s, удовлетворяющие уравнениям (1.82) при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$ и принимающие при $t = t_0$ значения $z_i^{(0)} \neq f_i(t_0)$.

Непосредственно, теорема А. Пуанкаре получается из рассмотренной теоремы А. М. Ляпунова, если в системе (1.82) положить $\mu_i^{(0)} = 0$ и $\nu = 1$. Теорема эта, как следует из вышеизложенного, может быть сформулирована следующим образом:

Теорема А. Пуанкаре. *Пусть дана система уравнений*

$$\frac{dz_s}{dt} = Z_s(t \mid z_\sigma \mid \mu) \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \quad (1.90)$$

где правые части голоморфны при всяком $|t| \geqslant t_0$ *относительно* $z_s - f_s(t)$, μ, *модули которых достаточно малы и где* $f_s(t)$ *есть решение уравнений* (1.90) *при* $\mu = 0$. *Тогда при* $\mu \neq 0$, *но достаточно малом по модулю решение системы* (1.90) *представляется рядами вида*

$$z_s = f_s(t) + \sum_{m_1 + \ldots + m \geqslant 1} P_s^{(m_1, \ldots, m_k, m)}(t) \beta_1^{m_1} \beta_2^{m_2} \ldots \beta_k^{m_k} \mu^m, \quad (1.91)$$

где $\beta_s = z_s^{(0)} - f_s(t_0)$, *абсолютно сходящимися при достаточно малых* $|\beta_s|$ *и* $|\mu|$ *для всякого* t *в некотором промежутке от* $t_0 - T$ *до* $t_0 + T$, *где* T *зависит от* β_s *и* μ.

4. Уравнения (1.90) можно написать также в виде

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m Z_s^{(m)}(t \mid z_\sigma), \tag{1.90'}$$

где $Z_s^{(m)}$ — голоморфные функции величин $z_s - f_s(t)$, а $f_s(t)$ представляют решение уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} = Z_s^{(0)}(t \mid z_\sigma), \tag{1.91'}$$

которые называют *порождающими* или *исходными*, или *уравнениями невозмущенного движения* *).

Решение уравнений (1.90′), «близкое» к решению исходной системы, можно также искать в виде рядов, расположенных по степеням параметра μ, т. е. в виде

$$z_s = f_s(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m z_s^{(m)}. \tag{1.92}$$

Так как по свойству рядов Тэйлора — Маклорена

$$z_s^{(m)} = \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m z_s}{d\mu^m}\right)_{\mu=0},$$

то, чтобы получить уравнения, определяющие функции $z_s^{(m)}$, нужно последовательно дифференцировать уравнения (1.90′) по параметру μ, полагая после каждого дифференцирования $\mu = 0$. В результате получим следующие системы уравнений:

$$\frac{dz_s^{(m)}}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{k} p_{s\sigma}(t) \cdot z_s^{(m)} + Q_s^{(m)} \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{1.93}$$

где коэффициенты определяются формулами

$$p_{s\sigma}(t) = \left[\frac{\partial Z_s^{(0)}}{\partial z_\sigma}\right]_0, \tag{1.93'}$$

$Q_s^{(1)} = Z_s^{(1)}(t \mid f_\sigma(t))$, а $Q_s^{(m)}$ $(m > 1)$ — целые многочлены относительно тех $z_s^{(l)}$, для которых $l < m$.

Поэтому, когда все $z_s^{(l)}$ $(l < m)$ уже определены, то $Q_s^{(m)}$ являются известными функциями времени и решение задачи

*) Слово движение здесь нужно понимать в обобщенном смысле, как процесс изменения в зависимости от времени совокупности величин $z_1, z_2 \ldots$ $\ldots, z_k$.

приводится опять к интегрированию ряда систем линейных неоднородных уравнений.

Это интегрирование, как мы знаем, приводится к квадратурам, если известна какая-либо система k независимых решений системы однородных уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{k} p_{s\sigma}(t) z_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.94}$$

названных Пуанкаре *уравнениями в вариациях*. В разделе 1 § 3 было показано, что функции $z_{s\sigma}$, составляющие интегральную матрицу системы (1.94), всегда могут быть определены по методу А. М. Ляпунова при помощи абсолютно сходящихся рядов. Однако если функции $f_s(t)$ представляют общее решение системы (1.91′), то все функции $z_{s\sigma}$ могут быть найдены без всякого труда при помощи простых дифференцирований. Действительно, докажем следующую теорему, принадлежащую Пуанкаре.

Теорема Пуанкаре об уравнениях в вариациях. *Если функции $f_s(t|C_j)$, где $C_1, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные, представляют общее решение исходных уравнений* (1.91′), *то функции*

$$\frac{\partial f_s(t \mid C_j)}{\partial C_\sigma} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, k; \\ \sigma = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix} \tag{1.94′}$$

образуют систему k независимых решений уравнений в вариациях (1.94).

Доказательство теоремы очень просто. Действительно, если функции $f_s(t|C_j)$ составляют решение системы (1.91′), то мы имеем следующие тождества:

$$\frac{df_s(t \mid C_j)}{dt} = Z_s^{(0)}(t \mid f_l(t \mid C_l)),$$

каковы бы ни были значения произвольных постоянных C_j.

Дифференцируя эти тождества по любой из величин C_σ, мы получим, очевидно, опять тождества

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f_s(t \mid C_j)}{\partial C_\sigma}\right] \equiv \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial Z_s^{(0)}}{\partial f_r} \cdot \frac{\partial f_r(t \mid C_l)}{\partial C_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k),$$

которые в силу формул (1.93) приводятся к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f_s}{\partial C_\sigma} \equiv \sum_{r=1}^{k} p_{sr}(t) \cdot \frac{\partial f_r}{\partial C_\sigma}.$$

Отсюда следует, что функции (1.94′) для каждого σ удовлетворяют системе (1.94). Остается показать, что функции (1.94′) образуют систему независимых решений. Но мы имеем

$$\Delta = \left\| \frac{\partial f_s(t \mid C_j)}{\partial C_\sigma} \right\| = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_k)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_k)},$$

а так как по условию $f_s(t \mid C_j)$ есть общее решение уравнений (1.91′), то якобиан этих функций заведомо отличен от нуля, и следовательно, теорема Пуанкаре доказана полностью.

Если функции $f_s(t)$ представляют частное решение уравнений невозмущенного движения, то только что доказанная теорема Пуанкаре, разумеется, неприменима и приходится прибегать к методу Ляпунова или интегрировать уравнения в вариациях каким-нибудь другим способом.

Напомним, что по способу А. М. Ляпунова можно также найти частное решение любой из систем (1.93).

Примечание. Метод определения коэффициентов рядов (1.92) может быть применен также и к рядам (1.91), (1.89), (1.87), так что интегрирование нелинейных уравнений с помощью рядов, расположенных по степеням параметров и произвольных постоянных, всегда приводится к интегрированию систем линейных уравнений, из которых находятся коэффициенты упомянутых рядов. Теорема Пуанкаре об уравнениях в вариациях также применима к подобным системам линейных неоднородных уравнений.