Глава II

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

В этой главе мы изложим основные сведения из общей теории устойчивости движения, созданной А. М. Ляпуновым, являющейся необходимым аппаратом аналитико-качественных методов и имеющей поэтому исключительно важное значение для современной небесной механики.

§ 1. Постановка задачи и определения

1. Рассмотрим сначала нормальную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.1}$$

где функции $X_s(t \mid x_\sigma)$ непрерывны и однозначны для значений аргументов, удовлетворяющих условиям вида

$$|t| \geqslant t_0, \qquad |x_s| \leqslant A_s, \tag{2.1'}$$

и обладают непрерывными и однозначными частными производными по крайней мере первого порядка в области (2.1′).

Пусть, кроме того, все функции X_s при любом t обращаются в нуль в начале координат. Тогда уравнения (2.1) имеют частное решение

$$x_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.2}$$

которое мы будем называть *нулевым решением* или, следуя Ляпунову, *невозмущенным движением*.

Допустим, что функции X_s удовлетворяют всем условиям теоремы Ляпунова, рассмотренной в § 4 главы 1.

Тогда, как следует из этой теоремы, мы можем утверждать, что всякому положительному числу $\varepsilon < A$ и всякому положительному T соответствует такое число λ, зависящее от ε и T $(0 < \lambda \leqslant \varepsilon)$, что при всяких начальных условиях $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.3}$$

мы будем иметь неравенства

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.3'}$$

справедливые для всякого значения t, заключающегося в промежутке от $t_0 - T$ до $t_0 + T$.

При этом функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (2.1), представляются рядами, расположенными по степеням начальных значений $x_s^{(0)}$, абсолютно сходящимися при всяком t в области $(t_0 - T,\ t_0 + T)$ и при всяких $x_s^{(0)}$, выполняющих неравенства (2.3).

Эти ряды определяют бесчисленное множество решений тех же уравнений (2.1), близких к нулевому решению с точностью до заданного ε в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$.

Мы можем также сказать, что нулевое решение (2.2) аппроксимирует в промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$ любое решение системы (2.1), для которого $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda(\varepsilon, T)$.

Упомянутые ряды допускают вообще аналитические продолжения и за пределы промежутка их сходимости, но тогда мы не можем гарантировать, что неравенства (2.3′) будут оставаться постоянно выполненными при всяких $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих неравенствам (2.3).

Иными словами, вообще говоря, из множества решений системы (2.1), выходящих в начальный момент из достаточно малой окрестности начала координат, только некоторые будут оставаться в области, определяемой неравенствами (2.3′) при всяком t (или только при значениях t, удовлетворяющих одному из условий: $t \geqslant t_0$, $t \leqslant t_0$).

Другие же решения, выходящие даже из сколь угодно малой окрестности начала, будут покидать область (2.3′) при некотором конечном значении t.

Однако может случиться, что число λ окажется независящим от T и что при выполнении неравенств (2.3) неравенства (2.3′) будут выполняться для всякого t или, во всяком случае, для значений t, удовлетворяющих одному из условий: $t \geqslant t_0$, $t \leqslant t_0$.

Тогда нулевое решение (2.2) будет аппроксимировать любое решение системы (2.1), для которого $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda(\varepsilon)$ в сколь угодно большом промежутке времени, расположенном по крайней мере по одну сторону от начального момента t_0.

В этом случае нулевое решение, или невозмущенное движение, мы будем называть *устойчивым* (в смысле Ляпунова), а в противоположном случае — *неустойчивым*.

2. Сформулируем теперь точные определения понятий устойчивости и неустойчивости, предполагая, что функции X_s в урав-

нениях (2.1) для всякого t конечны, непрерывны и однозначны вместе со своими частными производными первого порядка при всех значениях x_s, удовлетворяющих условиям

$$|x_s| \leqslant A \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.4}$$

и уничтожаются, когда все x_s равны нулю, причем A — заданная положительная постоянная.

Всякой системе начальных значений $x_s^{(0)}$ (начальные возмущения), удовлетворяющих неравенствам (2.4), будет соответствовать единственное непрерывное решение уравнений (2.1), отличное от нулевого или от невозмущенного движения, которое мы будем называть, следуя Ляпунову, *возмущенным движением*.

Определение понятия *устойчивость* сформулируем следующим образом:

Невозмущенное движение называется устойчивым, если всякому, произвольно задаваемому положительному числу $\varepsilon \leqslant A$ *соответствует такое положительное число* $\lambda < \varepsilon$, *что при всяких начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям*

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

неравенства

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

будут выполняться для всякого значения $t \geqslant t_0$.

Частным, но важным для приложений случаем понятия устойчивости является *асимптотическая устойчивость*, когда невозмущенное движение, удовлетворяя предыдущему определению, вдобавок таково, что при всяких, численно не превышающих известного предела, начальных возмущениях все функции x_s приближаются к нулю, когда t беспредельно растет, т. е. когда $\lim\limits_{t \to \infty} x_s(t) = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$.

Можно сформулировать и отдельное определение асимптотической устойчивости следующим образом:

Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если всякой паре положительных чисел λ *и* ε, *задаваемых произвольно, независимо друг от друга, но подчиненных условиям* $\varepsilon < \lambda \leqslant A$, *соответствует такое число* $\tau > t_0$, *что при любых* $x_s^{(0)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

неравенства

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

будут выполняться по крайней мере для всех значений $t > \tau$.

Ясно, что если невозмущенное движение удовлетворяет последнему определению, то оно заведомо удовлетворяет и первому. Обратное, разумеется, утверждать нельзя.

Переходя к понятию неустойчивости, заметим, что оно прямо противоположно понятию устойчивости, так что всякое невозмущенное движение, не являющееся устойчивым (т. е. не удовлетворяющее определению устойчивости), является неустойчивым.

Однако полезно сформулировать и независимое определение понятия неустойчивости, что можно сделать следующим образом:

Невозмущенное движение называется неустойчивым, если всякой паре положительных чисел λ и ε, задаваемых произвольно, независимо друг от друга, но подчиненных условиям $\lambda < \varepsilon \leqslant A$, соответствует такое число $\tau > t_0$, что всегда можно найти вещественные значения $x_s^{(0)}$, удовлетворяющие условиям

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

и приводящив при $t = \tau$ по крайней мере к одному из равенств

$$|x_s(\tau)| = \varepsilon.$$

Таким образом, для того чтобы невозмущенное движение было неустойчивым, достаточно, чтобы нашлась хотя бы одна система значений $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих условиям $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$, приводящая хотя бы к одному из равенств $|x_s(\tau)| = \varepsilon$.

Может случиться, что всякая система начальных возмущений $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$ приводит к равенствам $|x_s(\tau)| = \varepsilon$.

В этом случае мы будем говорить, что невозмущенное движение *абсолютно неустойчиво.*

Заметим еще, что из определения неустойчивости следует, что, задавая числа λ и ε, мы можем найти такое $\tau > t_0$, что при любых $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$ неравенства $|x_s(t)| < \varepsilon$ будут выполняться для всякого t в промежутке (t_0, τ).

Дадим еще определение понятия *условной устойчивости*:

Невозмущенное движение называется условно устойчивым, если всякому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $0 < \lambda < \varepsilon$, что при всех $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих условиям

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda, \qquad f(x_\sigma^{(0)}) \geqslant 0,$$

где f — функция начальных возмущений, обращающаяся в нуль, когда все $x_s^{(0)}$ равны нулю, неравенства

$$|x_s(t)| < \varepsilon$$

будут выполняться для всякого значения $t \geqslant t_0$.

Очевидно, что определение условной устойчивости есть не что иное, как иначе сформулированное определение неустойчивости (но не абсолютной неустойчивости).

Примечание. В приведенных определениях рассматриваются значения t только бо́льшие начального значения t_0, что устанавливает свойство движения (решений системы (2.1)) на будущее. Но точно так же можно рассматривать задачу об устойчивости в прошлом, для чего во всех определениях достаточно заменить неравенство $t \geqslant t_0$ на неравенство $t \leqslant t_0$.

При этом может оказаться, что обнаруженное при $t \geqslant t_0$ свойство невозмущенного движения изменится на другое, даже на противоположное, при $t \leqslant t_0$, т. е., например, устойчивость в будущем может превратиться в неустойчивость в прошлом или наоборот. Может также случиться, что невозмущенное движение обладает одним и тем же свойством и при $t \geqslant t_0$, и при $t \leqslant t_0$.

Можно заметить также, что решение задачи об устойчивости в прошлом можно свести к решению задачи об устойчивости в будущем, просто изменяя в уравнениях (2.1) t на $-t$.

Заметим еще, что может случиться (и это будет наиболее общий случай), что функции $X_s(t|x_\sigma)$ даны только для значений t, заключенных в некотором промежутке $(t_0, \bar{t})$, за пределами которого рассматривать задачу по каким-либо причинам не имеет смысла. Тогда приведенные определения устойчивости и неустойчивости в смысле А. М. Ляпунова могут быть сохранены с заменой слов «...для всех значений $t \geqslant t_0$ ...» на следующие: «...для всех значений t в промежутке $(t_0, \bar{t})$...». При этом, если невозмущенное движение оказывается неустойчивым, то это означает, что величина τ, играющая роль в определении неустойчивости, такова, что $\tau \leqslant \bar{t}$. Таким образом, невозмущенное движение неустойчиво, если последующие возмущения не способны оставаться численно меньшими назначенного предела в течение всего того промежутка времени, когда имеет смысл рассматривать данное движение.

3. Для пояснения данных нами основных определений рассмотрим некоторые простые примеры. Так как мы не имеем еще способа для решения задачи об устойчивости в общих случаях, то эти примеры выбраны из области тех задач, когда заданные дифференциальные уравнения могут быть полностью проинтегрированы.

Пример 1. Пусть уравнения возмущенного движения приведены к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = +\alpha x,$$

где α — положительная постоянная. Правые части этих уравнений не зависят от t и, очевидно, голоморфны для всех вещественных значений x и y. Поэтому постоянная A, входящая в определение устойчивости, здесь может быть взята произвольно.

Общее решение предложенных уравнений напишется в виде

$$x = x_0 \cos \alpha (t - t_0) - y_0 \sin \alpha (t - t_0),$$
$$y = x_0 \sin \alpha (t - t_0) + y_0 \cos \alpha (t - t_0),$$

где x_0, y_0 — начальные значения (начальные возмущения), соответствующие начальному моменту t_0.

Из общего решения получаем первый интеграл системы:

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Поэтому, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, полагая $\lambda = \varepsilon$, мы будем иметь при любых x_0, y_0, удовлетворяющих условию

$$x_0^2 + y_0^2 \leqslant \lambda^2$$

или, что то же, условиям

$$|x_0| \leqslant \lambda, \quad |y_0| \leqslant \lambda,$$

справедливые для всякого значения t неравенства

$$x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

откуда также

$$|x| \leqslant \varepsilon, \quad |y| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, невозмущенное движение, т. е. нулевое решение

$$x = 0, \quad y = 0$$

предложенных уравнений устойчиво. (Заметим еще, что здесь $T = t_0$.)

Если уравнения возмущенного двужения даны в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\psi(t)\, y, \quad \frac{dy}{dt} = +\alpha\psi(t)\, x,$$

где $\psi(t)$ есть непрерывная функция времени, принимающая с некоторого момента T только неотрицательные значения, и притом такая, что интеграл

$$\int_T^t \psi(t)\, dt$$

расходится при $t \to \infty$, то, вводя вместо t новую независимую переменную θ подстановкой

$$d\theta = \psi(t)\, dt,$$

мы приведем наши уравнения к первоначальному виду, а так как θ неограниченно растет вместе с t и, следовательно, может играть такую же роль, как и t, то заключим, что решение $x=0$, $y=0$ данных уравнений также устойчиво.

Пример 2. Пусть уравнения возмущенного движения даны в виде

$$\frac{dx}{dt}=-x-y+(x-y)(x^2+y^2),$$

$$\frac{dy}{dt}=+x-y+(x+y)(x^2+y^2).$$

Общее решение этих уравнений можно представить в форме

$$x=\frac{x_0\cos\theta-y_0\sin\theta}{\sqrt{r_0^2+(1-r_0^2)e^{2(t-t_0)}}},\quad y=\frac{x_0\sin\theta+y_0\cos\theta}{\sqrt{r_0^2+(1-r_0^2)e^{2(t-t_0)}}},$$

где x_0, y_0 — начальные возмущения, соответствующие начальному моменту t_0, $r_0^2=x_0^2+y_0^2$, а θ определяется формулой

$$\theta=2(t-t_0)-\frac{1}{2}\ln\left[r_0^2+(1-r_0^2)e^{2(t-t_0)}\right].$$

Но из этих формул находим также

$$r^2=x^2+y^2=\frac{r_0^2}{r_0^2+(1-r_0^2)e^{2(t-t_0)}},$$

откуда видим, что при любых x_0, y_0, удовлетворяющих условию

$$x_0^2+y_0^2<1,$$

x, y и r при неограниченно возрастающем t приближаются к нулю. Следовательно, нулевое решение предложенных уравнений устойчиво асимптотически.

Пример 3. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt}=+n(t)y+m(t)x(x^2+y^2),$$

$$\frac{dy}{dt}=-n(t)x+m(t)y(x^2+y^2),$$

где $n(t)$ и $m(t)$ — непрерывные функции времени для $t>t_0$ или вообще для $t>T$.

Общее решение этих уравнений, как легко проверить, может быть написано в виде

$$x = \frac{x_0 \cos\left[\int\limits_T^t n(t)\,dt\right] + y_0 \sin\left[\int\limits_T^t n(t)\,dt\right]}{\sqrt{1 - 2\left(x_0^2 + y_0^2\right)\int\limits_T^t m(t)\,dt}},$$

$$y = \frac{y_0 \cos\left[\int\limits_T^t n(t)\,dt\right] - x_0 \sin\left[\int\limits_T^t n(t)\,dt\right]}{\sqrt{1 - 2\left(x_0^2 + y_0^2\right)\int\limits_T^t m(t)\,dt}},$$

откуда выводим

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{r_0^2}{1 - 2r_0^2\int\limits_T^t m(t)\,dt}.$$

Рассматривая эти формулы, сейчас же убеждаемся, что невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ устойчиво, если $m(t) < 0$, при $t > T$.

Если же $m(t) > 0$, то невозмущенное движение устойчиво, когда интеграл

$$\int\limits_T^t m(t)\,dt$$

сходится при $t \to \infty$, и неустойчиво, когда этот интеграл расходится при $t \to \infty$.

Заметим, что если при $t > T$ функция $m(t)$ получает только неположительные значения и указанный интеграл сходится при $t \to \infty$, то невозмущенное движение просто устойчиво (не асимптотически), так как из выражения для r^2 видно, что в этом случае $\lim\limits_{t\to\infty} r \neq 0$, но так как r не возрастающая функция, то при

$$x_0^2 + y_0^2 < \varepsilon^2,$$

где ε — любое заданное число, мы будем для всякого $t > T$ иметь $r^2 < \varepsilon^2$.

Если же этот интеграл расходится при $t \to \infty$, то при любых x_0, y_0 мы будем иметь $\lim\limits_{t\to\infty} r = 0$ и невозмущенное движение окажется асимптотически устойчивым.

4. Рассмотрим теперь задачу об устойчивости реального движения какой-либо механической системы без неинтегрируемых дифференциальных связей и с конечным числом степеней свободы. Пусть k — число степеней свободы, т. е. число независимых обобщенных координат q_s, определяющих положение системы. Во всякой динамической задаче (например, в любой задаче небесной механики), в которой заданы действующие на систему силы, величины q_s, рассматриваемые как функции времени t, будут удовлетворять k дифференциальным уравнениям второго порядка. Эти уравнения в самом общем виде можно написать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=U_s \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{2.5}$$

где T обозначает живую силу рассматриваемой механической системы, а U_s — обобщенные силы, зависящие вообще от t, q_σ, $\dot{q}_\sigma$.

Уравнения (2.5) — уравнения Лагранжа 2-го рода — всегда можно разрешить относительно вторых производных от q_s, что позволяет написать уравнения движения (2.5) в виде

$$\ddot{q}_s=Q_s(t\,|\,q_\sigma\,|\,\dot{q}_\sigma). \tag{2.5'}$$

Систему (2.5′) в свою очередь можно заменить, равносильной ей системой уравнений первого порядка, которые можно выбрать вообще различными способами, например в виде

$$\frac{dq_s}{dt}=\dot{q}_s, \qquad \frac{d\dot{q}_s}{dt}=Q_s(t\,|\,q_\sigma\,|\,\dot{q}_\sigma). \tag{2.5''}$$

Может случиться, что в интересующей нас задаче действующие силы обладают силовой функцией $U(t\,|\,q_\sigma)$. Тогда система (2.5) может быть написана в канонической форме:

$$\frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_s}, \tag{2.5'''}$$

где

$$p_s=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}, \qquad H=T_2-T_0-U.$$

В выражении характеристической функции T_2 обозначает совокупность членов второй степени относительно p_s, а T_0 зависит только от t и q_s.

Итак, пусть даны уравнения движения некоторой материальной системы, например в виде (2.5″). Всякой заданной системе допустимых в рассматриваемой задаче начальных значений $q_s^{(0)}$, $\dot{q}_s^{(0)}$ соответствует некоторое вполне определенное движение этой материальной системы. Различным совокупностям начальных значений будут соответствовать различные движения нашей

системы, возможные для нее при тех же самых заданных силах.

Выберем из всех возможных движений нашей системы какое-нибудь одно, вполне определенное для всякого значения $t \geqslant t_0$ движение, которое условимся называть *невозмущенным*.

Этому невозмущенному движению соответствуют вполне определенные значения начальных данных и вполне определенное частное решение дифференциальных уравнений (2.5″).

Пусть $\bar{q}_s^{(0)}$, $\bar{\dot{q}}_s^{(0)}$ — начальные данные невозмущенного движения, представляющие заданные вещественные числа, а соответствующее частное решение уравнений (2.5″) запишем в виде

$$q_s = \varphi_s(t), \qquad \dot{q}_s = \dot{\varphi}_s(t), \tag{2.6}$$

где φ_s, $\dot{\varphi}_s$ — вещественные функции времени, дающие при всяком $t \geqslant t_0$ только допустимые значения для величин q_s, $\dot{q}_s$.

Эти функции таковы, что для всякого $t \geqslant t_0$ выполняются тождества

$$\frac{d\varphi_s}{dt} \equiv \dot{\varphi}_s, \qquad \frac{d\dot{\varphi}_s}{dt} \equiv Q_s(t \mid \varphi_\sigma \mid \dot{\varphi}_\sigma),$$

а для $t = t_0$ имеем $\varphi_s(t_0) = \bar{q}_s^{(0)}$, $\dot{\varphi}_s(t_0) = \bar{\dot{q}}_s^{(0)}$.

Всякой другой системе начальных данных, отличных от $\bar{q}_s^{(0)}$, $\bar{\dot{q}}_s^{(0)}$, соответствует некоторое другое движение нашей механической системы, отличное от невозмущенного и определяемое другим решением той же самой системы (2.5″).

Любое другое движение, отличное от невозмущенного, мы будем называть, следуя А. М. Ляпунову, *возмущенным движением*.

Начальные данные возмущенного движения представим в виде

$$q_s^{(0)} = \bar{q}_s^{(0)} + \varepsilon_s, \qquad \dot{q}_s^{(0)} = \bar{\dot{q}}^{(0)} + \varepsilon_s' \qquad (s = 1, \ldots, k), \tag{2.7}$$

где ε_s, ε_s' — некоторые вещественные постоянные, которые естественно назвать *начальными возмущениями*.

Заданием этих величин определится некоторое возмущенное движение, так что q_s и $\dot{q}_s$, удовлетворяющие уравнениям (2.5″), будут некоторыми функциями времени и начальных возмущений. Мы будем предполагать, что величинам ε_s, ε_s' можно приписывать всякие, по крайней мере достаточно малые численно, значения.

Разности $q_s - \varphi_s(t)$, $\dot{q}_s - \dot{\varphi}_s(t)$ для всякого t будем называть *последующими возмущениями* или просто *возмущениями* обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Очевидно, что эти разности будут функциями времени и начальных возмущений ε_s, ε'_s, обращающимися в нуль (для всякого t) при $\varepsilon_s = \varepsilon'_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$.

Если же ε_s, ε'_s не нули, то возникает вопрос, можно ли назначить такие достаточно малые пределы для последующих возмущений, которых последние никогда не превзошли бы по числовым значениям?

Этот вопрос и составляет предмет теории устойчивости в смысле Ляпунова, который рассматривается в данной главе.

Поставим задачу об устойчивости сразу более общим образом.

Пусть нам заданы некоторые непрерывные, вещественные функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей

$$\Phi_s = \Phi_s(t \mid q_\sigma \mid \dot{q}_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.8}$$

причем число n этих функций может быть любым.

В невозмущенном движении величины Φ_s будут некоторыми, известными функциями времени, которые обозначим соответственно через $\Phi_s^{(0)}$, т. е. положим

$$\Phi_s^{(0)} = \Phi_s(t \mid \varphi_\sigma(t) \mid \dot{\varphi}_\sigma(t)), \tag{2.8'}$$

а для какого-либо возмущенного движения Φ_s будут, очевидно, некоторыми функциями величин t, ε_s, ε'_s.

Когда все ε_s, ε'_s равны нулю, то равны также нулю и все разности $\Phi_s - \Phi_s^{(0)}$, и притом для всякого t.

Так же как и выше, поставим вопрос, *можно ли назначить такие достаточно малые пределы для величин* $|\Phi_s - \Phi_s^{(0)}|$, *которых последние никогда не превзошли бы, если все* ε_s, ε'_s *предполагаются достаточно малыми численно*?

Решение этого вопроса зависит не только от характера рассматриваемого невозмущенного движения, но и от выбора функций Φ_s и составляет общую задачу об устойчивости движения относительно величин $\Phi_s(t \mid q_\sigma \mid \dot{q}_\sigma)$*).

Если взять $n = 2k$ и положить $\Phi_i = q_i$, $\Phi_{k+i} = \dot{q}_i$, то мы получим задачу об устойчивости относительно обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Самое общее определение понятия устойчивости может быть сформулировано следующим образом:

---

*) Мы уже отмечали, что в таком случае говорят об устойчивости в смысле Ляпунова. В дальнейшем речь будет идти только о такого рода устойчивости. Впрочем, все другие разновидности понятия устойчивости обычно можно свести к понятию ляпуновской устойчивости.

Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к величинам $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, *если, задавая произвольно положительные числа* $L_1, L_2, \ldots, L_n$, *мы можем определить при всяких* L_s, *как бы малы они ни были, такие положительные числа* $E_1, E_2, \ldots, E_k, E_1', E_2', \ldots, E_k'$, *чтобы при всяких вещественных значениях* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_k'$, *удовлетворяющих условиям*

$$|\varepsilon_s| \leqslant E_s, \quad |\varepsilon_s'| \leqslant E_s' \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

и при всяком t, *превосходящем* t_0, *выполнялись неравенства*

$$|\Phi_1 - \Phi_1^{(0)}| < L_1, \quad |\Phi_2 - \Phi_2^{(0)}| < L_2, \ldots, |\Phi_n - \Phi_n^{(0)}| < L_n.$$

Замечание. Прежде всего еще раз отметим, что решение вопроса об устойчивости заданного невозмущенного движения зависит, и весьма существенно, от рода величин Φ_s, по отношению к которым желательно поставить задачу об устойчивости.

Одно и то же невозмущенное движение одной и той же механической системы, при тех же самых заданных силах, может оказаться устойчивым по отношению к некоторой заданной системе величин Φ_s и может оказаться неустойчивым по отношению к некоторой другой системе этих величин. *Поэтому, говоря об устойчивости какого-либо движения, обязательно нужно указывать, по отношению к каким величинам ставится задача об устойчивости.*

Однако ясно также, что не всякая система величин Φ_s представит интерес для данной динамической задачи (в частности, для задач небесной механики), так как имеет смысл рассматривать только такие функции Φ_s, числовые значения которых прямо или косвенно могут быть выведены из наблюдений, измерений и вычислений. Другое замечание касается пределов, входящих в определение устойчивости. Из определения следует, что пределы L_s можно выбирать произвольно, однако нужно иметь в виду, что этот произвол диктуется характером и условиями задачи и указанные пределы часто определяются практическими требованиями. Что же касается чисел E_i и E_i', которых не должны превосходить числовые величины начальных возмущений, то они зависят от назначенных пределов L_s.

5. Поставленную общую задачу об устойчивости невозмущенного движения относительно заданных величин Φ_s можно привести к единообразной математической задаче об устойчивости нулевого решения нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка вида (2.1) относительно величин x_s.

Допустим, что заданные функции $\Phi_s(t\,|\,q_\sigma\,|\,\dot{q}_\sigma)$ не только сами непрерывны, конечны и однозначны, но и обладают таковыми же частными производными первого порядка и что $n = 2k$.

Положим теперь

$$x_s = \Phi_s - \Phi_s^{(0)} \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.9}$$

так что величины x_s представляют собой возмущения величин Φ_s. Нетрудно составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти возмущения x_s. Действительно, дифференцируя равенства (2.9) по t, мы получим

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{k}\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial q_\sigma}\frac{dq_\sigma}{dt} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{d\dot{q}_\sigma}{dt}\right) - \frac{d\Phi_s^{(0)}}{dt},$$

откуда в силу уравнений (2.5″) находим

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - \frac{d\Phi_s^{(0)}}{dt} + \sum_{\sigma=1}^{k}\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial \Phi_s}{\partial \dot{q}_\sigma}Q_\sigma\right). \tag{2.9′}$$

Правые части этих равенств выражены через t и величины q_s, $\dot{q}_s$, которые нужно исключить. Решая для этого уравнения (2.9) относительно q_s, $\dot{q}_s$, мы имеем

$$q_s = \psi_s(t\,|\,x_\sigma), \quad \dot{q}_s = \psi_s'(t\,|\,x_\sigma) \quad \begin{pmatrix} s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k \\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix},$$

а подставляя теперь найденные выражения для q_s, $\dot{q}_s$ в равенства (2.9′), мы приведем их к виду

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t\,|\,x_\sigma) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.10}$$

где правые части — известные функции от t и x_s.

Нетрудно убедиться притом, что, каковы бы ни были функции Φ_s, мы всегда будем иметь тождественно

$$X_s(t\,|\,0) \equiv 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, действительно, уравнения, которым удовлетворяют возмущения величин Φ_s, имеют вид (2.1), и эти уравнения имеют частное решение $x_s = 0$, соответствующее частному решению (2.6) уравнений движения (2.5″).

Поэтому и задача об устойчивости невозмущенного движения (2.6) относительно величин Φ_s действительно приводится всегда к задаче об устойчивости нулевого решения системы (2.10). Обозначая через $x_s^{(0)}$ начальные значения возмущений (2.9), так что

$$x_s^{(0)} = \Phi_s(t\,|\,\varphi_\sigma(t_0) + \varepsilon_\sigma\,|\,\dot{\varphi}_\sigma(t_0) + \varepsilon_\sigma') - \Phi_s(t\,|\,\varphi_\sigma(t_0)\,|\,\dot{\varphi}_\sigma(t_0)), \tag{2.10′}$$

мы видим, что, по свойству функций Φ_s, всякой системе вещественных значений ε_σ, ε'_σ будет соответствовать некоторая система вещественных значений величин $x_s^{(0)}$.

Притом, как бы ни было мало данное положительное число A, величины $|x_s^{(0)}|$ всегда можно сделать меньшими A, подчиняя ε_σ, ε'_σ условию, чтобы их числовые значения не превосходили достаточно малого, но отличного от нуля предела E. Предположим теперь, обратно, что, как бы ни было мало $E > 0$, всегда можно найти такое $A > 0$, чтобы всякой системе вещественных значений $|x_s^{(0)}| < A$ соответствовала одна или несколько систем вещественных значений ε_s, ε'_s, численно меньших E.

При этом условии начальные возмущения $x_s^{(0)}$ величин x_s могут играть такую же роль при решении вопроса об устойчивости, как и величины ε_s, ε'_s, если только заданием $x_s^{(0)}$ функции x_s, удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения (2.10), определяются вполне, что мы всегда будем предполагать.

Заметим еще, что уравнения (2.10) можно получить и другим путем. Действительно, перейдем в уравнениях (2.5″) от переменных q_s, $\dot{q}_s$ к новым переменным z_i $(i = 1, 2, \ldots, n = 2k)$ посредством преобразования

$$z_i = \Phi_i(t \mid q_j \mid \dot{q}_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.11}$$

где Φ_i — те самые функции, относительно которых должна быть разрешена задача об устойчивости. Уравнения движения системы в переменных z_s будут иметь вид

$$\frac{dz_s}{dt} = Z_s(t \mid z_\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.11'}$$

Пусть теперь нам известно некоторое частное решение системы (2.11′) $z_s = f_s(t)$, которому, очевидно, будет соответствовать некоторое частное решение системы (2.5″), т. е. некоторое движение нашей механической системы.

Тогда задача об устойчивости частного решения $f_s(t)$ уравнений (2.11′) относительно величин z_s равносильна задаче об устойчивости невозмущенного движения (2.6) относительно функций Φ_s.

Полагая теперь $x_s = z_s - f_s(t)$, мы имеем

$$\frac{dx_s}{dt} = Z_s(t \mid f_\sigma(t) + x_\sigma) - Z_s(t \mid f_\sigma(t)). \tag{2.12}$$

При помощи очевидных обозначений

$$X_s(t \mid x_\sigma) = Z_s(t \mid f_\sigma(t) + x_\sigma) - Z_s(t \mid f_\sigma(t)) \tag{2.12'}$$

эта система опять приводится к нормальному виду (2.10), причем из (2.12′) непосредственно ясно, что $X_s(t \mid 0) \equiv 0$.

Совершенно так же можно получить уравнения возмущенного движения и в том случае, когда исходные уравнения движения имеют каноническую форму.

Действительно, пусть уравнения движения имеют вид (2.5'''), и поставлена задача об устойчивости невозмущенного движения, представляемого решением $q_s = \varphi_s(t)$, $p_s = \psi_s(t)$ этой системы относительно $2k$ величин $\Phi_s(t \mid q_\sigma \mid p_\sigma)$, $\Psi_s(t \mid q_\sigma \mid p_\sigma)$.

Вводя вместо q_s, p_s новые переменные подстановкой

$$u_s = \Phi_s(t \mid q_\sigma \mid p_\sigma), \qquad v_s = \Psi_s(t \mid q_\sigma \mid p_\sigma),$$

мы получим новые уравнения движения, которые вообще не будут каноническими и запишутся в общем виде (2.11').

Но если заданные функции Φ_s, Ψ_s таковы, что

$$\sum_{\sigma=1}^{k} (p_\sigma\, dq_\sigma - v_\sigma\, du_\sigma)$$

есть полный дифференциал некоторой функции W, то преобразованные уравнения также будут каноническими, и мы имеем

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{\partial R}{\partial v_s}, \qquad \frac{dv_s}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial u_s}, \tag{2.13}$$

где $R = H + \frac{\partial W}{\partial t}$ есть новая характеристическая функция, которая должна быть выражена через t, u_s, v_s.

Частному решению $\varphi_s(t)$, $\psi_s(t)$ уравнений (2.5''') соответствует некоторое частное решение $f_s(t)$, $g_s(t)$ системы (2.13), и задача об устойчивости невозмущенного движения приводится к задаче об устойчивости частного решения новой системы относительно величин u_s, v_s. Полагая тогда

$$x_s = u_s - f_s(t), \quad y_s = v_s - g_s(t),$$

мы получим уравнения возмущенного движения в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial K}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial x_s}, \tag{2.13'}$$

с характеристической функцией, определяемой формулой

$$K(t \mid x_\sigma \mid y_\sigma) = R(t \mid f_\sigma(t) + x_\sigma \mid g_\sigma(t) + y_\sigma) + \\ + \sum_{\sigma=1}^{k} [x_\sigma \dot{g}_\sigma(t) - y_\sigma \dot{f}_\sigma(t)] - R(t \mid f_\sigma(t) \mid g_\sigma(t)),$$

причем, очевидно, что сама функция K и ее первые частные производные по x_s, y_s обращаются в нуль, когда все x_s, y_s равны нулю.

6. Теперь полезно рассмотреть в качестве примера важную для небесной механики задачу об устойчивости какого-либо кеплеровского движения.

Частный случай этой задачи отмечает уже на первых страницах своего знаменитого сочинения сам А. М. Ляпунов, желая подчеркнуть тот факт, что решение задачи об устойчивости зависит от выбора величин, по отношению к которым рассматривается эта задача. Приведем это место из сочинения А. М. Ляпунова полностью: «Если материальная точка, притягиваемая неподвижным центром обратно пропорционально квадрату расстояния, описывает круговую траекторию, то движение ее по отношению к радиусу-вектору, проведенному из центра притяжения, а также по отношению к ее скорости устойчиво. То же движение по отношению к прямоугольным координатам точки неустойчиво.

Если же рассматриваемая точка описывает эллиптическую траекторию, то движение ее неустойчиво не только по отношению к прямоугольным координатам, но и по отношению к радиусу-вектору и скорости. Но оно устойчиво, например, по отношению к величине

$$r - \frac{p}{1 + e\cos v},$$

где p и e — параметр и эксцентриситет эллипса, описываемого точкой в невозмущенном движении, а r и v — радиус-вектор точки в возмущенном движении и угол, составляемый им с наименьшим радиусом-вектором в невозмущенном движении».

Рассмотрим этот пример несколько более подробно.

Возьмем обычные уравнения кеплеровского движения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \dot{x}, && \frac{dy}{dt} = \dot{y}, && \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \\ &\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\mu x}{r^3}, && \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\mu y}{r^3}, && \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

общее решение которых можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= r\alpha, & \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\alpha e \sin v + \alpha'(1 + e\cos v)], \\ y &= r\beta, & \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\beta e \sin v + \beta'(1 + e\cos v)], \\ z &= r\gamma, & \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\gamma e \sin v + \gamma'(1 + e\cos v)], \end{aligned}\right\} \qquad (2.14')$$

где направляющие косинусы α, β, γ и α', β', γ' — известные функции от u, Ω, i и, кроме того,

$$u = v + \omega, \quad r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \quad t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2}. \qquad (2.14'')$$

Произвольными постоянными общего решения (2.14′) являются кеплеровские элементы орбиты Ω, i, ω, p, e, τ, однозначно определяемые начальными значениями координат и составляющих скорости, соответствующими начальной эпохе t_0. Обозначим эти начальные значения через x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$. Предположим, что эти значения не удовлетворяют условиям

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0} = \frac{\dot{y}_0}{y_0} = \frac{\dot{z}_0}{z_0},$$

при которых $p = 0$, $e = 1$ и орбита есть прямая линия.

Если обозначить еще через r_0 начальный радиус-вектор и через V_0 начальную скорость, то, как известно, тип орбиты определяется знаком постоянной $h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$, так что при $h < 0$ орбита есть эллипс, при $h > 0$ — гипербола, при $h = 0$ — парабола и при $h = -\frac{\mu}{r_0}$ — окружность.

Рассмотрим теперь какое-нибудь кеплеровское движение, которому соответствуют заданные начальные значения $x_0^{(0)}$, $y_0^{(0)}$, $z_0^{(0)}$, $\dot{x}_0^{(0)}$, $\dot{y}_0^{(0)}$, $\dot{z}_0^{(0)}$, $r_0^{(0)}$, $V_0^{(0)}$, и условимся называть это избранное нами движение *невозмущенным* (здесь — в смысле Ляпунова). Пусть те же буквы без верхнего индекса обозначают начальные данные какого-либо возмущенного (в смысле Ляпунова) движения, и допустим, что начальные возмущения $x_0 - x_0^{(0)}$, $y_0 - y_0^{(0)}$, $z_0 - z_0^{(0)}$, $r_0 - r_0^{(0)}$, $\dot{x}_0 - \dot{x}_0^{(0)}$, $\dot{y}_0 - \dot{y}_0^{(0)}$, $\dot{z}_0 - \dot{z}_0^{(0)}$, $V_0 - V_0^{(0)}$ могут быть выбраны численно сколь угодно малыми.

Тогда немедленно установим, что невозмущенное движение устойчиво по отношению к каждой из величин

$$h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,$$

которые в силу первых интегралов системы (2.14) являются известными, непрерывными функциями от координат и составляющих скорости. Действительно, в силу указанной непрерывности отмеченные величины изменятся бесконечно мало при бесконечно малом изменении начальных значений, а так как все они сохраняют в данном движении постоянные значения, то последующие возмущения этих величин всегда будут оставаться сколь угодно малыми, откуда и следует устойчивость рассматриваемого движения. Точно так же устанавливается устойчивость любого кеплеровского движения по отношению к каждому из элементов орбиты, а следовательно, для случая эллиптического движения, и по отношению к большой полуоси, среднему движению, периоду обращения и т. п.

Но по отношению к радиусу-вектору (а следовательно, и по отношению к скорости) эллиптическое кеплеровское движение будет неустойчивым.

Действительно, хотя при сколь угодно малых численно начальных возмущениях разность $T - T^{(0)}$ между периодами обращения возмущенного и невозмущенного движений также будет сколь угодно мала численно, но величина $r - r^{(0)}$ не может быть сделана сколь угодно малой для всех значений t. Это легко проверить. Пусть $t_0 = \tau^{(0)}$, и предположим, что разность

$$r_0 - r_0^{(0)} = r_0 - a^{(0)}(1 - e^{(0)})$$

весьма мала численно. После одного оборота, т. е. через время $T^{(0)}$, величина $r^{(0)}$ примет свое начальное значение, но r не будет равно r_0, так как $T \neq T^{(0)}$.

Поэтому после достаточно большого числа k обращений величина r может быть сделана сколь угодно близкой к $a(1+e)$ и разность $r(kT^{(0)}) - r^{(0)}(kT^{(0)})$ будет сколь угодно мало отличаться от величины $a(1+e) - a^{(0)}(1-e^{(0)})$, которая близка к $2a^{(0)}e^{(0)}$, т. е. есть величина конечная, что и обнаруживает неустойчивость эллиптического движения по отношению к r.

Рассматривая теперь формулы (2.14′) и проводя подобные рассуждения, мы установим также неустойчивость эллиптического движения по отношению к координатам и составляющим скорости.

Наконец, заметим, что обнаруженная неустойчивость не является абсолютной, так как если подчинить начальные возмущения условию $h - h^{(0)} = 0$, т. е. условию неизменяемости полной энергии, то большие полуоси, средние движения и периоды обращений будут одинаковы в невозмущенном и возмущенном движениях, а так как неустойчивость возникает, как показано, вследствие различия периодов, то ясно, что при равных периодах все разности $r - r^{(0)}$, $x - x^{(0)}$, $y - y^{(0)}$, $z - z^{(0)}$, $V - V^{(0)}$, $\dot{x} - \dot{x}^{(0)}$, $\dot{y} - \dot{y}^{(0)}$, $\dot{z} - \dot{z}^{(0)}$, будучи сколь угодно малыми численно в начальный момент, всегда будут оставаться сколь угодно малыми по числовой величине.

7. В заключение этого параграфа сделаем несколько дополнительных замечаний.

Прежде всего заметим, что весьма важным для многих приложений, особенно в небесной механике, случаем является тот, когда заданные величины $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ характеризуют только орбиты (или вообще траектории) точек, принадлежащих рассматриваемой механической системе. Тогда, ставя вопрос об устойчивости некоторого возмущенного движения по отношению к величинам такого рода, мы желаем узнать, будут или нет оставаться траектории возмущенного движения близкими к траекториям невозмущенного движения.

Такую задачу называют иногда задачей об орбитальной устойчивости. Ярким примером задачи такого рода является за-

дача об устойчивости кеплеровского движения относительно кеплеровских элементов планетных орбит в Солнечной системе.

Важнее обратить внимание на то, что хотя в теории Ляпунова мы и встречаемся с названиями «начальные или последующие возмущения», «уравнения возмущенного движения» и т. д., но постоянно действующих возмущающих сил в этой теории нет!

Возмущения в какой-либо момент времени обусловливаются исключительно начальными возмущениями, возникающими вследствие неизбежных ошибок при определении начальных данных либо вследствие некоторой мгновенной посторонней силы. Иными словами, и невозмущенное и всякое возмущенное движения определяются одними и теми же дифференциальными уравнениями, только с различными начальными условиями. Эффект посторонней, т. е. не учтенной при составлении дифференциальных уравнений, возмущающей силы проявляется только в том, что в некоторый момент, который мы принимаем за начальный, изменяются начальные условия, соответствующие невозмущенному движению.

Если мы желаем учитывать также постоянное действие неучтенных в данной задаче посторонних сил, то в этом случае нужно заменить (или дополнить) теорию А. М. Ляпунова, что возможно сделать, например, рассмотрением устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Для этого заменим систему (2.1) следующей системой:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) + R_s(t \mid x_\sigma), \tag{2.1''}$$

где R_s — дополнительные функции, не обращающиеся в нуль в начале координат, так что

$$R_s(t \mid 0) \neq 0,$$

и которые, вообще, могут оставаться неизвестными и неопределимыми аналитически и проявляются только своими свойствами.

Определение устойчивости нулевого решения системы (2.1) при постоянно действующих возмущениях можно сформулировать следующим образом:

Определение. *Невозмущенное движение, т. е. нулевое решение*

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

системы (2.1), *называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, обусловленных функциями* $R_s(t \mid x_\sigma)$, *если всякому, произвольно задаваемому положительному числу* $\varepsilon \leqslant A$ *соответствуют такие положительные числа* $\lambda \leqslant \varepsilon$ *и* r, *зависящие от* ε, *что при всяких начальных условиях* $x_s^{(0)}$, *удовлетворяющих*

условиям

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda,$$

и при всяких функциях R_s, *удовлетворяющих при* $|x_s| < \varepsilon$ *и* $t > t_0$ *неравенствам*

$$|R_s(t \mid x_\sigma)| < r,$$

всякое решение $x_s(t)$ *системы* (2.1) *будет удовлетворять для всякого* $t > t_0$ *условиям*

$$|x_s(t)| < \varepsilon.$$

В противном случае нулевое решение системы (2.1) *называется неустойчивым при постоянно действующих возмущениях, как бы ни была мала их амплитуда* r.

Последнее замечание относится к следующему вопросу. Может случиться, и это будет наиболее общим случаем, что движение интересующей нас механической системы может быть рассматриваемо только в течение некоторого промежутка времени, начиная от начального момента t_0 до некоторого конечного момента $\bar{t} > t_0$, за пределами которого рассматривать задачу по каким-либо причинам не имеет смысла или не представляет интереса. Определения теории устойчивости в смысле Ляпунова, равно как и определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях, и в этих случаях не утрачивают значения. Только в определениях фразу «... для всех значений $t > t_0$ ...» следует заменить словами «... для всех значений t в промежутке $(t_0, \bar{t})$ ...».

При этом, если невозмущенное движение неустойчиво в смысле Ляпунова, то это означает, что величина τ, играющая роль в определении неустойчивости, такова, что $\tau < \bar{t}$. Таким образом, если невозмущенное движение неустойчиво, то последующие возмущения не способны оставаться численно меньшими назначенного предела ε в течение всего того промежутка времени, когда имеет смысл рассматривать данное движение.

§ 2. Основы второго метода А. М. Ляпунова

1. Как мы видели, всякая задача об устойчивости заданного невозмущенного движения относительно даных функций обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени всегда может быть приведена к единообразной математической задаче об устойчивости нулевого решения нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка, вида (2.1), относительно величин x_s.

Эта последняя задача, конечно, может быть разрешена без особых затруднений, если система (2.1) интегрируема, т. е. если возможно получить явные выражения для x_s как функций вре-