условиям

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda,$$

и при всяких функциях R_s, *удовлетворяющих при* $|x_s| < \varepsilon$ *и* $t > t_0$ *неравенствам*

$$|R_s(t \mid x_\sigma)| < r,$$

всякое решение $x_s(t)$ *системы* (2.1) *будет удовлетворять для всякого* $t > t_0$ *условиям*

$$|x_s(t)| < \varepsilon.$$

В противном случае нулевое решение системы (2.1) *называется неустойчивым при постоянно действующих возмущениях, как бы ни была мала их амплитуда* r.

Последнее замечание относится к следующему вопросу. Может случиться, и это будет наиболее общим случаем, что движение интересующей нас механической системы может быть рассматриваемо только в течение некоторого промежутка времени, начиная от начального момента t_0 до некоторого конечного момента $\bar{t} > t_0$, за пределами которого рассматривать задачу по каким-либо причинам не имеет смысла или не представляет интереса. Определения теории устойчивости в смысле Ляпунова, равно как и определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях, и в этих случаях не утрачивают значения. Только в определениях фразу «... для всех значений $t > t_0$ ...» следует заменить словами «... для всех значений t в промежутке $(t_0, \bar{t})$ ...».

При этом, если невозмущенное движение неустойчиво в смысле Ляпунова, то это означает, что величина τ, играющая роль в определении неустойчивости, такова, что $\tau < \bar{t}$. Таким образом, если невозмущенное движение неустойчиво, то последующие возмущения не способны оставаться численно меньшими назначенного предела ε в течение всего того промежутка времени, когда имеет смысл рассматривать данное движение.

§ 2. Основы второго метода А. М. Ляпунова

1. Как мы видели, всякая задача об устойчивости заданного невозмущенного движения относительно даных функций обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени всегда может быть приведена к единообразной математической задаче об устойчивости нулевого решения нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка, вида (2.1), относительно величин x_s.

Эта последняя задача, конечно, может быть разрешена без особых затруднений, если система (2.1) интегрируема, т. е. если возможно получить явные выражения для x_s как функций вре-

мени и n произвольных постоянных $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих уравнениям (2.1). Несколько примеров такого рода мы привели в предыдущем параграфе.

Однако, как хорошо известно, не существует никакого общего метода для такого интегрирования, так что, вообще говоря, уравнения (2.1) являются неинтегрируемыми, вследствие чего задача об устойчивости превращается в исключительно важную проблему качественной теории дифференциальных уравнений, а методы решения этой задачи являются одновременно методами качественной теории, или *качественными методами*.

Сам А. М. Ляпунов предложил два метода решения задачи об устойчивости, которые он назвал соответственно «первой методой» и «второй методой».

Первый метод, или *метод характеристических чисел*, основывается на разыскании общего решения системы (2.1) в виде бесконечных рядов особого вида, исследование которых и позволяет в ряде случаев решить поставленную задачу об устойчивости. Второй метод, или *прямой метод Ляпунова* (метод функций V Ляпунова), не зависит вовсе от разыскания тех или иных рядов, удовлетворяющих уравнениям возмущенного движения, а основывается на разыскании некоторых функций, удовлетворяющих некоторым, достаточно общим условиям.

Применение первого метода всегда требует длительных вычислений и громоздких выкладок, связанных с употреблением бесконечных рядов, а вместе с тем и тонких исследований сходимости, а поэтому этот метод оказывается мало удобным для решения вопроса об устойчивости и редко применяется.

Второй метод является гораздо более простым и вместе с тем более эффективным, и его мы здесь только и рассмотрим.

Пусть V — вещественная функция вещественных переменных $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, подчиненных условиям

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.15}$$

где t_0 — начальный момент и H — некоторая, отличная от нуля постоянная.

При этом всегда будем предполагать, что рассматриваемая функция V непрерывна и однозначна в области (2.15) и уничтожается, когда все x_s равны нулю (при любом t).

Одновременно с функцией V будем рассматривать также ее полную производную по t, взятую в предположении, что величины x_s, рассматриваемые как функции t, удовлетворяют уравнениям возмущенного движения (2.1).

Обозначая эту производную через V', имеем

$$V' = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s, \tag{2.16}$$

причем очевидно, что V' есть, так же как и V, непрерывная, однозначная функция переменных t, x_s в области (2.15), обращающаяся в нуль при одновременном равенстве нулю всех x_s.

Функция $V(t|x_\sigma)$ рассматриваемого характера называется обыкновенно *функцией Ляпунова*. Ясно, что функция $V'(t|x_\sigma)$, определенная формулой (2.16), или *производная функции V в силу уравнений возмущенного движения* также есть функция Ляпунова.

Кроме уже упомянутых свойств, функция Ляпунова может обладать и другими более специальными свойствами, для которых введем, следуя А. М. Ляпунову, некоторые особые названия.

Пусть при условиях (2.15) рассматриваемая функция V принимает, кроме равных нулю, значения только одного знака.

Такую функцию будем называть *знакопостоянной*. Когда же будет желательно отметить ее знак, то будем говорить, что она есть функция *положительная* или *отрицательная*.

Если функция V при условиях (2.15) может получать как положительные, так и отрицательные значения, то будем называть ее *знакопеременной функцией*.

Если знакопостоянная функция V не зависит от t, а постоянная H может быть выбрана достаточно малой для того, чтобы при условиях (2.15) функция V обращалась в нуль только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (т. е. только в начале координат), то такую функцию будем называть *знакоопределенной*, а желая обратить внимание на ее знак, — *знакоопределенной положительной* или *знакоопределенной отрицательной*.

Функцию V, зависящую от t, будем называть знакоопределенной только при условии, если для нее возможно найти такую не зависящую от t определенно положительную функцию W, чтобы выполнялось одно из двух неравенств:

$$V \geqslant W \quad \text{или} \quad -V \geqslant W.$$

Так, например, каждая из двух функций

$$e^{-t}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2), \quad e^t(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \qquad (t_0 = 0)$$

есть знакопостоянная положительная функция. Но первая есть только знакопостоянная, а вторая является также знакоопределенной.

Допустим теперь, что рассматриваемая функция V такова, что для ее числовых значений существует при условиях (2.15) некоторый положительный высший предел, т. е. существует такое постоянное число $L > 0$, что при $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant H$ выполняется неравенство $|V| \leqslant L$.

Функцию V, удовлетворяющую этому условию, будем называть *ограниченной*, а в противном случае — *неограниченной*.

Так, из двух вышеприведенных функций первая — ограниченная, а вторая — неограниченная. Полезно отметить, кроме того, что всякая функция Ляпунова, не зависящая от t, есть всегда функция ограниченная, что вытекает просто из условия непрерывности этой функции.

Введем теперь важное понятие бесконечно малого высшего предела для функции Ляпунова.

Ограниченная функция V может быть такова, что для всякого положительного ε, как бы мало оно ни было, найдется такое отличное от нуля число h, при котором для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

будет выполняться неравенство $|V| \leqslant \varepsilon$. Тогда мы будем говорить, что функция V допускает бесконечно малый высший предел (или V имеет бесконечно малый высший предел).

Очевидно, что всякая функция Ляпунова, не зависящая от времени, заведомо допускает бесконечно малый высший предел в силу непрерывности, так как для такой функции определение существования бесконечно малого высшего предела просто совпадает с определением непрерывности.

Но функции, зависящие от t, хотя бы и ограниченные, могут не иметь бесконечно малого высшего предела, что показывают следующие простые примеры:

$$\sin[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)t], \quad 1 - \cos[(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)t^2],$$

так как каждую из этих функций при сколь угодно малых $|x_s|$ можно сделать по числовой величине сколь угодно близкой к единице.

Функция Ляпунова, допускающая бесконечно малый высший предел, обладает одним важным свойством, заключающимся в следующем.

Пусть V — функция, допускающая бесконечно малый высший предел. Тогда, *если нам известно, что переменные удовлетворяют условиям $t \geqslant t_0$, $|V| \geqslant l$, где l есть некоторое положительное число, то отсюда следует, что обязательно найдется некоторое другое положительное число λ, меньше которого не может быть наибольшая из величин $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$.*

Доказательство заключается в простом рассуждении от противного. Действительно, если бы такое число λ не существовало, то все $|x_s|$ можно было бы выбрать сколь угодно малыми, а тогда, по свойству бесконечно малого высшего предела, и $|V|$ было бы сколь угодно малым, что противоречит условию. Поэтому, если обозначим через x наибольшую из $|x_s|$, то при заданном l обязательно найдется такое λ, зависящее от l, что при условии $|V| \geqslant l$ будем иметь неравенство $x \geqslant \lambda$.

Нам понадобится в дальнейшем еще одно свойство функций А. М. Ляпунова. Пусть W — некоторая знакоопределенная положительная функция, не зависящая от t. Рассмотрим всевозможные системы значений независимых переменных x_s, удовлетворяющих условию $x = \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < H$.

Всякой системе значений x_s, удовлетворяющих этому условию, соответствует некоторое определенное значение функции W, которое заведомо не равно нулю и положительно (в силу свойства функции W как знакоопределенной положительной). Среди всех этих значений найдется одно, по крайней мере наименьшее, которое обозначим через l. Иными словами, l есть точная низшая граница значений функции W, когда переменные удовлетворяют условию $x = \varepsilon$.

2. Переходим к установлению теорем А. М. Ляпунова, дающих достаточные условия устойчивости. Основная теорема гласит:

Первая теорема Ляпунова. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой V' в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Доказательство. Пусть найденная функция V — знакоопределенно положительна, а V' — отрицательная функция или тождественно равна нулю *). Тогда найдется такая, не зависящая от t определенно положительная функция W, что при условиях (2.15) будут иметь место неравенства

$$V(t \mid x_\sigma) \geqslant W(x_\sigma), \quad V'(t \mid x_\sigma) \leqslant 0. \tag{2.17}$$

Согласно определению понятия устойчивости (разд. 2 § 1) нужно показать, что для всякого положительного $\varepsilon < H$ можно найти такое положительное $\lambda < \varepsilon$, что при любых вещественных начальных возмущениях $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих неравенствам $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$, мы будем иметь для всякого $t \geqslant t_0$ следующие неравенства: $|x_s(t)| < \varepsilon$.

Пусть задано отличное от нуля положительное $\varepsilon < H$, и пусть l — точная низшая граница функции $W(x_\sigma)$ при условии, что $x = \varepsilon$. Рассмотрим функцию $V(t_0 | x_\sigma)$, не зависящую от t и стало быть допускающую бесконечно малый высший предел. Поэтому для найденного l (зависящего от ε), обязательно найдется такое λ (зависящее от l, а следовательно, и от ε), что для значений переменных, удовлетворяющих условиям $|x_s| \leqslant \lambda$,

*) Полезно отметить, что если функция V' тождественно равна нулю, то $V = \text{const}$ есть первый интеграл системы (2.1).

значения функции $V(t_0|x_\sigma)$ будут удовлетворять неравенству

$$V(t_0|x_\sigma) < l.$$

Выберем теперь начальные возмущения $x_s^{(0)}$ согласно условию

$$|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

и обозначим через V_0 соответствующее значение функции V, так что

$$V_0 = V(t_0|x_\sigma^{(0)}) < l.$$

Из соотношения

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} V' \, dt, \tag{2.18}$$

согласно неравенствам (2.17), немедленно выведем, что функции x_s, удовлетворяющие системе (2.1) и начальным условиям $x_s^{(0)}$, выполняющим неравенства $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$, для всякого $t \geqslant t_0$ будут удовлетворять условиям

$$W(x_\sigma) \leqslant V(t|x_\sigma) \leqslant V_0 < l,$$

а следовательно, и условиям

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

так как l — точная низшая граница функции W для всех значений x_s, удовлетворяющих условию $x = \varepsilon$.

Этим самым теорема и доказана.

Пример: пусть даны уравнения с периодическими коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = -\cos^2 t \cdot x + (\sin t \cos t + 1) \cdot y,$$

$$\frac{dy}{dt} = (\sin t \cos t - 1) \cdot x - \sin^2 t \cdot y.$$

Чтобы исследовать устойчивость нулевого решения предложенной системы, зададим функцию Ляпунова в виде

$$V = x^2 + y^2.$$

Производная от этой функции в силу предложенных уравнений приведется к виду

$$V' = -2(x \cos t - y \sin t)^2.$$

Очевидно, что V' есть знакопостоянная отрицательная функция. А так как сама функция V знакоопределенная положительная, то, по доказанной теореме, невозмущенное движение устойчиво.

Заметим, что общее решение заданной системы имеет вид

$$x = x_0 e^{-t} \cos t + y_0 \sin t,$$
$$y = -y_0 e^{-t} \sin t + y_0 \cos t,$$

что подтверждает сделанное заключение.

Из доказанной теоремы Ляпунова вытекает, как частный случай, известная теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной механической системы в случае, когда силовая функция имеет в положении равновесия изолированный максимум. Действительно, пусть движение системы определяется уравнениями (2.5), где $U = U(q_\sigma)$, а T — квадратичная форма от p_σ, не зависящая от времени.

Тогда $H = T - U$ и положению равновесия соответствует частное решение уравнений (2.5‴) вида

$$q_s = \alpha_s, \quad p_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

где α_s — постоянные, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

Рассматривая положение равновесия как невозмущенное движение, имеем уравнения возмущенного движения в виде (2.13′), где $x_s = q_s - \alpha_s$, $y_s = p_s$ и

$$K(x_\sigma \mid y_\sigma) = H(\alpha_\sigma + x_\sigma, y_\sigma) - H(\alpha_\sigma \mid 0) = T - [U(\alpha_\sigma + x_\sigma) - U(\alpha_\sigma)].$$

Если $U(\alpha_\sigma)$ — изолированный максимум функции U, то при достаточно малых $|x_s|$ имеем

$$U(\alpha_\sigma + x_\sigma) - U(\alpha_\sigma) < 0,$$

а следовательно, K — положительная функция от x_s, y_s (T — заведомо положительна), обращающаяся в нуль только при $x_s = y_s = 0$. Таким образом, K есть знакоопределенная положительная функция, а так как она не зависит от времени, то ее производная в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю, а поэтому, по теореме Ляпунова, невозмущенное движение (т. е. положение равновесия) действительно устойчиво, и теорема Лагранжа доказана.

Рассмотрим теперь теорему об асимптотической устойчивости, которую сформулируем следующим образом *):

Вторая теорема Ляпунова. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно*

*) В сочинении А. М. Ляпунова эта теорема формулирована только в виде примечания к основной теореме об устойчивости. В виде отдельной теоремы это примечание сформулировано впервые мною в 1935 г. в дополнении к переводу книги: Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935.

найти знакоопределенную функцию V, допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой V' в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Доказательство. Пусть найденная функция V определенно положительна, а V' определенно отрицательна.

Тогда существует такое $H \leqslant A$ и такие две, не зависящие от времени, знакоопределенные положительные функции W и W', что при $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant H$ мы будем иметь

$$V(t \mid x_\sigma) \geqslant W(x_\sigma), \quad -V'(t \mid x_\sigma) \geqslant W'(x_\sigma). \tag{2.19}$$

Так как найденная функция V заведомо удовлетворяет условиям первой теоремы, то, задав произвольно число $\lambda < H$, можно найти такое положительное $\bar{\varepsilon}$ $(\lambda < \bar{\varepsilon} < H)$, что, выбрав начальные значения согласно условиям $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$, мы будем иметь для всякого $t \geqslant t_0$ неравенства $|x_s(t)| < \bar{\varepsilon}$.

А тогда можно найти такое положительное число $h < \bar{\varepsilon}$ (зависящее от $\bar{\varepsilon}$, а следовательно и от λ), что последующие возмущения для всякого $t \geqslant t_0$ будут удовлетворять условиям $|x_s| \leqslant h < \bar{\varepsilon} < H$.

Докажем теперь, что если неравенства $|x_s| \leqslant h$ выполняются для всякого $t \geqslant t_0$, то в силу свойств найденной функции V нельзя найти такое положительное число l, которое было бы меньше всех значений, получаемых функцией $V(t \mid x_\sigma)$ во всяком возмущенном движении, для которого $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$.

Докажем это вспомогательное предложение методом от противного. Допустим, что существует такое l, что при условиях $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant h$ мы имеем постоянно $V > l$. Тогда, по свойству функции $V(t \mid x_\sigma)$, как допускающей бесконечно малый высший предел, найдется такое положительное $\bar{\lambda}$ (разумеется, меньшее чем h), что мы будем иметь $x > \bar{\lambda}$ для всякого $t \geqslant t_0$.

Но тогда функция $-V'$ будет иметь некоторый положительный низший предел. Действительно, при условиях $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant h$ (так как $h < H$) мы имеем $-V' \geqslant W'$, причем W' обращается в нуль, только когда все x_s суть нули. Но последний случай будет исключен, если переменные подчинить условию $\bar{\lambda} \leqslant x \leqslant h$, а поэтому при этих условиях W' будет иметь некоторый положительный низший предел, так что будем иметь $-V' \geqslant W' > l'$. Но тогда из (2.18) немедленно выведем

$$V < V_0 - l'(t - t_0)$$

для всякого $t \geqslant t_0$, что невозможно, так как правая часть этого неравенства при достаточно большом t делается отрицательной. Полученное противоречие показывает, что, каково бы ни было

число l, всегда наступит момент $t = \tau$, когда функция V сделается равной l. А так как V' в рассматриваемом возмущенном движении постоянно отрицательна, то для всякого $t \geqslant t_0$ функция V будет всегда оставаться меньшей l (в силу свойства монотонно убывающей функции).

Установив это, выберем произвольно число $\varepsilon < \lambda$ и рассмотрим всевозможные системы значений величин x_s, удовлетворяющих условию

$$\varepsilon \leqslant x \leqslant h. \tag{2.20}$$

Пусть l — точный низший предел W при условии (2.20) зависящий, очевидно, от ε и h, т. е. от ε и λ. Согласно доказанному выше обязательно наступит момент $\tau > t_0$, когда функция V сделается и будет затем оставаться меньше определенного так числа l.

А тогда, начиная по крайней мере с этого момента τ, будем иметь $|x_s(t)| < \varepsilon$, откуда следует, что при $|x_s^{(0)}| \leqslant \lambda$ будем необходимо иметь $\lim\limits_{t \to \infty} x_s(t) = 0$, а следовательно, теорема доказана.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть предложены уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x - y + (x - y)(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = +x - y + (x + y)(x^2 + y^2),$$

и требуется исследовать устойчивость нулевого решения этих уравнений относительно величин x и y.

Рассмотрим функцию V вида

$$V = x^2 + y^2,$$

которая, очевидно, есть знакоопределенная, положительная. В силу заданных уравнений находим

$$V' = -2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2),$$

что будет знакоопределенной отрицательной функцией при

$$x^2 + y^2 < 1.$$

Поэтому, если начальные значения x_0, y_0 выбраны согласно условию

$$x_0^2 + y_0^2 < 1,$$

то будем иметь

$$\lim_{t \to \infty} (x^2 + y^2) = 0,$$

что показывает, что нулевое решение предложенных уравнений устойчиво асимптотически.

3. Рассмотрим теперь теоремы А. М. Ляпунова, устанавливающие достаточные условия неустойчивости. Этих теорем — две *).

Третья теорема Ляпунова. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной V', притом допускала бы бесконечно малый высший предел и была бы такова, чтобы при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, численно насколько угодно малых, ее можно было сделать величиной одинакового знака с ее производной, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Допустим, что найдена функция V, удовлетворяющая этим требованиям, и что производная ее V' — функция знакоопределенная положительная. Для этой функции найдутся такие две постоянные t_0 и H (t_0 рассматриваем как начальный момент), при которых для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям (2.15), будут выполняться следующие:

$$V'(t\,|\,x_\sigma) \geqslant W(x_\sigma), \quad |V(t\,|\,x_\sigma)| < L,$$

где L — некоторая положительная постоянная, а W — не зависящая от t положительная функция, не уничтожающаяся при условиях (2.15) иначе, как при равенстве нулю всех x_s.

Тогда, предполагая, что начальные возмущения $x_s^{(0)}$ выбраны согласно условиям $|x_s^{(0)}| < H$, выведем из формулы (2.18)

$$V(t\,|\,x_\sigma) > V(t_0\,|\,x_\sigma^{(0)}) = V_0 \tag{2.21}$$

для всех значений $t \geqslant t_0$ и удовлетворяющих требованию, чтобы в промежутке от t_0 до t условия $|x_s| \leqslant H$ оставались постоянно выполненными.

Мы замечаем теперь, что по свойству функции V постоянную t_0 можно предположить достаточно большой для того, чтобы надлежащим выбором величин $x_s^{(0)}$, удовлетворяющих условиям $|x_s^{(0)}| < \lambda$ при всяком отличном от нуля, но сколь угодно малом положительном λ, величину V_0 можно было сделать положительной.

Если же $V_0 > 0$, то по свойству бесконечно малого высшего предела найдем такое положительное число ε, которое будет менее всех значений, возможных при условии (2.21) (когда

*) В сочинении Ляпунова теоремы о неустойчивости называются второй и третьей. Но мы называем второй теоремой теорему об асимптотической устойчивости, а поэтому здесь теоремы о неустойчивости именуются третьей и четвертой теоремами второго метода.

$t \geqslant t_0$) для наибольшей x из величин $|x_s|$. А тогда, если l есть какое-либо положительное число, меньшее всех значений, возможных для функции W при условии $\varepsilon \leqslant x \leqslant H$, то из (2.18) и (2.21) выведем следующее неравенство:

$$V > V_0 + l(t - t_0), \tag{2.22}$$

которому будет удовлетворять функция V для $t > t_0$, если в промежутке от t_0 до t условия $|x_s| \leqslant H$ никогда не нарушаются.

Но при тех же условиях функция V должна оставаться численно меньше, чем L. А это условие может существовать совместно с неравенством (2.22) только при значениях t, меньших числа

$$\tau = t_0 + \frac{L - V_0}{l}.$$

Поэтому надо допустить, что в промежутке от t_0 до τ найдется такое значение t, начиная с которого по крайней мере одно из условий $|x_s| \leqslant H$ перестанет быть постоянно выполненным. Таким образом, убеждаемся в том, что как бы ни было мало λ, которого по нашему желанию не должны превосходить числовые значения $x_s^{(0)}$, но если последние выбраны так, чтобы было $V_0 > 0$, то всегда наступит момент, когда по крайней мере одна из величин $|x_s|$ достигнет неизменного предела H (а значит, и всякого другого заданного предела ε, меньшего H). А этим и обнаруживается неустойчивость невозмущенного движения.

Примечание. Может случиться, что найденная функция V, удовлетворяя условиям теоремы, есть знакоопределенная функция. Тогда (если $V > 0$) условие $V_0 > 0$ будет выполняться для всяких, численно достаточно малых, начальных возмущений $x_s^{(0)}$. Следовательно, в этом случае невозмущенное движение будет абсолютно неустойчиво.

Рассмотрим для примера следующую систему:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)y + m(t)y(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = q(t)x - p(t)y + m(t)x(x^2 + y^2),$$

где $p(t)$, $q(t)$, $m(t)$ — непрерывные при $t \geqslant t_0$ функции времени.

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = xy,$$

которая является знакопеременной ограниченной функцией.

В силу заданных уравнений находим

$$V' = q(t)(x^2 + y^2) + m(t)(x^2 + y^2)^2,$$

и если функции $q(t)$ и $m(t)$ таковы, что для всякого значения $t \geqslant T > t_0$ мы имеем

$$q(t) \geqslant q_0 > 0, \quad m(t) \geqslant 0,$$

то V' есть знакоопределенная положительная функция.

Так как функцию V можно всегда сделать надлежащим выбором x и y, численно насколько угодно малых, величиной положительной, то условия третьей теоремы выполнены и, следовательно, нулевое решение предложенных уравнений неустойчиво относительно величин x и y.

Четвертая теорема Ляпунова. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ограниченную функцию V, производная которой в силу этих уравнений приводилась бы к виду*

$$V' = \chi V + W, \tag{2.23}$$

где χ — или положительная постоянная, или такая положительная функция времени, что интеграл от χ в пределах от t_0 до t расходится, а W или тождественно равна нулю, или знакопостоянна, и если в последнем случае найденная функция V такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, насколько угодно численно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с W, то невозмущенное движение неустойчиво *).

Доказательство. Пусть найденная функция V, удовлетворяющая этим требованиям, такова, что W есть функция положительная. По свойству функций V и W найдутся такие постоянные t_0 (что примем за начальный момент) и H, при которых для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям вида (2.15), будут выполняться следующие:

$$|V(t \mid x_\sigma)| < L, \quad W(t \mid x_\sigma) \geqslant 0,$$

где L — некоторая положительная постоянная. Притом постоянную t_0 можем предположить достаточно большой для того, чтобы надлежащим выбором начальных возмущений $x_s^{(0)}$ соответствующее значение $V_0 = V(t_0 \mid x_\sigma^{(0)})$ функции V можно было сделать положительным.

Тогда при $t > t_0$ из соотношения (2.23) имеем

$$\frac{dV}{dt} - \chi V \geqslant 0 \tag{2.23'}$$

для всех значений t, при которых $|x_s| \leqslant H$.

---

*) Функция W может быть и знакоопределенной. Отметим еще, что в формулировке Ляпунова χ есть постоянная.

Поэтому, если от t_0 до t эти условия постоянно выполняются, то будем иметь

$$V \geqslant V_0 e^{\int_{t_0}^{t} \chi\, dt}$$

и, следовательно,

$$L > V_0 e^{\int_{t_0}^{t} \chi\, dt}.$$

Но при положительном V_0 последнее неравенство может иметь место только для значений t, меньших величины τ, определяемой формулой

$$\int_{t_0}^{\tau} \chi(t)\, dt = \ln \frac{L}{V_0}.$$

Поэтому в промежутке от t_0 до t условия $|x_s(t)| < H$ не могут постоянно выполняться.

Отсюда так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, заключаем, что невозмущенное движение неустойчиво.

Если $W \equiv 0$, то неравенство (2.23′) сделается равенством, откуда найдем $V = V_0 e^{\int_{t_0}^{t} \chi\, dt}$, а дальнейший ход доказательства не изменится. (В этом случае равенство $V e^{-\int_{t_0}^{t} \chi\, dt} = V_0 = \text{const}$ будет, очевидно, одним из первых интегралов уравнений возмущенного движения (2.1).)

Рассмотрим пример. Пусть даны уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \chi(t)\, x + p(t)\, y + m(t)\, x (x^2 - y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = p(t)\, x + \chi(t)\, y + m(t)\, y (x^2 - y^2),$$

где $\chi(t)$, $p(t)$, $m(t)$ — непрерывные при $t \geqslant t_0$ функции времени.

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = x^2 - y^2$$

— ограниченную знакопеременную функцию.

В силу предложенных уравнений находим

$$V' = 2\chi(t)(x^2 - y^2) + 2m(t)(x^2 - y^2)^2$$

или

$$V' = 2\chi(t)\, V + W,$$

где положено

$$W = 2m(t)(x^2 - y^2)^2.$$

Поэтому, какова бы ни была функция $p(t)$, если $m(t) \geqslant 0$, и если χ есть или положительная постоянная, или такая положительная функция t, что интеграл

$$\int_{t_0}^{t} \chi(t)\, dt$$

расходится при $t \to \infty$, то нулевое решение данных уравнений неустойчиво относительно величин x и y.

Примечание 1. До сих пор мы предполагали, что для последующих возмущений $x_s^{(0)}$ возможны всякие вещественные значения, по крайней мере достаточно малые численно. Но могут встретиться случаи, когда по самому значению этих переменных для некоторых из них возможны величины только одного из двух знаков. Для этого, конечно, дифференциальные уравнения (2.1) должны быть таковы, чтобы условия эти, которые будут вида

$$x_i \geqslant 0, \quad x_j \leqslant 0,$$

выполнялись во все время движения, будучи выполнены в начальный момент.

В подобных случаях, применяя третью и четвертую теоремы надо иметь в виду, чтобы функция V была способна принимать нужный знак, когда учитываются написанные выше условия.

Примечание 2. Полезно отметить, что доказанные нами теоремы не дают сами по себе никакого способа для нахождения, или построения, нужной функции V.

Поэтому, желая рассмотреть какую-либо задачу об устойчивости при помощи теорем второго метода Ляпунова, мы должны как-то подобрать необходимую функцию V, что вообще не является простой задачей.

Обычно в приложениях стараются использовать функции Ляпунова возможно более простого вида, например в виде линейной или квадратичной формы от величин x_s с какими-либо, лучше всего с постоянными, коэффициентами. В ряде случаев такой подбор, как будет видно из дальнейшего, оказывается возможным и задача об устойчивости может быть решена.

Примечание 3. Независимая переменная t не обязательно должна быть временем, но, во всяком случае, это будет величина, являющаяся однозначной, непрерывной и монотонно возрастающей функцией от времени.

4. Рассмотренные выше теоремы второго метода А. М. Ляпунова, устанавливающие достаточные признаки устойчивости или

неустойчивости нулевого решения дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1), дополним теперь важной теоремой об устойчивости невозмущенного движения при постоянно действующих возмущениях. Эта теорема, равно как и основное определение, приведенное в конце § 1 этой главы, были установлены впервые автором этой книги в 1940 г. В 1944 г. теорема была несколько обобщена И. Г. Малкиным, доказательство которого мы здесь и приводим.

Теорема Дубошина—Малкина. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (2.1) *существует знакоопределенная положительная функция* $V(t|x_\sigma)$, *производная которой в силу этих уравнений есть функция определенно отрицательная с ограниченными в области* (2.15) *частными производными* $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, *то невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство: согласно условиям теоремы существует такое положительное число $H \leqslant A$ и такие две, не зависящие от времени знакоопределенные положительные функции $W(x_\sigma)$ и $W'(x_\sigma)$, что при $t \geqslant t_0$ и $|x_s| \leqslant H$ мы будем иметь неравенства

$$\left.\begin{aligned} V(t|x_\sigma) &\geqslant W(x_\sigma), \\ -V'(t|x_\sigma) &\geqslant W'(x_\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{2.2'}$$

Теперь, на основании известной теоремы о среднем, мы можем написать

$$V(t|x_\sigma) = \sum_{s=1}^{n} x_s V'_{x_s}(t|\theta x_\sigma),$$

где $0 < \theta < 1$. Так как производные $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, по условию теоремы, ограничены, то для всякого положительного числа h, как бы мало оно ни было, можно найти такое положительное число l, что при $t \leqslant t_0$, $|x_s| < h$ мы будем иметь

$$V(t|x_\sigma) < l. \tag{2.3''}$$

Таким образом, найденная функция V допускает бесконечно малый высший предел.

Обозначим, как и ранее, через x наибольшую из величин $|x_s|$ и через l' точный нижний предел функции W' при условии $\varepsilon \leqslant x \leqslant H$, где ε — произвольно заданное положительное число, меньшее H.

Тогда из неравенств (2.2′) выводим при $t \geqslant t_0$, $x \geqslant \varepsilon$

$$V(t|x_\sigma) \geqslant l'. \tag{2.4'}$$

Пусть, далее, l — положительное число, меньшее l'. Рассмотрим всевозможные значения переменных x_s, удовлетворяющие

условию

$$V(t \mid x_\sigma) = l'. \tag{2.5^{IV}}$$

Из (2.4′) следует, что для всех таких значений величин x_s выполняется условие $x \geqslant \lambda$, где λ — некоторое достаточно малое положительное число. Кроме того, из (2.4′) следует, что для всех таких значений x_s выполняется условие $x < \varepsilon$ и, следовательно, для всех t и при x_s, удовлетворяющих (2.5^{IV}), выполняется второе из неравенств (2.2′). Мы можем поэтому написать:

$$V'(t \mid x_\sigma) \leqslant -k^2,$$

где k^2 отлично от нуля, так как $x \geqslant \lambda$.

Но тогда в силу ограниченности производных от функции $V(t \mid x_\sigma)$ можно найти настолько малое число $r > 0$, чтобы при

$$|R_s(t \mid x_\sigma)| \leqslant r \tag{2.6′}$$

и значениях x_s, удовлетворяющих (2.5^{IV}), выполнялось неравенство

$$\frac{dV}{dt} = V' + \sum_{s=1}^{n} R_s \frac{\partial V}{\partial x_s} < 0. \tag{2.7′}$$

Будем теперь рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (2.1″), т. е. уравнениям

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t \mid x_\sigma) + R_s(t \mid x_\sigma),$$

в предположении, что выполняются неравенства (2.6′).

Начальные значения величин x (при $t = t_0$) выберем, согласно условиям

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \tag{2.8″}$$

где положительное число η настолько мало́, что выполняются неравенства

$$\eta < \varepsilon, \quad V(t_0 \mid x_\sigma^0) < l. \tag{2.9″}$$

Докажем, что для всех $t \geqslant t_0$ функции x_s, принимающие при $t = t_0$ значения x_s^0 и удовлетворяющие уравнениям (2.1″), будут удовлетворять неравенствам

$$|x_s| < \varepsilon. \tag{2.10″}$$

В самом деле, функции x_s не могут перестать удовлетворять неравенствам (2.10″) иначе, как достигнув таких значений, при которых будет выполнено неравенство $x \geqslant \varepsilon$. Но тогда из (2.4′) следует, что функция $V(t \mid x_\sigma(t))$ станет большей, чем l, так как $l < l'$. Так как в начальный момент эта функция меньше l, то должен существовать такой момент времени, при котором эта

функция принимает значение l, переходя от значений, меньших l, к значениям, бо́льшим l.

Но тогда в этот момент времени V' сделается величиной положительной, что противоречит неравенству (2.7′).

Следовательно, при условиях (2.6′) и (2.8″) условия (2.10″) будут выполняться для всякого $t > t_0$, что и требовалось доказать.

Примечание. Следует отметить, что при условиях теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости всякое другое решение уравнений (2.1), достаточно близкое к невозмущенному по начальным условиям, неограниченно приближается к нулевому решению, когда $t \to \infty$. Если же выполняются условия теоремы Дубошина — Малкина, то всякое решение системы (2.1″), начальные значения которых численно сколь угодно малы, вовсе не стремится к нулевому решению системы (2.1), но всегда остается сколь угодно близким к этому решению, т. е. к невозмущенному движению.

Однако существуют примеры, в которых движение, обладающее устойчивостью при постоянно действующих возмущениях, обладает также некоторой асимптотической устойчивостью и при $t \to \infty$, неограниченно приближается к некоторому другому решению системы (2.1), отличному от нулевого решения.

Один пример такого рода дан автором в 1952 г. (Вестник МГУ).

§ 3. Задача об устойчивости установившегося движения

Теоремы, доказанные в § 2, дают, как уже было отмечено, достаточные признаки устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения, т. е. нулевого решения системы (2.1). Однако разыскание функций Ляпунова является чрезвычайно сложной и трудной задачей, а поэтому желательно указать некоторые приемы, позволяющие в ряде случаев облегчить нахождение таких функций или по крайней мере установить их существование.

Мы рассмотрим эту задачу сначала для установившегося движения (автономного, по другой терминологии), т. е. когда правые части уравнений (2.1) не зависят явно от времени t.

1. Рассмотрим сначала вспомогательную алгебраическую задачу. Пусть дано линейное уравнение с частными производными

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = \varkappa V, \qquad (2.24)$$