функция принимает значение l, переходя от значений, меньших l, к значениям, бо́льшим l.

Но тогда в этот момент времени V' сделается величиной положительной, что противоречит неравенству (2.7′).

Следовательно, при условиях (2.6′) и (2.8″) условия (2.10″) будут выполняться для всякого $t > t_0$, что и требовалось доказать.

Примечание. Следует отметить, что при условиях теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости всякое другое решение уравнений (2.1), достаточно близкое к невозмущенному по начальным условиям, неограниченно приближается к нулевому решению, когда $t \to \infty$. Если же выполняются условия теоремы Дубошина — Малкина, то всякое решение системы (2.1″), начальные значения которых численно сколь угодно малы, вовсе не стремится к нулевому решению системы (2.1), но всегда остается сколь угодно близким к этому решению, т. е. к невозмущенному движению.

Однако существуют примеры, в которых движение, обладающее устойчивостью при постоянно действующих возмущениях, обладает также некоторой асимптотической устойчивостью и при $t \to \infty$, неограниченно приближается к некоторому другому решению системы (2.1), отличному от нулевого решения.

Один пример такого рода дан автором в 1952 г. (Вестник МГУ).

§ 3. Задача об устойчивости установившегося движения

Теоремы, доказанные в § 2, дают, как уже было отмечено, достаточные признаки устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения, т. е. нулевого решения системы (2.1). Однако разыскание функций Ляпунова является чрезвычайно сложной и трудной задачей, а поэтому желательно указать некоторые приемы, позволяющие в ряде случаев облегчить нахождение таких функций или по крайней мере установить их существование.

Мы рассмотрим эту задачу сначала для установившегося движения (автономного, по другой терминологии), т. е. когда правые части уравнений (2.1) не зависят явно от времени t.

1. Рассмотрим сначала вспомогательную алгебраическую задачу. Пусть дано линейное уравнение с частными производными

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = \varkappa V, \qquad (2.24)$$

где $\varkappa$ — некоторая постоянная, а $p_{s\sigma}$ — постоянные коэффициенты. Будем искать решение этого уравнения в виде целой однородной функции данной степени m от величин x_s.

Пусть сначала $m = 1$, т. е. будем искать решение вида

$$V = A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n. \tag{2.24'}$$

Подставляя это выражение в (2.24) и приравнивая коэффициенты при x_s слева и справа, получим следующие уравнения, которым должны удовлетворять неизвестные коэффициенты A_s:

$$p_{1s}A_1 + \ldots + (p_{ss} - \varkappa)A_s + \ldots + p_{ns}A_n = 0.$$

Для того чтобы эта система линейных однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо, как известно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, был равен нулю. Но легко видеть, что этот определитель совпадает с основным определителем $D(\varkappa)$ (см. главу I, § 3, разд. 2) системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $p_{s\sigma}$. Поэтому, для того чтобы уравнение (2.24) имело решение вида (2.24'), необходимо, чтобы постоянная $\varkappa$ была корнем определяющего уравнения

$$D(\varkappa) = |P - \varkappa E| = 0. \tag{2.25}$$

Пусть теперь $m > 1$. Будем искать решение уравнения (2.24) в виде формы m-й степени, полагая

$$V = \sum A^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{2.26}$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные числа m_s, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{s=1}^{n} m_s = m$. Эта форма заключает в себе N неопределенных коэффициентов, где

$$N = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\cdot 2\ldots m}.$$

Таково же будет и число уравнений, линейных и однородных относительно этих неизвестных коэффициентов, которые получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ в обеих частях (2.24) после подстановки туда формы (2.26). Поэтому, чтобы уравнения относительно неизвестных $A^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ имели ненулевые решения, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Обозначая этот определитель через $D_m(\varkappa)$ и приравнивая его нулю, получим уравнение вида

$$D_m(\varkappa) = |a_{s\sigma} - 1_s^\sigma \varkappa| = 0, \tag{2.26'}$$

где $a_{s\sigma}$ — известные линейные формы относительно $p_{s\sigma}$.

Рассматривая всевозможные числа m, получим ряд определителей $D_1(\varkappa)$, $D_2(\varkappa)$, ..., причем $D_1(\varkappa) = D(\varkappa)$ есть основной определитель. Все остальные определители А. М. Ляпунов назвал *производными*, так что $D_m(\varkappa)$ есть $(m-1)$-й производный определитель. Таким образом, чтобы уравнение (2.24) имело решение вида (2.26), необходимо, чтобы постоянная $\varkappa$ была корнем уравнения (2.26′). Зная все корни определяющего уравнения, можно найти и все корни уравнения (2.26′), так как имеет место следующая теорема, принадлежащая А. М. Ляпунову:

Теорема Ляпунова о производном определителе. *Если $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — все корни определяющего уравнения, то все корни уравнения $D_m(\varkappa) = 0$ найдутся по формуле*

$$\varkappa = m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n, \tag{2.27}$$

когда числам m_s будем давать всевозможные целые неотрицательные значения, удовлетворяющие соотношению $\sum_{s=1}^{n} m_s = m$ так, чтобы одна и та же система значений не встречалась более одного раза.

Доказательство: Предположим сначала коэффициенты $p_{s\sigma}$ такими, чтобы корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ определяющего уравнения не удовлетворяли никакому соотношению вида

$$\mu_1\varkappa_1 + \mu_2\varkappa_2 + \ldots + \mu_n\varkappa_n = 0,$$

при целых $\mu_1, \ldots, \mu_n$, для которых

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 0, \quad |\mu_s| \leqslant m \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

и между которыми по крайней мере некоторые не равны нулю.

Тогда величины $\varkappa_s$, определяемые по формуле (2.27), будут все различными и число их будет равно N. Мы предположим, сверх того, что между ними нет равной нулю.

Обращаясь теперь к уравнению (2.24), заметим, что на основании общей теории линейных уравнений с частными производными первого порядка всякая функция от n независимых между собою интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + p_{1n}x_n} = \frac{dx_2}{p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \ldots + p_{2n}x_n} = \\ = \frac{dx_n}{p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \ldots + p_{nn}x_n} = \frac{dV}{\varkappa V}, \tag{2.27′}$$

приравненная какой-либо постоянной, даст нам некоторый интеграл уравнения (2.24).

Обозначая поэтому через $v_1, \ldots, v_n$ левые части упомянутых интегралов этой системы, а через Φ некоторую их функцию,

напишем некоторый интеграл уравнения (2.24) в виде

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 1.$$

Если же функцию Φ выбрать так, чтобы уравнение $\Phi = 1$ было разрешимо относительно V, то, определяя V, получим нужное решение уравнения (2.24).

Чтобы найти интегралы системы (2.27′), положим

$$\frac{dV}{\varkappa V} = dt.$$

Тогда система (2.27′) приведется к виду

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n.$$

Так как при сделанных предположениях все $\varkappa_s$ различны, то независимые между собой интегралы написанной системы имеют вид (см. § 3 главы первой):

$$v_s = e^{-\varkappa t}(\bar{K}_{1s}x_1 + \bar{K}_{2s}x_2 + \ldots + \bar{K}_{ns}x_n) = a_s,$$

где $\bar{K}_{\sigma, s}$ суть некоторые постоянные, зависящие от коэффициентов $p_{s\sigma}$, а a_s — произвольные постоянные.

Положим теперь

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1^{m_1} v_2^{m_2} \ldots v_n^{m_n},$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, дающие в сумме m. Тогда уравнение $\Phi = 1$ напишется в виде

$$e^{-(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n)t} \prod_{s=1}^{n} (\bar{K}_{1s}x_1 + \ldots + \bar{K}_{ns}x_n)^{m_s} = 1.$$

Так как $t = \frac{1}{\varkappa} \ln V$, то это уравнение приведем к следующей форме:

$$V^{\frac{m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n}{\varkappa}} = \prod_{s=1}^{n} (\bar{K}_{1s}x_1 + \ldots + \bar{K}_{ns}x_n)^{m_s}.$$

Поэтому, если постоянную $\varkappa$ определим формулой (2.27), то искомое решение для V представится в виде

$$V = \prod_{s=1}^{n} (\bar{K}_{1s}x_1 + \bar{K}_{2s}x_2 + \ldots + \bar{K}_{ns}x_n)^{m_s},$$

и очевидно, что эта V есть целая однородная функция величин x_s степени m.

Но выше было показано, что уравнение (2.24) допускает решение в виде целой однородной функции степени m от вели-

чин x_s только в том случае, когда постоянная $\varkappa$ есть корень уравнения $D_m(\varkappa) = 0$. Отсюда следует, что сумма

$$m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n$$

при любых неотрицательных значениях m_s, сумма которых есть m, есть действительно корень этого уравнения.

Но число всевозможных неотрицательных значений чисел m_s, дающих в сумме m, как раз равно числу N, т. е. степени уравнения $D_m(\varkappa) = 0$. Следовательно, все величины $\varkappa$, определяемые по формуле (2.27), суть корни уравнения $D_m(\varkappa) = 0$, и никакие другие значения $\varkappa$ ему удовлетворять не могут.

Поэтому при сделанных выше допущениях теорема Ляпунова доказана.

Чтобы убедиться в справедливости теоремы вообще, достаточно теперь только заметить, что исключенные нами случаи можно рассматривать как предельные для только что рассмотренного. Особенность этих случаев будет поэтому состоять только в том, что уравнение $D_m(\varkappa) = 0$ будет иметь кратные или равные нулю корни.

Перейдем теперь к рассмотрению теорем, дающих возможность находить некоторые формы величин x_s, которые далее будут использованы как функции V для решения задачи об устойчивости в одном важном частном случае общей проблемы.

Теорема 1. *Если корни $\varkappa_s$ определяющего уравнения таковы, что при данном целом положительном m для них невозможны никакие соотношения вида $m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n = 0$, в которых все m_s были бы целыми неотрицательными числами, дающими в сумме m, то всегда возможно найти, и притом только одну, форму V степени m, удовлетворяющую уравнению*

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = U \tag{2.28}$$

при произвольно заданной форме U той же степени m.

В самом деле, разыскивая форму V в виде (2.26), получим для определения ее коэффициентов $A^{(m_1, \ldots, m_n)}$ систему линейных неоднородных уравнений, число которых N равно числу этих коэффициентов. Легко убедиться, что определитель этой системы есть $D_m(0)$ и, следовательно, по условиям теоремы не равен нулю. Поэтому неоднородная система, определяющая $A^{(m_1, \ldots, m_n)}$, имеет единственное решение, и теорема доказана.

Заметим, что условие, рассматриваемое в теореме, будет, например, выполнено, и притом для любого m, когда вещественные части всех $\varkappa_s$ отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

В следующих трех теоремах будем считать все $p_{s\sigma}$ постоянными вещественными числами, а также будем предполагать вещественными все величины x_s, будем ли их рассматривать как независимые переменные или как функции t, удовлетворяющие линейным дифференциальным уравнениям вида (1.36).

Теорема 2. *Когда вещественные части всех корней $\varkappa_s$ определяющего уравнения отрицательны и когда в уравнении* (2.28) *U есть знакоопределенная форма какой-либо четной степени m, то удовлетворяющая этому уравнению форма m-й степени V будет также знакоопределенной, и притом противоположной по знаку с U.*

Для доказательства заметим прежде, что так как при условии теоремы $D_m(0) \neq 0$, то существует единственная форма V m-й степени, удовлетворяющая уравнению (2.28), и остается доказать, что она знакоопределенна и что $VU < 0$.

Пусть $x_s^{(0)}$ — произвольно выбранные вещественные числа, и обозначим соответствующее значение V через V_0.

Рассмотрим теперь x_s как функции t, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.28'}$$

и принимающие при $t = t_0$ значения $x_s^{(0)}$.

При этих условиях V также будет функцией t, принимающей при $t = t_0$ значение V_0 и удовлетворяющей в силу (2.28) соотношению $V' = U$, откуда следует, что V — монотонная функция, возрастающая при $U > 0$ и убывающая при $U < 0$.

Но если все корни $\varkappa_s$ определяющего уравнения имеют отрицательные вещественные части, то (как следует из общих формул (1.46′) главы I) все решения системы (2.28′) стремятся к нулю при $t \to +\infty$ при любых $x_s^{(0)}$. Поэтому V, как функция t, также стремится к нулю при $t \to +\infty$, а так как V — монотонная функция, то при $U > 0$ имеем $V < 0$, а при $U < 0$, наоборот, $V > 0$.

А так как $x_s^{(0)}$ — произвольно взятые, не равные одновременно нулю числа, то функция V, удовлетворяющая уравнению (2.28), обращаясь в нуль, когда все x_s равны нулю, при всяких других значениях x_s имеет не равное нулю значение противоположного знака с U. Таким образом, теорема доказана. Подобным же образом докажется и следующая

Теорема 3. *Если между корнями $\varkappa_s$ определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, и если при данном четном m корни эти удовлетворяют условию теоремы* 1, *то всякий раз, когда в уравнении* (2.28) *U*

есть знакоопределенная форма m-й степени, удовлетворяющая этому уравнению форма той же степени V, наверно, не будет знакопостоянной противоположного знака с U.

Так же как и выше, рассматриваем x_s как функции t, удовлетворяющие системе (2.28′) с начальными условиями $x_s^{(0)}$.

Следовательно, опять V — монотонная функция, возрастающая при $U > 0$ и убывающая при $U < 0$. Поэтому, если $x_s^{(0)}$ можно выбрать так, чтобы было $V_0 = 0$, то для $t > t_0$ V будет принимать только положительные значения, если $U > 0$, и только отрицательные, если $U < 0$.

Стало быть, если надлежащим выбором x_s, не равных одновременно нулю, V можно сделать нулем, то ее можно также сделать и величиной одинакового знака с U. Поэтому, если бы V не могла получать значений того же знака, что и U, то она необходимо была бы знакоопределенной.

Но тогда такая функция удовлетворила бы всем условиям теоремы 2 § 2, и нулевое решение системы (2.28′) было бы асимптотически устойчивым. А это невозможно, так как если уравнение (2.25) имеет корни с положительными вещественными частями, то (как следует опять из формул (1.46′)) среди решений системы (2.28′) всегда найдутся такие, в которых по крайней мере некоторые из функций x_s будут неограниченно расти при $t \to +\infty$. Полученное противоречие показывает, что V обязательно должна получать значения того же знака, какой имеет U. Следовательно, теорема доказана.

Легко притом доказать, что если все корни определяющего уравнения имеют положительные вещественные части, то функция V, удовлетворяющая уравнению (2.28), наверное будет знакоопределенной, одинакового знака с U.

Дополнением к предыдущим теоремам является следующая

Теорема 4. *Если между корнями $\varkappa_s$ определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, то, разумея под U заданную знакоопределенную форму четной степени m и под γ положительную постоянную, не являющуюся корнем уравнения $D_m(\varkappa) = 0$, всегда найдем, и притом только одну, форму V той же степени m, удовлетворяющую уравнению*

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = \gamma V + U. \qquad (2.29)$$

Притом γ можно выбрать так, что найденная форма V, наверно, не будет знакопостоянной, противоположного знака с U.

Действительно, разыскивая форму V в виде (2.26), мы получим для определения ее коэффициентов систему линейных неоднородных уравнений, определитель которой есть $D_m(\gamma)$.

По условию теоремы $D_m(\gamma) \neq 0$, и поэтому форма V найдется единственным образом. Применяя далее к V теорему Эйлера об однородных функциях, можем написать

$$\sum_{s=1}^{n} x_s \frac{\partial V}{\partial x_s} = mV,$$

а поэтому V, удовлетворяющая уравнению (2.29), будет также удовлетворять следующему:

$$\sum_{s=1}^{n} \left[p_{s1}x_1 + \ldots + \left(p_{ss} - \frac{\gamma}{m}\right) x_s + \ldots + p_{sn}x_n\right] \frac{\partial V}{\partial x_s} = U. \quad (2.29')$$

Поэтому по предыдущей теореме заключаем, что если γ такова, что между корнями уравнения

$$\left| p_{s\sigma} - 1_s^\sigma \left(\frac{\gamma}{m} + \chi\right) \right| = 0$$

имеются такие, вещественные части которых положительны, то форма V, наверно, не будет знакопостоянной, противоположного знака с U. Но, полагая $\frac{\gamma}{m} + \chi = \varkappa$, мы приведем последнее уравнение к виду $D(\varkappa) = 0$, среди корней которого по условию есть такие, вещественные части которых положительны.

Отсюда следует, что γ всегда возможно выбрать настолько малой, что между величинами $\chi_s = \varkappa_s - \frac{\gamma}{m}$ всегда найдется хотя бы одна с положительной вещественной частью.

Следовательно, теорема доказана.

2. Теперь мы можем доказать основные теоремы Ляпунова, устанавливающие случаи, в которых задача об устойчивости установившегося движения приводится к исследованию корней некоторого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами.

Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения приводятся к виду

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}x_\sigma + \bar{X}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.30)$$

где все $p_{s\sigma}$ — вещественные постоянные, а $\bar{X}_s$ — не зависящие от времени голоморфные функции от x_σ, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

В этом случае невозмущенное движение (нулевое решение написанных уравнений) будем называть, следуя Ляпунову, *установившимся* (стационарным, равновесным — по другой терминологии).

Коэффициенты разложений функций $\bar{X}_s$ во многих случаях могут быть не только постоянными, но вообще, любыми непрерывными функциями времени. В последнем случае мы будем называть невозмущенное *движение установившимся в первом приближении.*

Если мы отбросим в уравнениях (2.30) все члены порядка выше первого, то получим систему линейных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.30'}$$

с постоянными коэффициентами, которые называются по Ляпунову *уравнениями первого приближения* (уравнения в вариациях — по терминологии Пуанкаре). Для этой системы уравнение

$$D(\varkappa) = \left| p_{s\sigma} - 1_s^\sigma \varkappa \right| = 0 \tag{2.31}$$

является *определяющим* (характеристическим) уравнением и есть уравнение n-й степени с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим основные теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости установившегося движения.

Теорема 1. *Если определяющее уравнение имеет корни только с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически, каковы бы ни были функции $\bar{X}_s$ в уравнениях возмущенного движения.*

Доказательство весьма просто и является следствием теоремы 2 предыдущего раздела. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2. \tag{2.32}$$

По упомянутой теореме найдется единственная квадратичная форма V, удовлетворяющая этому уравнению, которая будет знакоопределенно отрицательной. Принимая найденную форму за функцию Ляпунова, найдем в силу уравнений (2.30)

$$V' = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_s \frac{\partial V}{\partial x_s}, \tag{2.32'}$$

что есть, очевидно, знакоопределенно положительная функция.

Таким образом найденная функция V удовлетворяет всем условиям теоремы об асимптотической устойчивости, а следовательно, невозмущенное движение устойчиво асимптотически, что и нужно было доказать. Поэтому всякое возмущенное движение, для которого начальные возмущения численно достаточно малы, будет неограниченно приближаться к невозмущенному, когда $t \to +\infty$.

Заметим еще, что, полагая все $\bar{X}_s$ равными нулю, получим также доказательство асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.30′), что может быть также выведено из общих формул (1.46′) главы I, дающих общее решение системы с постоянными коэффициентами.

Теорема 2. *Если между корнями определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, то невозмущенное движение неустойчиво, каковы бы ни были функции $\bar{X}_s$ в уравнениях возмущенного движения.*

Переходя к доказательству, допустим сначала, что корни определяющего уравнения таковы, что определитель $D_2(0) \neq 0$.

Тогда по-прежнему найдется единственная квадратичная форма V, удовлетворяющая уравнению (2.32), но в этом случае найденная функция V, по теореме 3 предыдущего раздела, будет такова, что надлежащим выбором x_s ее можно сделать величиной положительной. Принимая эту форму за функцию Ляпунова, для ее производной V' опять получим выражение (2.32′), а поэтому найденная функция V удовлетворяет всем условиям теоремы 3 § 2, и невозмущенное движение неустойчиво.

Если корни уравнения (2.31) таковы, что $D_2(0) = 0$, то вместо уравнения (2.32) возьмем следующее:

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = \gamma V + x_1^2 + \ldots + x_n^2, \qquad (2.33)$$

где γ — положительная постоянная.

На основании теоремы 4 раздела 1 γ всегда можно выбрать так, чтобы $D_2(\gamma)$ не было равно нулю и чтобы квадратичная форма V, удовлетворяющая уравнению (2.33), не была знакопостоянной положительной. Принимая опять эту форму за функцию Ляпунова, найдем в силу уравнений (2.30)

$$V' = \gamma V + x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_s \frac{\partial V}{\partial x_s}. \qquad (2.33')$$

Следовательно, найденная функция V удовлетворяет всем условиям 4-й теоремы второго метода Ляпунова, и рассматриваемая теорема доказана полностью.

Так же как и выше, отметим, что, полагая $\bar{X}_s \equiv 0$, мы имеем доказательство неустойчивости нулевого решения системы (2.30′), что также можно вывести из формул (1.46′) главы I.

Заметим еще, что если все корни уравнения (2.31) имеют положительные вещественные части, то невозмущенное движение будет абсолютно неустойчивым.

Примечание 1. Рассмотренные два основных случая таковы, что в каждом из них задача об устойчивости невозмущенного движения и задача об устойчивости нулевого решения системы (2.30′) решаются одновременно в одном и том же смысле. Такие случаи называют, следуя Ляпунову, *обыкновенными*, и в этих случаях решение задачи об устойчивости сводится просто к исследованию корней определяющего уравнения. Все остальные случаи задачи об устойчивости установившегося движения называются *особенными*.

Таким образом, особенные случаи характеризуются тем, что в каждом из них определяющее уравнение (2.31), не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни, вещественные части которых равны нулю, т. е. нулевые и чисто мнимые корни.

Особенные случаи интересны еще тем, что только в таких случаях (и притом когда все корни определяющего уравнения равны нулю или чисто мнимы) задача об устойчивости может иметь одно и то же решение и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

В обыкновенных же случаях из асимптотической устойчивости при $t \to +\infty$ следует абсолютная неустойчивость при $t \to -\infty$, и наоборот.

«Двусторонняя» устойчивость возможна, следовательно, для случая, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму с характеристической функцией, не зависящей от времени, и когда все корни определяющего уравнения имеют равные нулю вещественные части.

Примечание 2. В предыдущих теоремах можно было бы взять вместо $U = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ любую знакоопределенную форму четной степени. Но тогда функцию V также нужно искать в виде формы той же степени, что всегда возможно.

3. Как было сказано, обыкновенные случаи задачи об устойчивости установившегося движения характерны тем, что в этих случаях достаточно рассматривать только уравнения первого приближения. В особенных же случаях рассмотрение первого приближения оказывается недостаточным и требуется принимать во внимание члены высших порядков в разложениях функций $\bar{X}_s$.

В первом приближении исследуемое движение может оказаться устойчивым или неустойчивым *), но этот результат

*) Это вытекает из анализа общего решения (1.46′) системы уравнений первого приближения. А именно, нулевое решение системы (2.30′) будет устойчиво, если каждому корню уравнения (2.31), вещественная часть которого равна нулю, соответствует столько же групп решений, какова кратность этого корня. Например, будем иметь устойчивость, если все корни, вещественные части которых равны нулю, оказываются простыми. Наоборот, если число групп такого корня меньше его кратности, то нулевое решение будет неустойчивым.

нельзя распространять без особого исследования на полную систему (2.30).

Чтобы показать это, рассмотрим следующую теорему, также принадлежащую А. М. Ляпунову:

Теорема. *Если определяющее уравнение $D(\varkappa)=0$, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни, вещественные части которых равны нулю, то функции $\bar{X}_s$ в уравнениях* (2.30) *всегда можно подбирать так, чтобы невозмущенное движение было устойчивым или неустойчивым, по желанию.*

Для доказательства рассмотрим сначала частные случаи. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1=\bar{X}_1,$$
$$\dot{x}_s=x_{s-1}+\bar{X}_s \qquad (s=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае все корни определяющего уравнения равны нулю и что нулевое решение уравнений первого приближения неустойчиво.

Рассмотрим теперь функции $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$, определяемые последовательно (для $s=n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1$) из уравнений

$$\varphi_s=x_s^2+\varphi_{s+1}^2$$

при условии $\varphi_{n+1}=0$. Положим $V=\varphi_1$, где φ_1 по построению есть знакоопределенно положительная функция.

Если $\bar{X}_s$ определить формулами

$$\bar{X}_s=-2x_{s+1}\varphi_{s+1}+x_s\Phi_s,$$

то в силу заданных уравнений мы найдем

$$V'=2x_1^2\Phi_1+2^2x_2^2\varphi_2\Phi_2+\ \ldots\ +2^nx_n^2\varphi_2\ \ldots\ \varphi_n\Phi_n,$$

откуда по теоремам второго метода следует, что если взять все Φ_s знакоопределенно отрицательными, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво; если взять все Φ_s равными нулю, то имеем простую устойчивость, а если взять все Φ_s знакоопределенно положительными, то невозмущенное движение будет неустойчивым.

Пусть теперь уравнения возмущенного движения даны в виде

$$\dot{x}_1=-\lambda y_1+\bar{X}_1,\quad \dot{x}_s=-\lambda y_s+x_{s-1}+\bar{X}_s,$$
$$\dot{y}_1=+\lambda x_1+\bar{Y}_1,\quad \dot{y}_s=+\lambda x_s+y_{s-1}+\bar{Y}_s$$
$$(s=2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

где λ — положительная постоянная. Легко убедиться в том, что в этом случае все корни определяющего уравнения чисто мни-

мые и что невозмущенное движение неустойчиво. Построим и здесь функции φ_s, определяемые последовательно формулам

$$\varphi_s = x_s^2 + y_s^2 + \varphi_{s+1}^2$$

при условии $\varphi_{n+1} = 0$. Беря $V = \varphi_1$ (φ_1 и здесь знакоопределенно положительная) и полагая

$$\overline{X}_s = -2x_{s+1}\varphi_{s+1} + x_s\Phi_s, \quad \overline{Y}_s = -2y_{s+1}\varphi_{s+1} + y_s\Phi_s$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

мы найдем в силу заданных уравнений

$$V' = 2(x_1^2 + y_1^2)\Phi_1 + 2^2(x_2^2 + y_2^2)\varphi_2\Phi_2 + \ldots$$
$$\ldots + 2^n(x_n^2 + y_n^2)\varphi_2 \ldots \varphi_n\Phi_n.$$

откуда, так же как и выше, следует, что невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, просто устойчиво или неустойчиво, в зависимости от того, будут ли все Φ_s определенно отрицательными, равными нулю или определенно положительными.

Обращаясь теперь к общему случаю, Ляпунов замечает, что, каковы бы ни были $p_{s\sigma}$, всегда найдется линейная подстановка с постоянными вещественными коэффициентами, преобразующая систему (2.30) в такую, которая распадается на группы уравнений, принадлежащие к одному из двух следующих типов:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\lambda y_1 + \overline{Y}_1, \\ \dot{y}_i &= -\lambda y_i + y_{i-1} + \overline{Y}_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, k) \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\lambda y_1 - \mu z_1 + \overline{Y}_1, \\ \dot{y}_i &= -\lambda y_i - \mu z_i + y_{i-1} + \overline{Y}_i, \\ \dot{z}_1 &= \mu y_1 - \lambda z_1 + \overline{Z}_1, \\ \dot{z}_i &= \mu y_i - \lambda z_i + z_{i-1} + \overline{Z}_i, \end{aligned}\right\} \tag{2.34'}$$

где — λ обозначает вещественную часть корня уравнения (2.31).

Здесь не исключается и случай $k = 1$, когда группа вида (2.34) приводится к одному первому уравнению, а группа вида (2.34′) — к двум уравнениям первой строки. Поэтому, если определяющее уравнение не имеет корней с положительными вещественными частями, то в уравнениях вида (2.34) или (2.34′) λ есть либо положительное число, либо нуль.

Тогда, чтобы сделать невозмущенное движение устойчивым или неустойчивым, стоит только во всех группах, для которых

$\lambda > 0$, а также в тех, для которых $k = 1$, положить $\bar{Y}_s = \bar{Z}_s = 0$, и в группах, для которых $\lambda = 0$, $k > 1$, функции $\bar{Y}_s$, $\bar{Z}_s$ выбрать так, как было показано в двух рассмотренных частных случаях. Этим теорема доказывается полностью.

4. Рассмотрим в заключение случай, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_s}, \\ \frac{dy_s}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

где характеристическая функция не зависит от времени и представляется в виде ряда с постоянными вещественными коэффициентами:

$$H = H_2 + H_3 + \ldots + H_m + \ldots, \tag{2.35'}$$

где H_m обозначает форму m-й степени от переменных x_s и y_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), причем H_2 имеет вид (1.48) главы I.

Тогда уравнения первого приближения, которые получим, заменяя в (2.35) функцию H формой H_2, имеют вид (1.47), а соответствующее им определяющее уравнение содержит только четные степени $\varkappa$, и каждому его корню $\varkappa_s$ соответствует корень $-\varkappa_s$. Следовательно, если определяющее уравнение имеет корни с не равными нулю вещественными частями, то среди этих корней обязательно будут корни с положительными вещественными частями и невозмущенное движение будет заведомо неустойчиво.

Отсюда следует, что для устойчивости невозмущенного движения, определяемого уравнениями (2.35), необходимо, чтобы все корни определяющего уравнения имели равные нулю вещественные части. Однако это необходимое условие вовсе не является достаточным, как это следует из предыдущей теоремы.

Поэтому все случаи, когда возможна устойчивость, принадлежат к разряду особенных и для них без дополнительного исследования задачу об устойчивости разрешить нельзя.

Это дополнительное исследование делается ненужным в том случае, когда H_2 есть знакоопределенная квадратичная форма. Действительно, тогда, по крайней мере при достаточно малых $|x_s|$, $|y_s|$, характеристическая функция H есть знакоопределенная функция и ее можно взять за функцию Ляпунова. Но, полагая $V = H$, мы найдем в силу уравнений (2.34) $V' = 0$, откуда следует (по первой теореме второго метода Ляпунова), что невозмущенное движение устойчиво. А отсюда, наоборот, вытекает, что в этом случае все корни определяющего

уравнения заведомо будут иметь равные нулю вещественные части *).

Заметим еще, что функция H может быть знакоопределенной и при $H_2 = 0$, лишь бы первая, не равная нулю форма H_m в ее разложении была знакоопределенной формой некоторой четной степени.

Полезно заметить еще, что если невозмущенное движение устойчиво, то оно устойчиво в обе стороны, т. е. и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, что следует из того, что уравнения (2.35) не изменяют своей формы при замене t на $-t$.

Уравнения тех задач небесной механики, которые будут рассматриваться в этой книге, все имеют каноническую форму, и решение задач об устойчивости также будет приводиться к задаче об устойчивости нулевого решения канонической системы. Поэтому решение этих задач весьма затруднительно и ответ на поставленный вопрос об устойчивости решается почти исключительно в отрицательном смысле, что, впрочем, также имеет важное значение.

§ 4. Задача об устойчивости периодического движения

1. Если правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1) зависят от времени, то невозмущенное движение $x_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ называется *неустановившимся* (нестационарным — по другой терминологии).

Мы рассмотрим здесь только один важный частный случай задачи об устойчивости неустановившегося движения, когда все функции $X_s(t|x_\sigma)$ — периодические функции времени с одним и тем же вещественным периодом ω.

В этом случае мы будем называть невозмущенное движение *периодическим*.

Допустим, что уравнения (2.1) могут быть написаны в виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma + \bar{X}_s(t\,|\,x_\sigma), \tag{2.36}$$

где все $p_{s\sigma}(t)$ — вещественные периодические функции от t с периодом ω, а $\bar{X}_s$ — голоморфные функции от x_σ, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают периодическими коэффициентами с тем же самым периодом ω.

Рассмотрим сначала задачу об устойчивости в первом приближении, т. е. задачу об устойчивости нулевого решения

*) Но определяющее уравнение канонической системы может иметь все корни с нулевыми вещественными частями и в том случае, когда форма H_2 не является знакоопределенной.