уравнения заведомо будут иметь равные нулю вещественные части *).

Заметим еще, что функция H может быть знакоопределенной и при $H_2 = 0$, лишь бы первая, не равная нулю форма H_m в ее разложении была знакоопределенной формой некоторой четной степени.

Полезно заметить еще, что если невозмущенное движение устойчиво, то оно устойчиво в обе стороны, т. е. и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, что следует из того, что уравнения (2.35) не изменяют своей формы при замене t на $-t$.

Уравнения тех задач небесной механики, которые будут рассматриваться в этой книге, все имеют каноническую форму, и решение задач об устойчивости также будет приводиться к задаче об устойчивости нулевого решения канонической системы. Поэтому решение этих задач весьма затруднительно и ответ на поставленный вопрос об устойчивости решается почти исключительно в отрицательном смысле, что, впрочем, также имеет важное значение.

§ 4. Задача об устойчивости периодического движения

1. Если правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1) зависят от времени, то невозмущенное движение $x_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ называется *неустановившимся* (нестационарным — по другой терминологии).

Мы рассмотрим здесь только один важный частный случай задачи об устойчивости неустановившегося движения, когда все функции $X_s(t|x_\sigma)$ — периодические функции времени с одним и тем же вещественным периодом ω.

В этом случае мы будем называть невозмущенное движение *периодическим*.

Допустим, что уравнения (2.1) могут быть написаны в виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma + \bar{X}_s(t\,|\,x_\sigma), \tag{2.36}$$

где все $p_{s\sigma}(t)$ — вещественные периодические функции от t с периодом ω, а $\bar{X}_s$ — голоморфные функции от x_σ, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают периодическими коэффициентами с тем же самым периодом ω.

Рассмотрим сначала задачу об устойчивости в первом приближении, т. е. задачу об устойчивости нулевого решения

*) Но определяющее уравнение канонической системы может иметь все корни с нулевыми вещественными частями и в том случае, когда форма H_2 не является знакоопределенной.

системы

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.36'}$$

линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть ρ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — корни характеристичного уравнения (1.51′), которое можно написать также в виде (1.55), причем среди этих корней могут быть и равные.

Если положить вообще $\rho_s = \alpha_s + i\beta_s \left(i = \sqrt{-1}\right)$, то характеристические показатели $\varkappa_s = \frac{1}{\omega} \ln \rho_s$ представятся в виде

$$\varkappa_s = \frac{1}{\omega} \left\{ \ln \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2} + i \operatorname{arctg} \frac{\beta_s}{\alpha_s} \right\},$$

откуда следует, что при $|\rho_s| < 1$ $R(\varkappa_s) < 0$, при $|\rho_s| > 1$ $R(\varkappa_s) > 0$, а если $|\rho_s| = 1$, то $R(\varkappa_s) = 0$ и соответствующий характеристический показатель есть либо нуль, либо чисто мнимое число.

Рассмотрим теперь формулы (1.54), представляющие общее решение системы вида (2.36′), где $f_{s\sigma}(t)$ — либо непрерывные периодические функции с периодом ω, либо многочлены относительно t, коэффициенты которых — непрерывные периодические функции с тем же периодом.

Тогда вопрос об устойчивости нулевого решения системы (2.36′) решается рассмотрением величин ρ_s или характеристических показателей $\varkappa_s$.

В самом деле, если характеристичное уравнение имеет только корни, модули которых меньше единицы, то вещественные части всех $\varkappa_s$ будут отрицательны и все функции x_s, определяемые формулами (1.54), будут приближаться к нулю, когда $t \to +\infty$, каковы бы ни были значения произвольных постоянных C_s или начальных возмущений $x_s^{(0)}$. Поэтому в этом случае нулевое решение системы (2.36′) устойчиво асимптотически (при $t \to +\infty$).

Если характеристичное уравнение имеет корни, модули которых более единицы, то некоторые из $\varkappa_s$ будут иметь положительные вещественные части, и стало быть, при произвольных начальных возмущениях $x_s^{(0)}$ среди функций x_s, удовлетворяющих уравнениям (2.36′), обязательно найдутся такие, которые будут неограниченно расти при $t \to +\infty$.

Следовательно, в этом случае нулевое решение системы (2.36′) будет неустойчивым и эта неустойчивость будет к тому же абсолютной, если модули всех ρ_s больше единицы.

Иллюстрацией задачи об устойчивости, когда уравнения возмущенного движения обладают периодическими коэффициен-

тами, может служить пример, приведенный в конце раздела 2 § 2. В этом случае, как мы видели, нулевое решение устойчиво, а характеристические показатели суть нуль и —1.

2. Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании системы уравнений с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами. Поставим сначала вопрос несколько шире. Пусть дана произвольная линейная система

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma, \tag{2.37}$$

где все $p_{s\sigma}$ — непрерывные ограниченные функции для всякого значения t.

Введем вместо x_s новые неизвестные z_s посредством линейной подстановки с переменными коэффициентами

$$x_s = \sum_{\sigma=1}^{n} l_{s\sigma}(t)\, z_\sigma, \tag{2.38}$$

где матрица преобразования $L = \| l_{s\sigma} \|$ обладает следующими свойствами:

A) $L(t)$ имеет для всякого t непрерывную производную $\dot{L}(t) = \| \dot{l}_{s\sigma}(t) \|$;

B) $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены для всякого t;

C) существует такая постоянная m, что для всякого t имеем неравенство $0 < m \leqslant \operatorname{mod} |L(t)|$.

Преобразование (2.38), матрица которого удовлетворяет перечисленным условиям, называется *преобразованием Ляпунова*, а соответствующая матрица $L(t)$ — матрицей Ляпунова.

Если, в частности, $L = \text{const}$ и $|L| \neq 0$, то матрица L удовлетворяет приведенным условиям, а поэтому неособенное преобразование с постоянными коэффициентами всегда есть преобразование Ляпунова.

Легко проверить затем, что из свойств матрицы $L(t)$ следует, что существует обратная матрица $L^{-1}(t)$ и что она обладает теми же свойствами, что и $L(t)$. Таким образом, преобразование, обратное преобразованию Ляпунова, также есть преобразование Ляпунова.

В результате преобразования Ляпунова система (2.37) преобразуется в следующую:

$$\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(t)\, z_\sigma, \tag{2.39}$$

коэффициенты которой, как нетрудно проверить, также непрерывные и ограниченные функции для всякого t.

Поэтому преобразование Ляпунова устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями систем (2.37) и (2.39), при этом линейно независимые решения остаются таковыми и после преобразования. Следовательно, преобразование Ляпунова переводит интегральную матрицу X первоначальной системы в некоторую интегральную матрицу Z преобразованной системы.

Запишем (2.37), (2.38) и (2.39) в матричной форме:

$$\dot{X} = P(t)X, \tag{2.37'}$$

$$X = L(t)Z, \tag{2.38'}$$

$$\dot{Z} = Q(t)Z, \tag{2.39'}$$

где $P(t) = \| p_{s\sigma}(t) \|$ и $Q(t) = \| q_{s\sigma}(t) \|$.

Подставляя теперь выражение для X из (2.38′) в уравнение (2.37′), мы имеем

$$\dot{L}Z + L\dot{Z} = PLZ,$$

что в силу (2.39′) приводится к виду

$$\dot{L}Z + LQZ = PLZ,$$

откуда получаем

$$Q = L^{-1}PL - L^{-1}\dot{L}. \tag{2.40}$$

Две системы (2.37) и (2.39), или, что то же, (2.37′) и (2.39′), называют *равносильными* (эквивалентными) в смысле Ляпунова, если они переводятся друг в друга преобразованием Ляпунова. Матрицы коэффициентов P и Q двух равносильных систем всегда связаны формулой (2.40), где матрица L есть матрица Ляпунова.

Равносильные в смысле Ляпунова системы обладают следующим важным свойством, вытекающим из свойств матрицы L:

Задачи об устойчивости нулевого решения двух равносильных в смысле Ляпунова систем решаются всегда в одном и том же смысле, так что если решение $z_s = 0$ системы (2.39) *устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво, то таким же свойством обладает и нулевое решение $x_s = 0$ системы* (2.37), *и наоборот.*

Это следует из формул преобразования (2.38) и из формул обратного преобразования, которые можно написать в виде

$$z_s = \sum_{\sigma=1}^{n} l_{s\sigma} x_\sigma, \tag{2.38''}$$

где все $l_{s\sigma}$ — непрерывные и ограниченные функции.

В самом деле, пусть нулевое решение системы (2.39) асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$, т. е. пусть $\lim\limits_{t \to +\infty} z_s = 0$. Тогда

из (2.38″) немедленно находим $\lim\limits_{t\to+\infty} x_s = 0$, что означает, что нулевое решение системы (2.37) тоже асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$. Аналогично проверяются утверждения относительно простой устойчивости и неустойчивости.

Может случиться, что для данной системы (2.37) возможно подобрать такую матрицу Ляпунова $L(t)$, что матрица Q преобразованной системы окажется постоянной, так что система (2.39) будет системой с постоянными коэффициентами. Тогда, следуя Ляпунову, первоначальную систему называют *приводимой*. Ясно, что если для приводимой системы известна матрица Ляпунова, то такая система немедленно интегрируется.

Действительно, пусть (2.37) есть приводимая система. Тогда существует такое преобразование Ляпунова (2.39), которое переводит систему (2.37), или, что то же, систему (2.37′), в систему

$$\dot{Z} = QZ, \tag{2.41}$$

где через Q мы обозначили постоянную матрицу.

Но частное решение системы (2.41) имеет, очевидно, вид

$$Z^* = e^{Qt},$$

где e^{Qt} — экспоненциальная матрица. Поэтому частное решение системы (2.37′) напишется в виде

$$X^* = L(t)\, e^{Qt}.$$

Покажем теперь, что всякая система (2.37), все коэффициенты которой — непрерывные периодические функции t с общим периодом ω, является приводимой.

Согласно условию матрица P системы (2.37) периодическая, т. е. мы имеем

$$P(t+\omega) = P(t). \tag{2.42}$$

Заменяя в системе (2.37′) t на $t+\omega$ и используя равенство (2.42), мы получим

$$\dot{X}(t+\omega) = P(t)\, X(t+\omega).$$

Таким образом, $X(t+\omega)$ также есть интегральная матрица системы (2.37′), а поэтому мы имеем

$$X(t+\omega) = X(t)\, A, \tag{2.43}$$

где A — некоторая постоянная матрица, определитель которой $|A|$ не равен нулю. Следовательно, можно написать

$$A^{\frac{t}{\omega}} = e^{\frac{t}{\omega}\ln A}.$$

Легко видеть, что при замене t на $t+\omega$ эта матрица, так же как и X, получает справа множитель A.

Поэтому матрица, определяемая формулой

$$L(t)=X(t)A^{-\frac{t}{\omega}}=X(t)e^{-\frac{t}{\omega}\ln A}, \tag{2.44}$$

удовлетворяет условию

$$L(t+\omega)=L(t),$$

т. е. является непрерывной периодической функцией от t с периодом ω, определитель которой $|L(t)|$ отличен от нуля. Стало быть, матрица $L(t)$ удовлетворяет условиям A), B), C) и, следовательно, является матрицей Ляпунова.

Но из (2.44) выведем, что решение X системы (2.37′) можно представить в виде

$$X(t)=L(t)e^{\frac{\ln A}{\omega}t}=L(t)e^{Qt}, \tag{2.45}$$

где $Q=\frac{1}{\omega}\ln A$ — постоянная матрица, откуда следует, что система (2.37) с периодическими коэффициентами приводима.

Поэтому преобразование Ляпунова с периодическими коэффициентами приведет систему (2.37′) к системе (2.41) с постоянными коэффициентами, что и требовалось доказать.

К сожалению, мы не имеем никакого общего способа, который позволил бы найти матрицу $L(t)$, приводящую систему с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами, так что доказанное свойство имеет главным образом теоретическое значение.

Важнейшим из свойств системы с периодическими коэффициентами является зависимость между корнями характеристичного уравнения и корнями определяющего уравнения приведенной системы. Пусть $A=\|a_{ij}\|$ есть постоянная матрица, на которую умножается интегральная матрица первоначальной линейной системы (2.37) с периодическими коэффициентами $p_{s\sigma}$.

Тогда характеристичное уравнение этой системы имеет вид

$$\|a_{ij}\|-\rho E=0, \tag{2.46}$$

и его корни обозначим, как и ранее, через ρ_s.

При помощи преобразования Ляпунова (2.38) с периодическими коэффициентами система (2.37) переводится в систему (2.39) с постоянными коэффициентами $q_{s\sigma}$, определяющее уравнение которой напишется следующим образом:

$$\|q_{ij}\|-\varkappa E=0, \tag{2.46′}$$

корни которого обозначим через $\varkappa_s$.

Так как

$$Q = \frac{1}{\omega} \ln A, \tag{2.47}$$

то мы имеем

$$\varkappa_s = \frac{1}{\omega} \ln \rho_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.47'}$$

т. е. корни определяющего уравнения приведенной системы совпадают с характеристическими показателями первоначальной системы с периодическими коэффициентами, что мы и хотели показать.

3. Теперь мы можем доказать основные теоремы Ляпунова, относящиеся к проблеме устойчивости периодического движения.

Вернемся для этого к уравнениям возмущенного движения (2.36), правые части которых — периодические функции от t с одним и тем же периодом ω.

Преобразуем систему (2.36) при помощи преобразования Ляпунова (формулы (2.38) или (2.38')), причем матрицу преобразования L определим формулой (2.44).

Тогда система (2.36) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} z_\sigma + Z_s(t \mid z_\sigma), \tag{2.48}$$

где все $q_{s\sigma}$ — постоянные коэффициенты, матрица которых Q определяется формулой (2.47), а все $Z_s(t \mid z_\sigma)$ (в силу линейности сделанного преобразования) — голоморфные функции величин z_s, разложения которых начинаются членами не ниже второй степени и обладают ограниченными периодическими коэффициентами *).

Из свойств преобразования Ляпунова вытекает (так же как и для линейных систем), что задачи об устойчивости системы (2.36) и системы (2.48) решаются в одинаковом смысле, что и позволяет доказать следующие теоремы Ляпунова:

Теорема 1. *Если характеристичное уравнение* (2.46) *имеет только корни, модули которых менее единицы, то невозмущенное движение устойчиво, и притом асимптотически, каковы бы на были совокупности членов высших порядков* $\bar{X}_s(t \mid x_\sigma)$.

---

*) Мы предполагаем, что функции $\bar{X}_s(t \mid x_\sigma)$ в уравнениях (2.36) — голоморфные функции, коэффициенты разложений которых — периодические функции. Однако теорема остается справедливой и при более общих предположениях. Например, коэффициенты разложений могут быть какими угодно ограниченными функциями времени.

В самом деле, из условий теоремы следует, что все корни уравнения (2.46′) будут иметь отрицательные вещественные части, вследствие чего найдется единственная квадратичная форма $V(z_\sigma)$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющая уравнению (см. § 3 этой главы)

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1+\ldots+q_{sn}z_n)\frac{\partial V}{\partial z_s}=\sum_{s=1}^{n}z_s^2, \tag{2.49}$$

и это форма будет заведомо знакоопределенной отрицательной.

Беря найденную форму за функцию Ляпунова, имеем в силу уравнений (2.48)

$$V'=\sum_{s=1}^{n}z_s^2+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial z_s}Z_s, \tag{2.49′}$$

что есть знакоопределенная положительная функция по крайней мере в достаточно малой окрестности начала координат.

Поэтому заключаем, на основании теоремы второй прямого метода Ляпунова, что нулевое решение системы (2.48) устойчиво асимптотически.

А поэтому невозмущенное движение, т. е. нулевое решение системы (2.36), в силу обратного преобразования (2.38′), также асимптотически устойчиво, и теорема доказана.

Подобным же образом докажется и вторая теорема Ляпунова:

Теорема 2. *Если характеристичное уравнение* (2.46) *имеет корни, модули которых более единицы, то невозмущенное движение неустойчиво, каковы бы ни были совокупности членов высших порядков* $\bar{X}_s(t\,|\,x_\sigma)$.

Действительно, в этом случае определяющее уравнение системы первого приближения (2.46′) обязательно имеет корни, вещественные части которых положительны. Если эти корни таковы, что определитель $D_2(0)\neq 0$, то существует единственная квадратичная форма $V(z_\sigma)$, удовлетворяющая уравнению (2.49), и эта форма, наверное, не будет знакопостоянной отрицательной. Производная V' в силу уравнений (2.48) опять определится формулой (2.49′) и есть знакоопределенная положительная функция в некоторой окрестности начала координат.

Поэтому выполнены все условия теоремы третьей прямого метода Ляпунова, откуда следует неустойчивость нулевого решения системы (2.48), а в силу формул (2.38′) отсюда вытекает также неустойчивость невозмущенного движения.

Если корни определяющего уравнения таковы, что определитель $D_2(0)=0$, то вместо уравнения (2.49) возьмем

следующее:

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n)\frac{\partial V}{\partial z_s} = \gamma V + \sum_{s=1}^{n} z_s^2, \qquad (2.50)$$

где γ — положительная постоянная.

Как мы знаем, эту постоянную можно выбрать так, чтобы $D_2(\gamma) \neq 0$ и чтобы квадратичная форма V, удовлетворяющая уравнению (2.50), не была знакопостоянной положительной. Принимая эту форму за функцию Ляпунова, мы найдем в силу уравнений (2.48)

$$V' = \gamma V + \sum_{s=1}^{n} z_s^2 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial z_s} Z_s, \qquad (2.50')$$

откуда следует, что найденная функция V удовлетворяет условиям четвертой теоремы прямого метода Ляпунова, и нулевое решение системы (2.48) опять неустойчиво. Следовательно, невозмущенное движение также неустойчиво, и теорема доказана в полном объеме.

Таким образом, в рассмотренных двух случаях задача об устойчивости периодического невозмущенного движения решается полностью рассмотрением только уравнений первого приближения, т. е. системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами. А задача об устойчивости нулевого решения линейной системы с периодическими коэффициентами, как было указано выше, приводится к определению характеристических показателей, которые всегда могут быть вычислены, по крайней мере приближенно, с помощью рядов Ляпунова.

Поэтому эти два случая задачи об устойчивости периодического движения Ляпунов также назвал *обыкновенными*.

Все остальные случаи относятся к категории *особенных*. Таким образом, особенными случаями задачи об устойчивости периодического движения будут все те случаи, в которых характеристичное уравнение, не имея корней с модулями, большими единицы, имеет корни, модули которых равны единице.

В этих случаях среди характеристических показателей (т. е. среди корней определяющего уравнения преобразованной системы (2.48)) обязательно будут такие, вещественные части которых равны нулю, и не будет таких, вещественные части которых положительны.

Поэтому задача об устойчивости нулевого решения системы (2.48) не может быть решена рассмотрением одного только первого приближения и существенно зависит от членов высших порядков. А поэтому и задача об устойчивости невозмущенного периодического движения не может быть решена рассмотрением

только линейных уравнений и зависит от вида функций $\bar{X}_s(t|x_\sigma)$ в уравнениях (2.36).

Поэтому мы можем для полноты сформулировать сказанное в виде следующей теоремы:

Теорема 3. *Если характеристичное уравнение, не имея корней, модули которых более единицы, имеет корни, модули которых равны единице, то решение задачи об устойчивости невозмущенного периодического движения существенно зависит от членов высших порядков, т. е. от функций $\bar{X}_s$ в уравнениях* (2.36).

Главное значение эта теорема имеет для тех случаев, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму

$$\frac{dx_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_s} \qquad (s=1, 2, \ldots, n), \quad (2.51)$$

где функция Гамильтона H содержит явно время t и является периодической функцией последнего с периодом ω.

Пусть H — голоморфная функция переменных x_s и y_s, разложение которой имеет вид

$$H=H_2+H_3+\ldots, \qquad (2.51')$$

где H_2 — квадратичная форма от x_s, y_s с периодическими коэффициентами.

Тогда, как показано в § 3 главы I, характеристичное уравнение системы первого приближения есть всегда возвратное, так что каждому корню ρ_i этого уравнения соответствует корень ρ_i^{-1}. Отсюда сейчас же следует, что невозмущенное периодическое движение почти всегда неустойчиво и что устойчивость возможна только в том случае, когда все корни характеристичного уравнения равны единице по модулю, т. е. когда все характеристические показатели имеют равные нулю вещественные части. А все эти случаи и относятся к категории особенных, в которых решение задачи требует вообще рассмотрения членов высших порядков в уравнениях (2.51).

Это исследование, вообще очень сложное и громоздкое, оказывается ненужным, если форма H_2 есть знакоопределенная функция Ляпунова, а форма $\frac{\partial H_2}{\partial t}$ есть знакопостоянная, противоположного знака с H_2. Действительно, в этом случае мы можем положить $V=H_2$, вследствие чего будем иметь $V'=\frac{\partial H_2}{\partial t}$. Поэтому, если H_2 удовлетворяет сделанным допущениям, то можем утверждать, что невозмущенное движение устойчиво. Отсюда будет следовать, разумеется, что соответствующее характеристичное уравнение не может иметь корней, модули которых были бы отличны от единицы.

Для иллюстрации теорем этого параграфа рассмотрим следующие простые примеры.

Пусть уравнения возмущенного движения приведены к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(5 + 4\sin t + \cos 2t)\,x + \\ + \frac{1}{6}(2 - 2\sin t + 2\cos t - \sin 2t)\,y + X(t, x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{6}(2 - 2\sin t - 2\cos t + \sin 2t)\,x - \\ - \frac{1}{6}(13 - 4\sin t - \cos 2t)\,y + Y(t, x, y),$$

где X и Y — какие угодно голоморфные функции x и y, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, коэффициенты которых суть либо периодические, либо вообще какие-то непрерывные, ограниченные функции времени.

Введем вместо переменных x и y новые переменные, ξ и η, посредством линейной подстановки с периодическими коэффициентами

$$\xi = (2 - \sin t - \cos t)\,x + (2 - \sin t + \cos t)\,y,$$
$$\eta = (2 + \sin x - \cos t)\,y - (2 + \sin t + \cos t)\,y.$$

Разрешая эти уравнения относительно x и y, имеем обратную подстановку

$$x = \frac{1}{6}(2 + \sin t + \cos t)\xi + \frac{1}{6}(2 - \sin t + \cos t)\eta,$$
$$y = \frac{1}{6}(2 + \sin t - \cos t)\xi - \frac{1}{6}(2 - \sin t - \cos t)\eta.$$

Посредством этой подстановки предложенные уравнения приведутся к виду

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \Xi(t;\ \xi, \eta),$$
$$\frac{d\eta}{dt} = +\frac{1}{2}\xi - \frac{3}{2}\eta + \mathrm{H}(t;\ \xi, \eta),$$

где Ξ и H — голоморфные функции переменных ξ и η, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают периодическими или, вообще, ограниченными и непрерывными коэффициентами.

Определяющее уравнение последней системы имеет вид

$$D(\varkappa) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} - \varkappa & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} - \varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

и его корни равны —1 и —2. Отсюда заключаем, что нулевое решение выведенной системы устойчиво асимптотически при $t \to +\infty$. Следовательно, и нулевое решение $x = 0$, $y = 0$ также устойчиво асимптотически, каковы бы ни были члены высших порядков в предложенных уравнениях.

Если мы заметим теперь, что общее решение уравнений первого приближения предложенной системы определится формулами

$$x = \frac{1}{3} x_0 (2 + \cos t) e^{-t} + y_0 \sin t e^{-2t},$$

$$y = \frac{1}{3} x_0 \sin t e^{-t} + y_0 (2 - \cos t) e^{-2t},$$

и что период коэффициентов $\omega = 2\pi$, то мы сможем составить также и характеристичное уравнение.

Последнее напишется, как легко видеть, следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2\pi} - \rho & 0 \\ 0 & e^{-4\pi} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

и имеет корни

$$\rho_1 = e^{-2\pi}, \quad e_2 = e^{-4\pi},$$

модули которых заведомо менее единицы.

Пусть теперь дана система

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 t \cdot x + (\sin t \cos t - 1) y + X(t, x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = (\sin t \cos t + 1) x + \sin^2 t \cdot y + Y(t, x, y),$$

где X и Y — функции такого же характера, как и в предыдущем примере.

Делая подстановку

$$\xi = x \cos t + y \sin t, \qquad x = \xi \cos t - \eta \sin t,$$
$$\eta = -x \sin t + y \cos t, \quad y = \xi \sin t + \eta \cos t,$$

мы приведем заданные уравнения к следующим:

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi + \Xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = \mathrm{H}.$$

Соответствующее определяющее уравнение

$$D(\varkappa) = \begin{vmatrix} 1 - \varkappa & 0 \\ 0 & -\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни 0 и 1, откуда заключаем, что нулевое решение предложенных уравнений неустойчиво.

Так как общее решение уравнений первого приближения данной системы имеет вид

$$x = x_0 e^t \cos t - y_0 \sin t,$$
$$y = x_0 e^t \sin t + y_0 \cos t,$$

то соответствующее характеристичное уравнение

$$\Delta(\varkappa) = \begin{vmatrix} e^{2\pi} - \rho & 0 \\ 0 & 1 - \rho \end{vmatrix}$$

имеет корни

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = e^{2\pi},$$

один из которых по модулю более единицы, что и подтверждает наше заключение о неустойчивости решения

$$x = 0, \quad y = 0$$

предложенных уравнений, каковы бы ни были члены высших порядков X и Y в этих уравнениях.

4. Как мы видели в предыдущих разделах, задача об устойчивости периодического движения, приводящаяся к исследованию устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, может быть разрешена при помощи построения соответствующей функции Ляпунова или вычислением характеристических показателей, являющихся корнями характеристичного уравнения.

Однако подобрать нужную функцию Ляпунова оказывается делом далеко не легким и никаких общих способов для нахождения таких функций мы не имеем. Еще труднее составить характеристичное уравнение, что, вообще, возможно сделать только при помощи применения бесконечных рядов.

Для иллюстрации такого приема рассмотрим уравнение, изученное Ляпуновым и играющее важную роль в различных и многочисленных приложениях.

Пусть дано уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = 0, \tag{2.52}$$

где p есть периодическая функция t с вещественным периодом ω, определенная и непрерывная для всех вещественных значений времени, так что

$$p(t + \omega) = p(t). \tag{2.52'}$$

Заметим прежде всего, что если p есть вещественная постоянная, то задача решается немедленно без всяких затруднений. Действительно, определяющее уравнение в этом случае имеет простейший вид:

$$\varkappa^2 + p = 0,$$

откуда

$$\varkappa = \pm\sqrt{-p}, \quad \varkappa_1 = +\sqrt{-p}, \quad \varkappa_2 = -\sqrt{-p}.$$

Поэтому если p есть число отрицательное, то оба корня вещественны и один из них положительный, а другой отрицательный. Следовательно, нулевое решение уравнения (2.52) неустойчиво относительно величин x, $\dot{x}$.

Если p — положительное, то оба корня чисто мнимы и нулевое решение устойчиво относительно тех же величин.

Наконец, если $p = 0$, то нулевое решение заведомо неустойчиво.

Для случая (2.52), т. е. когда p есть периодическая функция, вопрос об устойчивости решается без труда, когда функция p может принимать только отрицательные значения. В самом деле, заменим уравнение (2.52) равносильной системой двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -px. \tag{2.53}$$

Выбирая функцию Ляпунова, например, в виде

$$V = xy,$$

мы имеем в силу уравнений (2.53)

$$V' = y^2 - px^2,$$

откуда в силу третьей теоремы § 2 видно, что нулевое решение системы (2.53) неустойчиво.

Если функция p может принимать только положительные или равные нулю значения, то функцию Ляпунова построить не удается и вопрос об устойчивости приходится решать исследованием корней характеристичного уравнения, т. е. нахождением характеристических показателей.

Для этого нужно составить характеристичное уравнение (1.51), которое в раскрытом виде есть уравнение второй степени типа (1.51′). Так как по формуле (1.52) свободный член этого уравнения в рассматриваемом случае равен единице, то характеристичное уравнение для системы (2.53) можно написать в следующем виде:

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \tag{2.54}$$

и наша задача приводится к определению единственного инварианта A.

Рассматривая, по-прежнему, только вещественные значения t, мы будем предполагать, что функция $p(t)$ остается всегда также вещественной. Тогда ввиду (1.55) постоянная A также будет вещественной.

Из уравнения (1.54) имеем

$$\rho = A \pm \sqrt{A^2 - 1}. \tag{1.54'}$$

Отсюда следует, что в случае, когда $A^2 < 1$, корни уравнения (2.54) будут обладать модулями, равными единице, и нулевое решение системы (2.53) будет устойчивым.

Если же $A^2 > 1$, то корни эти будут вещественными и один из них численно больше, другой численно меньше единицы. В этом случае будем иметь неустойчивость.

Вопрос о том, какой из этих двух случаев имеет место, является весьма существенным. Поэтому весьма желательно иметь признаки для того и для другого.

Такие признаки, как указывает А. М. Ляпунов, можно вывести из рассмотрения выражения инварианта A в виде некоторого ряда.

Для составления такого ряда будем временно рассматривать вместо (2.52) следующее уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon p(t) \cdot x, \tag{2.55}$$

для которого постоянную A будем искать в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням параметра ε. В силу теоремы раздела 3 § 1 этот ряд будет абсолютно сходящимся при всяком ε, так что A будет не только голоморфной, но некоторой целой трансцендентной функцией параметра ε.

Пусть будут $f(t)$ и $\varphi(t)$ — частные решения уравнения (2.55), определяемые условиями ($t_0 = 0$)

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Разлагая $f(t)$ и $\varphi(t)$ в ряды по степеням ε, будем иметь (см. § 3)

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= 1 + \varepsilon f_1(t) + \varepsilon^2 f_2(t) + \ldots, \\ \varphi(t) &= t + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

где, как нетрудно проверить, $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ суть функции t, вычисляемые последовательно по формулам

$$\left.\begin{aligned} f_n(t) &= \int_0^t dt \int_0^t p(t) f_{n-1}(t)\, dt, \\ \varphi_n(t) &= \int_0^t dt \int_0^t p(t) \varphi_{n-1}(t)\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{2.57}$$

при условии, что

$$f_0(t) = 1, \quad \varphi_0(t) = t.$$

Напишем теперь характеристичное уравнение типа (1.55), соответствующее системе *)

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-\varepsilon p(t)\cdot x,$$

в виде

$$\begin{vmatrix} f(\omega)-\rho, & f'(\omega) \\ \varphi(\omega), & \varphi'(\omega)-\rho \end{vmatrix}=0,$$

откуда имеем

$$2A=f(\omega)+\varphi'(\omega).$$

Поэтому ввиду (2.56) имеем искомое разложение для инварианта A:

$$A=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(\omega)+\varphi_n'(\omega)]\cdot\varepsilon^n,$$

а полагая здесь $\varepsilon=-1$, найдем постоянную A для уравнения (2.52) (или, что то же, для системы (2.53)):

$$A=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[f_n(\omega)+\varphi_n'(\omega)]. \tag{2.58}$$

Заметим попутно, что общее решение уравнения (2.52) может быть написано в виде

$$x=x_0f(t)+\dot{x}_0\varphi(t),$$

где x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные значения (соответствующие $t_0=0$) функции $x(t)$ и ее производной $\dot{x}(t)$. При этом

$$f(t)=1-f_1(t)+f_2(t)+\ \ldots\ +(-1)^n f_n(t)+\ \ldots,$$
$$\varphi(t)=t-\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\ \ldots\ +(-1)^n\varphi_n(t)+\ \ldots,$$

где $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ определяются формулами (2.57).

Теперь, рассматривая формулу (2.58), мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 1-я Ляпунова. *Если функция $p(t)$ такова, что может получать только отрицательные или равные нулю значения (не будучи нулем тождественно), то корни характеристичного уравнения, соответствующего уравнению* (2.52), *всегда будут вещественными, и один из них будет больше, другой меньше единицы.*

Действительно, формулы (2.57) дают

$$f_n(\omega)=\int_0^{\omega}dt\int_0^{t}p(t)f_{n-1}(t)\,dt, \quad \varphi_n'(\omega)=\int_0^{\omega}p(t)\varphi_{n-1}(t)\,dt, \tag{2.59}$$

*) Для упрощения принято $t_0=0$.

откуда видно, что при n четном величины $f_n(\omega)$ и $\varphi_n'(\omega)$ неотрицательны, а при n нечетном — неположительны. Таким образом, каждый член ряда (2.58) есть величина неотрицательная и, следовательно, постоянная A, вычисляемая по формуле (2.58), будет заведомо положительной, и притом бо́льшей единицы. А этим теорема и доказана.

5. Рассмотрим теперь случай, когда функция $p(t)$ может получать только положительные или равные нулю значения, предполагая, что она не равна нулю тождественно.

Тогда формулы (2.57) показывают, что функции $f_n(t)$ и $\varphi_n'(t)$ также могут получать только положительные или равные нулю значения и, следовательно, ряд (2.58) будет знакочередующимся.

Для исследования этого ряда выведем сначала следующее неравенство:

$$(f_{n-1}+\varphi_{n-1}')\,t\int_0^t p(t)\,dt-2n\,(f_n+\varphi_n')>0, \tag{2.60}$$

которому будут удовлетворять функции f_n и φ_n при $n>1$, для всякого отличного от нуля вещественного значения t.

Для этого положим

$$S_n=(f_{n-1}+\varphi_{n-1}')\,t\int_0^t p\,dt-2n\,(f_n+\varphi_n').$$

Вводя обозначения

$$F_n=tf_{n-1}'\int_0^t p\,dt+(f_{n-1}+\varphi_{n-1}')\int_0^t p\,dt-2nf_n',$$

$$\Phi_n=t\varphi_{n-2}\int_0^t p\,dt+(f_{n-1}+\varphi_{n-1}')\,t-2n\varphi_{n-1},$$

можем представить S_n в следующей форме:

$$S_n=\int_0^t (F_n+p\Phi_n)\,dt.$$

Неравенство (2.60) будет поэтому доказано, если покажем, что для всех положительных значений t имеют место неравенства

$$F_n>0,\quad \Phi_n>0, \tag{2.61}$$

а для всех отрицательных t — им противоположные:

$$F_n<0,\quad \Phi_n<0. \tag{2.61'}$$

С этой целью замечаем, что предыдущие выражения для функций F_n и Φ_n можно привести к виду

$$F_n = \int_0^t \left(2f'_{n-1} \int_0^t p\,dt + pu_n \right) dt,$$

$$\Phi_n = \int_0^t (2tp\varphi_{n-2} + v_n)\,dt,$$

где u_n и v_n определяются формулами

$$u_n = (\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) \int_0^t p\,dt + \varphi'_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1) f_{n-1},$$

$$v_n = (\varphi_{n-2} + t\varphi'_{n-2}) \int_0^t p\,dt + f_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1)\varphi_{n-1},$$

которые можно также написать в виде

$$u_n = \int_0^t [2p(\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) + F_{n-1}]\,dt,$$

$$v_n = \int_0^t \left[2f'_{n-1} + 2\varphi'_{n-2} \int_0^t p\,dt + p\Phi_{n-1} \right] dt.$$

Из этих формул заключаем, что если для всех положительных значений t имеют место неравенства

$$F_{n-1} > 0, \quad \Phi_{n-1} > 0,$$

то для таких же значений t будут иметь место и неравенства (2.61), и что если для всякого отрицательного значения t имеем

$$F_{n-1} < 0, \quad \Phi_{n-1} < 0,$$

то для такого же значения t будут выполняться и неравенства (2.61′).

Отсюда следует, что справедливость неравенств (2.61) для $t > 0$ и неравенств (2.61′) для $t < 0$ будет несомненной при всяком n, бо́льшем единицы, если эти неравенства имеют место для $n = 2$.

Но для $n = 2$ наши формулы дают непосредственно

$$F_2 = 2\int_0^t \left[\left(\int_0^t p\,dt \right)^2 + 2t\varphi'_1 \right] dt > 0,$$

$$\Phi_2 = 2\int_0^t [pt^2 + 2f_1]\,dt > 0.$$

Таким образом, неравенство (2.60) можно считать доказанным.

Обращаясь теперь к формуле (2.58) и замечая, что в силу доказанного только что неравенства (2.60), справедливого для всякого значения t, имеем (полагая $t = \omega$)

$$f_n(\omega) + \varphi'_n(\omega) < [f_{n-1}(\omega) + \varphi'_{n-1}(\omega)] \frac{\omega}{2n} \int_0^\omega p\,dt,$$

находим

$$A < 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n} \int_0^\omega p\,dt\right) [f_{2n-1}(\omega) + \varphi'_{2n-1}(\omega)]$$

и

$$A > 1 - \frac{\omega}{2} \int_0^\omega p\,dt + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n+2} \int_0^\omega p\,dt\right) [f_{2n}(\omega) + \varphi'_{2n}(\omega)].$$

Отсюда выводим, что если

$$\omega \int_0^\omega p\,dt \leqslant 4,$$

то необходимо будет

$$-1 < A < +1,$$

и, таким образом, приходим к следующему предложению:

Теорема 2-я Ляпунова. *Если функция $p(t)$ такова, что может получать только положительные или равные нулю значения (не будучи нулем тождественно) и если притом эта функция удовлетворяет условию*

$$\omega \int_0^\omega p\,dt \leqslant 4,$$

то корни характеристичного уравнения, соответствующего уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = 0,$$

всегда будут мнимыми, обладая модулями, равными единице.

Условия, выраженные в этой теореме, достаточны, но, конечно не необходимы, так как хотя бы для постоянного $p > 0$ эти условия вовсе не обязаны выполняться.