

Г л а в а III

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Здесь излагаются основные результаты А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре по общей теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будут использованы в следующих главах нашей книги.

§ 1. Предварительные соображения и замечания

1. Вернемся к системе (1.82) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, к которой всегда возможно привести дифференциальные уравнения движения какой-либо материальной системы с конечным числом степеней свободы.

Для удобства изложения напишем эту систему еще раз:

$$\dot{z}_s = Z_s(t | z_\sigma | \mu_j), \quad (3.1)$$

где z_s ($s = 1, 2, \dots, k$) — неизвестные функции, а μ_j ($j = 1, 2, \dots, v$) — некоторые параметры (например, массы материальных точек, образующих механическую систему).

Было уже замечено, что уравнения (3.1) мы вообще интегрировать в конечном виде не умеем, так как до сих пор не найден какой-либо достаточно общий метод нахождения общего решения или общего интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поэтому приобретает большое значение проблема разыскания частных решений (или частных интегралов), позволяющих установить хотя бы некоторые свойства функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, а следовательно, некоторые свойства движения рассматриваемой материальной системы.

Для многих задач небесной механики особенно важную роль играют периодические решения дифференциальных уравнений, соответствующие периодическим движениям или периодическим орбитам интересующих нас небесных тел.

Многовековые наблюдения за движениями планет и их спутников издавна обнаружили замечательную повторяемость небесных явлений, происходящую от периодичности или, по крайней мере, почти-периодичности действительных движений реальных небесных объектов.

Поэтому возникает вопрос о возможности представления координат движущихся небесных тел аналитическими формулами, содержащими или только периодические функции времени, или хотя бы некоторые периодические части.

А эта задача и приводится к задаче о разыскании таких решений уравнений движения типа (3.1), которые были бы или чисто периодическими функциями времени, или почти-периодическими, или содержащими периодические функции частично.

Математическая задача, требующая разрешения, заключается в самом общем виде в следующем.

Дана система дифференциальных уравнений типа (3.1). Требуется узнать, не имея общего решения этих уравнений, имеются ли среди бесчисленного множества частных решений такие, которые являются периодическими, и если такие решения существуют, то найти аналитические формулы, их представляющие.

Таким образом, задача расщепляется на две отдельные частичные задачи. Первая задача, относящаяся к области качественной теории дифференциальных уравнений, это *задача о существовании периодических решений*, и методы решения этой задачи суть *качественные методы небесной механики*. Вторая задача, заключающаяся в нахождении формул, представляющих периодические решения, относится к области аналитической теории, и методы ее решения суть *аналитические методы небесной механики*.

Наиболее трудной является первая задача, так как, если известно, что периодические решения существуют, то всегда можно найти формулы, представляющие эти решения (хотя бы при помощи бесконечных рядов).

К сожалению, математики до сих пор не открыли какой-либо общий метод обнаруживания существования периодических решений и указали только некоторые частные приемы, при помощи которых иногда действительно удается обнаружить такие решения, после чего нетрудно, как уже замечено, построить формулы, по которым можно производить вычисления.

Такие приемы основаны обычно на предварительном знании одного или нескольких изолированных периодических решений системы (3.1) или системы, получающейся из (3.1) заменой параметров μ_j какими-либо их частными значениями $\mu_j^{(0)}$ (чаще все $\mu_j^{(0)} = 0$). Такие решения иногда усматриваются из самой формы уравнений (3.1) или являются следствием самой структуры рассматриваемой материальной системы.

Например, может случиться, что уравнения (3.1) удовлетворяются постоянными значениями неизвестных функций, что соответствует положению равновесия материальной системы.

Такое решение может рассматриваться как периодическое с произвольным периодом, и тогда возникает вопрос о существовании и нахождении периодических движений около такого положения равновесия.

Если найдены периодические решения системы (3.1) при любых значениях параметров, то задачу отыскания других периодических решений, близких к уже известным, мы будем называть *задачей Ляпунова*, а совокупность методов или приемов нахождения таких периодических решений — *теорией периодических решений Ляпунова*.

Может также случиться, что легко обнаружить периодические решения системы (3.1) при частных значениях параметров (так, например, если в задаче трех тел одну из масс положить равной нулю, то получим задачу двух тел, которая допускает периодические решения — движения по кругу или по эллипсу).

Тогда можно поставить вопрос об отыскании периодических решений системы (3.1) при значениях параметров, близких к тем частным значениям, которые соответствуют периодическим решениям. Такую задачу будем называть *задачей Пуанкаре*, а совокупность методов разыскания таких периодических решений будем называть *теорией периодических решений Пуанкаре*.

Из сказанного в разделе 3 § 4 главы I непосредственно вытекает, что между этими двумя теориями нет принципиального различия, так как и та и другая рассматривают вопрос о нахождении периодических решений, близких к уже известным.

Ясно также, что теорию Пуанкаре можно рассматривать как некоторый частный (или особый) случай теории Ляпунова, так как параметры μ_j , входящие в уравнения (3.1), можно рассматривать также как неизвестные функции.

Однако из методических соображений мы будем рассматривать обе теории по отдельности. К тому же и области применимости каждой из этих двух теорий различны, и в каждом отдельном случае удобнее применять метод, взятый или из теории Ляпунова, или из теории Пуанкаре.

Мы будем заниматься в нашей книге теорией периодических решений только в указанной постановке, и других теорий по причине ограниченного объема книги касаться вовсе не будем.

Впрочем, эти другие теории носят более частный характер или просто являются некоторым обобщением или некоторым видоизменением теорий Ляпунова и Пуанкаре.

2. Итак, допустим, что нам известно какое-либо частное решение системы (3.1)

$$z_s = f_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.1')$$

в котором все функции $f_s(t)$ являются периодическими функ-

циями времени с одним и тем же вещественным периодом и что этому решению соответствуют либо произвольные значения параметров, либо специально выбранные.

Полагая тогда, как в главе I,

$$x_s = z_s - f_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.2)$$

а в случае надобности полагая, сверх того,

$$x_{k+i} = \mu_i - \mu_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, v), \quad (3.2')$$

мы опять придем к системе дифференциальных уравнений нормального вида

$$\dot{x}_s = X_s(t | x_0) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (3.3)$$

определенной решений, близкие к периодическим, уже известным.

Так как правые части уравнений (3.3) удовлетворяют условиям

$$X_s(t | 0) \equiv 0,$$

то известному периодическому решению $f_s(t)$ системы (3.1) будет соответствовать нулевое решение системы (3.3), которое будем рассматривать как периодическое с тем периодом, который нам будет нужен.

Задача, следовательно, всегда приводится к разысканию периодических решений системы (3.3), близких к нулевому решению этой системы

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0. \quad (3.3')$$

Эту задачу мы будем рассматривать (и с точки зрения Ляпунова и с точки зрения Пуанкаре) исключительно в предположениях голоморфности функций $X_s(t | x_0)$ в некоторой области начала координат, т. е. нулевого решения (3.3').

Таким образом, правые части уравнений (3.3) всегда будут представляться в виде следующих рядов:

$$X_s = X_s^{(1)} + X_s^{(2)} + \dots + X_s^{(m)} + \dots, \quad (3.4)$$

где

$$X_s^{(1)} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n \quad (3.4')$$

суть совокупности членов первого порядка с постоянными или с периодическими коэффициентами $p_{s\sigma}$, а

$$X_s^{(m)} = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \quad (3.4'')$$

суть целые однородные функции степени m также либо с постоянными, либо с периодическими коэффициентами.

Ряды (3.4) будем предполагать абсолютно сходящимися в области $|x_s| \leq A$, где A — отличная от нуля постоянная, и для всех значений t , удовлетворяющих неравенству $0 \leq t \leq \omega$, где ω — период функций X_s .

Ясно, впрочем, что в случае, когда X_s не зависят от времени, то ряды (3.4) будут сходящимися при любых значениях последнего.

Как следует из общей теоремы Ляпунова (разд. 2 § 4 главы I), общее решение системы (3.3) может быть представлено в виде рядов, расположенных по степеням произвольных постоянных (за каковые можно принять и начальные значения $x_s^{(0)}$ неизвестных функций), абсолютно сходящихся в любом, заданном наперед промежутке времени $(t_0 - T, t_0 + T)$, пока упомянутые произвольные постоянные не превосходят по модулю некоторого, отличного от нуля предела, существенно зависящего от T .

Эти ляпуновские ряды и будут играть основную роль в этой главе.

Рассмотрение нашей задачи начнем с анализа простейших, важных для всего дальнейшего случаев.

3. Рассмотрим сначала одно линейное уравнение вида

$$\dot{x} = \kappa x + R(t), \quad (3.5)$$

в котором κ — отличная от нуля постоянная, а $R(t)$ — периодическая функция t с периодом ω .

Покажем, что если $\kappa\omega$ не представляет собой целое кратное $2\pi\sqrt{-1}$, то уравнение (3.5) имеет единственное периодическое решение с периодом ω .

Действительно, общее решение уравнения (3.5) можно определить следующей формулой:

$$x = Ce^{\kappa t} + e^{\kappa t} \int_{t_0}^t e^{-\kappa \tau} R(\tau) d\tau, \quad (3.6)$$

где C обозначает произвольную постоянную.

Попробуем определить эту постоянную так, чтобы функция $x(t)$ была периодической с периодом ω , т. е. чтобы выполнялось условие $x(t_0 + \omega) = x(t_0)$. Это требование дает для определения постоянной C следующее уравнение:

$$Ce^{\kappa\omega} + e^{\kappa\omega} \int_{t_0}^{t_0 + \omega} e^{-\kappa\tau} R(\tau) d\tau = C, \quad (3.6')$$

из которого находим, если $\kappa\omega \neq 2k\pi\sqrt{-1}$ (k — целое),

$$C = \frac{1}{e^{-\kappa\omega} - 1} \int_{t_0}^{t+\omega} e^{-\kappa\tau} R(\tau) d\tau.$$

Подставляя полученное значение для C в формулу (3.6), найдем после некоторых упрощений следующую формулу для периодического решения уравнения (3.5):

$$x = \frac{e^{\kappa t}}{e^{-\kappa\omega} - 1} \int_t^{t+\omega} e^{-\kappa\tau} R(\tau) d\tau. \quad (3.6'')$$

Если постоянная κ такова, что $\kappa\omega = 2k\pi\sqrt{-1}$, то условие периодичности (3.6') выполняется только в случае, когда функция $R(t)$ удовлетворяет требованию

$$\int_{t_0}^{t_0+\omega} e^{-\kappa\tau} R(\tau) d\tau = 0.$$

Если последнее условие выполнено, то всякое решение уравнения (3.5) является периодическим.

Пусть теперь дана система линейных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma} x_{\sigma} \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

с постоянными коэффициентами. Тогда из рассмотрения формул (1.46') главы I, дающих общее решение однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами, немедленно следует, что уравнения (3.7) обязательно будут иметь периодические решения, если среди корней определяющего уравнения

$$\| p_{s\sigma} \| - \kappa E = 0 \quad (3.7')$$

имеются корни, вещественные части которых равны нулю.

При этом нулевому корню уравнения (3.7') соответствует решение, в котором все x_s — величины постоянные, что можно рассматривать, как уже было замечено выше, как периодическое решение с любым периодом.

Всякой паре чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ соответствует решение вида

$$x_s = K_s (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t)$$

с двумя произвольными постоянными и с периодом $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Поэтому, если определяющее уравнение имеет k пар чисто мнимых корней $\pm\lambda_i$, то в случае, когда ни одно из отношений λ_i/λ_j не представляет целое число, система (3.7) будет иметь k

различных периодических решений с несоизмеримыми периодами $\omega_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$.

Если же среди корней λ_i найдется два таких, что их отношение есть целое (или вообще рациональное) число, то система (3.7) будет иметь периодическое решение, содержащее две пары произвольных постоянных, и т. д.

Следовательно, возможен и такой случай, когда всякое решение системы (3.7) является периодическим с некоторым периодом, общим для всех функций x_s .

Рассмотрим теперь систему линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma} x_\sigma + R_s(t), \quad (3.8)$$

где все R_s — периодические функции от t с одним и тем же периодом ω . Допустим, что функции $R_s(t)$ представляются в виде конечных или бесконечных сумм косинусов и синусов целых кратностей величины $\frac{2\pi}{\omega}t$, так что

$$R_s(t) = a_{s0} + \sum_{k=1}^N \left(a_{sk} \cos \frac{2\pi k t}{\omega} + b_{sk} \sin \frac{2\pi k t}{\omega} \right), \quad (3.9)$$

где N — или конечное число (целое положительное), или бесконечность *).

Будем искать решение системы (3.8) в виде сумм

$$x_s = A_{s0} + \sum_{k=1}^N \left(A_{sk} \cos \frac{2\pi k t}{\omega} + B_{sk} \sin \frac{2\pi k t}{\omega} \right) \quad (3.10)$$

(конечных или бесконечных) с неопределенными коэффициентами.

Требуя, чтобы уравнения (3.8) удовлетворялись выражениями (3.10), мы получим для определения неизвестных коэффициентов уравнения вида

$$\sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma} A_{\sigma 0} = -a_{s0} \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (3.10')$$

*) Если $N = \infty$, то все ряды (3.9) будем предполагать сходящимися для всякого значения t , иными словами, будем считать все $R_s(t)$ разложимыми в сходящиеся ряды Фурье.

и

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma} A_{\sigma k} &= \frac{2\pi k}{\omega} B_{sk} - a_{sk} \quad (s = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma} B_{\sigma k} &= -\frac{2\pi k}{\omega} A_{sk} - b_{sk} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \right\} \quad (3.10'')$$

Из уравнений (3.10'') получим единственные значения величин A_{s0} , если только определитель, составленный из коэффициентов $p_{s\sigma}$, отличен от нуля. Но этот определитель есть $D(0)^*$, а поэтому указанное условие требует, чтобы определяющее уравнение системы (3.8) не имело своим корнем нуль.

Систему (3.10'') удобнее написать в виде

$$\sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma} (A_{\sigma k} + iB_{\sigma k}) = -\frac{2\pi ki}{\omega} (A_{sk} + iB_{sk}) - (a_{sk} + ib_{sk}), \quad (3.10''')$$

откуда немедленно усматриваем, что существует единственная система значений величин $A_{sk} + iB_{sk}$, удовлетворяющих уравнениям (3.10'''), если $D\left(\frac{2\pi ki}{\omega}\right) \neq 0$, т. е. если определяющее уравнение не имеет корня, представляющего целую кратность $\frac{2\pi i}{\omega}$.

Таким образом, система (3.8) заведомо будет иметь единственное периодическое решение с периодом ω , представляющееся в виде (3.10), если только определяющее уравнение $D(x) = 0$ не имеет корня вида $\frac{2\pi ki}{\omega}$, где k — любое целое число или нуль.

Если для какого-либо значения k имеем $D\left(\frac{2\pi ki}{\omega}\right) = 0$, то соответствующие значения $A_{sk} + iB_{sk}$ не могут быть определены, если только $a_{sk} + ib_{sk}$ не есть нуль.

Вообще $a_{sk} + ib_{sk} \neq 0$, и тогда система (3.8) может быть удовлетворена только в том случае, когда мы введем в соответствующий член формулы (3.10) множитель t , вследствие чего решение (3.10) делается непериодическим.

Такие случаи называются «резонансными», а соответствующее им явление, когда амплитуда неограниченно растет вместе со временем, называется «резонансом». Мы не будем заниматься изучением резонансных случаев, а отшлем читателей к специальной литературе (например, к книге И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения», Гостехиздат, 1952).

*.) См. § 3 главы I.

Рассмотрим в заключение этого параграфа систему линейных однородных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma}(t) x_\sigma, \quad (3.11)$$

все коэффициенты $p_{s\sigma}(t)$ которой — периодические функции времени с одним и тем же периодом ω .

Общее решение системы (3.11) дается формулами (1.54) главы I, в которых множители $f_{s\sigma}(t)$ — вообще многочлены относительно t вида (1.54') с периодическими коэффициентами (с тем же периодом ω).

Поэтому если среди характеристических показателей есть нуль, то система (3.11) обязательно будет иметь одно частное периодическое решение, обладающее тем же периодом ω .

Пусть теперь среди характеристических показателей есть один, вещественная часть которого равна нулю. Если λ_l есть такой показатель, то среди решений системы (3.11) найдутся решения вида

$$Cf(t) e^{\lambda_l t},$$

где $f(t)$ обозначает периодическую функцию с периодом ω , а C — постоянная.

Это решение будет периодическим с периодом ω только в том случае, когда $\lambda = \frac{2\pi k}{\omega}$ (k — целое число).

Если характеристический показатель $\kappa = \lambda_l$ таков, что мы имеем

$$\lambda = \frac{2\pi k}{\omega l},$$

где k и l — целые числа, простые между собой, то система будет иметь периодическое решение с периодом $l\omega$.

Мы видим, что системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами (однородные) резко отличаются по своим свойствам от таких же систем с постоянными коэффициентами.

Действительно, последние системы могут иметь периодические решения, обладающие любым периодом, в то время как первые допускают периодические решения или с тем же периодом, каким обладают коэффициенты $p_{s\sigma}(t)$, или кратным ему.

Если система с периодическими коэффициентами неоднородна, т. е. имеет вид

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^n p_{s\sigma}(t) x_\sigma + R_s(t), \quad (3.11')$$

то для существования периодических решений такой системы необходимо, чтобы свободные члены $R_s(t)$ также были

периодическими функциями с тем же периодом ω или с периодом, кратным ω .

Действительно, при помощи преобразования Ляпунова система (3.11') может быть преобразована к виду

$$\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^n q_{s\sigma} z_\sigma + Q_s(t), \quad (3.11'')$$

где все $q_{s\sigma}$ — постоянные, а свободные члены $Q_s(t)$ представляют собой линейные комбинации $R_s(t)$ с коэффициентами $l_{s\sigma}(t)$ преобразования Ляпунова. Так как матрица преобразования $L(t)$ периодическая с периодом ω , то для того, чтобы $Q_s(t)$ были периодическими функциями, нужно, чтобы $R_s(t)$ были также периодическими с тем же периодом ω или с кратным ему.

Но система линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами может иметь периодические решения, как показано выше, только в том случае, когда все свободные члены суть периодические функции с одним и тем же периодом.

Поэтому система (3.11'') может иметь периодические решения периода $k\omega$ (k — целое), а тогда и первоначальная система (3.11') также будет иметь периодические решения с таким же периодом.

Однако фактическое нахождение периодических решений системы (3.11) представляет задачу гораздо более сложную, чем нахождение периодических решений систем с постоянными коэффициентами и вообще возможно только при помощи применения бесконечных рядов.

§ 2. Основы теории периодических решений А. М. Ляпунова

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида (3.3), предполагая, что все X_s — голоморфные функции от x_s , не зависящие от t .

Нам будет более удобно рассматривать эту систему как систему $(n+2)$ -го порядка, которую запишем в виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_\sigma + \bar{X}_s \quad (s = 1, 2, \dots, n+2), \quad (3.12)$$

где все $\bar{p}_{s\sigma}$ — вещественные постоянные, а

$$\bar{X}_s = \bar{X}_s(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$$

суть голоморфные функции величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2},$$