периодическими функциями с тем же периодом ω или с периодом, кратным ω.

Действительно, при помощи преобразования Ляпунова система (3.11′) может быть преобразована к виду

$$\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} z_\sigma + Q_s(t), \tag{3.11''}$$

где все $q_{s\sigma}$ — постоянные, а свободные члены $Q_s(t)$ представляют собой линейные комбинации $R_s(t)$ с коэффициентами $l_{s\sigma}(t)$ преобразования Ляпунова. Так как матрица преобразования $L(t)$ периодическая с периодом ω, то для того, чтобы $Q_s(t)$ были периодическими функциями, нужно, чтобы $R_s(t)$ были также периодическими с тем же периодом ω или с кратным ему.

Но система линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами может иметь периодические решения, как показано выше, только в том случае, когда все свободные члены суть периодические функции с одним и тем же периодом.

Поэтому система (3.11″) может иметь периодические решения периода $k\omega$ (k — целое), а тогда и первоначальная система (3.11′) также будет иметь периодические решения с таким же периодом.

Однако фактическое нахождение периодических решений системы (3.11) представляет задачу гораздо более сложную, чем нахождение периодических решений систем с постоянными коэффициентами и вообще возможно только при помощи применения бесконечных рядов.

§ 2. Основы теории периодических решений А. М. Ляпунова

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида (3.3), предполагая, что все X_s — голоморфные функции от x_s, не зависящие от t.

Нам будет более удобно рассматривать эту систему как систему $(n+2)$-го порядка, которую запишем в виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_\sigma + \bar{X}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n+2), \tag{3.12}$$

где все $\bar{p}_{s\sigma}$ — вещественные постоянные, а

$$\bar{X}_s = \bar{X}_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$$

суть голоморфные функции величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2},$$

разложения которых обладают постоянными вещественными коэффициентами и начинаются членами не ниже второго порядка.

Допустим, что постоянные $\bar{p}_{s\sigma}$ таковы, что определяющее уравнение, соответствующее системе (3.12):

$$\bar{D}(\varkappa) = \| \bar{p}_{s\sigma} \| - \varkappa E = 0, \tag{3.13}$$

которое есть уравнение $(n+2)$-й степени относительно $\varkappa$, имеет пару простых чисто мнимых корней

$$\lambda i, \quad -\lambda i \qquad (\lambda > 0) \tag{3.13'}$$

и что притом уравнение (3.13) не имеет корней вида $m\lambda i$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Тогда, как установлено в предыдущем параграфе, система линейных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_\sigma, \tag{3.12'}$$

получающаяся из (3.12) отбрасыванием всех членов выше первого порядка, обязательно будет иметь периодическое решение с периодом $2\pi/\lambda$ и с двумя произвольными постоянными.

Возникает вопрос, будет ли иметь периодические решения также и нелинейная система (3.12), и если этот вопрос разрешается положительно, то как найти такие решения?

Ответом на этот вопрос и является построенная А. М. Ляпуновым теория периодических решений систем вида (3.12), к изложению основ которой мы теперь и переходим.

Предварительно мы преобразуем систему (3.12) к некоторому характерному виду, используя для этого первые интегралы линейной системы (3.12').

Действительно, из общей теории, изложенной в § 3 главы I, следует, что уравнения (3.12') имеют два первых интеграла вида

$$(x + iy)\, e^{-\lambda i t} = C_1, \quad (x - iy)\, e^{\lambda i t} = C_2,$$

где x и y — линейные формы величин x_s с постоянными вещественными коэффициентами, а C_1 и C_2 — две произвольные постоянные. Принимая тогда x и y за новые переменные вместо, например, x_{n+1} и x_{n+2}, мы приведем систему (3.12') к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y, \quad \dot{y} = +\lambda x, \\ &\dot{x}_s = \sum_{s=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + \alpha_s x + \beta_s y \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3.12''}$$

Действительно, обозначая через A_s, B_s некоторые вещественные постоянные, мы выведем из уравнений (3.12′) следующие:

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n+2} A_s x_s = \sum_{s=1}^{n+2} x_s \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{\sigma s} A_\sigma,$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n+2} B_s x_s = \sum_{s=1}^{n+2} x_s \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{\sigma s} B_\sigma.$$

Полагая теперь

$$x = \sum_{s=1}^{n+2} A_s x_s, \qquad y = \sum_{s=1}^{n+2} B_s x_s, \tag{3.14}$$

выберем постоянные A_s и B_s таким образом, чтобы предыдущие равенства приняли вид двух первых уравнений (3.12″).

Для этого A_s и B_s должны удовлетворять следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} A_\sigma = -\lambda B_s, \\ &\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} B_\sigma = +\lambda A_s \end{aligned}\right. \qquad (s = 1, 2, \ldots, n+2),$$

которые представляют систему $2(n+2)$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Отсюда выводим, что числа $A_s + iB_s$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma}(A_\sigma + iB_\sigma) = \lambda i (A_s + iB_s),$$

которые заведомо имеют ненулевые решения, так как определитель системы есть $\bar{D}(\lambda i)$ и равен нулю в силу (3.13′).

Определив линейные функции x и y, вернемся к уравнениям (3.12) и преобразуем их, принимая вместо x_{n+1} и x_{n+2} в качестве новых неизвестных x и y.

Преобразованные уравнения будут иметь, как легко видеть, следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y + X, \qquad \dot{y} = +\lambda x + Y, \\ &\dot{x}_s = \sum_{s=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + \alpha_s x + \beta_s y + X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

где $p_{s\sigma}$, α_s и β_s — постоянные, зависящие от $\bar{p}_{s\sigma}$, A_s, B_s, а X, Y и X_s — голоморфные функции величин x, y и x_s, разложения которых не содержат членов ниже второго порядка и обладают

постоянными вещественными коэффициентами. Определяющее уравнение системы (3.15) имеет вид

$$(\varkappa^2 + \lambda^2) D(\varkappa) = 0, \tag{3.16}$$

где

$$D(\varkappa) = |\,\|p_{s\sigma}\| - \varkappa E\,|. \tag{3.16'}$$

Так как сделанное нами преобразование можно рассматривать как преобразование Ляпунова, то корни определяющего уравнения системы (3.12) совпадают с корнями уравнения (3.16), откуда следует, что уравнение $D(\varkappa) = 0$ не имеет корней вида $m\lambda i$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Заметим, что, без нарушения общности, все постоянные α_s и β_s в уравнениях (3.15) можно считать равными нулю.

В самом деле, если это условие не выполняется, то сделаем дополнительное преобразование, вводя вместо переменных x_s новые переменные ξ_s подстановкой

$$\xi_s = x_s + M_s x + N_s y \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где M_s, N_s — неопределенные постоянные.

Составляя уравнения для величин ξ_s и требуя, чтобы в этих уравнениях исчезли члены с первыми степенями x и y, мы получим следующие условия:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} M_\sigma - \lambda N_s = \alpha_s, \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} N_\sigma + \lambda M_s = \beta_s,$$

которые можно переписать, как мы это уже делали выше в аналогичных случаях, в виде системы уравнений с неизвестными $M_s + iN_s$:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(M_\sigma + iN_\sigma) + \lambda i (M_s + iN_s) = \alpha_s + i\beta_s.$$

Так как определитель этой системы есть $D(-\lambda i)$, т. е. величина, не равная нулю в силу свойств постоянных $p_{s\sigma}$, то последние уравнения разрешимы и дадут единственную, вполне определенную систему значений для $M_s + iN_s$.

Таким образом, вместо системы (3.15) можем рассматривать следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y + X, \qquad \dot{y} = +\lambda x + Y, \\ &\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

где величины $p_{s\sigma}$ те же самые, что и в (3.15), причем X, Y и X_s обладают такими же свойствами, как и аналогичные величины в первоначальных уравнениях (3.15).

2. Если мы отбросим в уравнениях (3.17) все члены выше первого порядка, то получим уравнения первого приближения

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y, \qquad \dot{y} = +\lambda x, \\ &\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.17'}$$

которые имеют очевидное решение:

$$x = c \cdot \cos\lambda(t - t_0), \qquad y = c \cdot \sin\lambda(t - t_0), \qquad x_s = 0,$$

с периодом $2\pi/\lambda$ и с двумя произвольными постоянными.

Докажем теперь теорему А. М. Ляпунова о существовании периодического решения полных уравнений (3.17).

Теорема А. М. Ляпунова. *Если уравнениям* (3.17) *возможно удовлетворить рядами вида*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}, \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}, \qquad x_s = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_s^{(k)}, \tag{3.18}$$

расположенными по возрастающим степеням произвольной постоянной c, в которых все $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_s^{(k)}$ были бы периодическими функциями времени, представляемыми конечными суммами косинусов и синусов целых кратностей переменной τ, где

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \qquad T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots), \tag{3.18'}$$

то ряды (3.18) *сходятся абсолютно при всяком t, пока $|c|$ не превышает известного предела, и действительно представляют периодическое решение уравнений* (3.17) *с периодом T, являющимся голоморфной функцией c.*

Для доказательства преобразуем сначала уравнения (3.17) к новым переменным, делая подстановку:

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta, \qquad x_s = r z_s, \tag{3.19}$$

где r и ϑ — величины, аналогичные полярным координатам на плоскости.

Преобразованные уравнения, как нетрудно проверить, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{r} = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta, \qquad \dot{\vartheta} = \lambda + \frac{Y\cos\vartheta - X\sin\vartheta}{r}, \\ &\dot{z}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} z_\sigma - \frac{X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta}{r} z_s + \frac{1}{r} X_s, \end{aligned}\right\} \tag{3.19'}$$

где X, Y, X_s предполагаются выраженными через новые переменные по формулам (3.19).

Так как все функции X, Y, X_s в уравнениях (3.17) не содержат в своих разложениях членов ниже второго порядка относительно x, y, x_s, то правые части уравнений (3.19′) будут голоморфными функциями величин r, z_1, z_2, ..., z_n, уничтожающимися при одновременном равенстве всех этих величин нулю и коэффициенты разложений которых суть периодические функции величины ϑ, которые всегда можно представить в виде конечных рядов косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Так как предположено (что не нарушает общности), что постоянная λ положительна, то пока $|r|$, $|z_s|$ достаточно малы, $\dot{\vartheta} > 0$ и переменная ϑ возрастает одновременно с t. Поэтому ϑ можно принять за новую независимую переменную вместо t, вследствие чего уравнения, определяющие r и z_s как функции ϑ, напишутся следующим образом:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R, \qquad \frac{dz_s}{d\vartheta} = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} z_\sigma + \varphi_s \cdot r + Z_s, \tag{3.20}$$

где

$$q_{s\sigma} = \frac{1}{\lambda} p_{s\sigma} \qquad (s,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

величины φ_s обозначают некоторые квадратичные формы от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, а R и Z_s — голоморфные функции переменных r и z_s, разложения которых по степеням этих величин не содержат членов ниже второго порядка и обладают периодическими относительно ϑ коэффициентами, представляемыми конечными суммами косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Притом ряды эти сходятся равномерно для всех вещественных значений ϑ, пока модули величин r, z_s не превосходят некоторого, не равного нулю предела.

Будем теперь искать частное решение системы (3.20) в виде рядов

$$r = c + \sum_{k=2}^{\infty} c^k u^{(k)}, \qquad z_s = \sum_{k=1}^{\infty} c^k u_s^{(k)}, \tag{3.21}$$

расположенных по возрастающим степеням произвольной постоянной c с периодическими относительно ϑ коэффициентами.

Подставляя ряды (3.21) вместо r, z_s в уравнения (3.20) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c в левых и правых частях равенств, мы получим для определения неизвестных функций $u^{(k)}$, $u_s^{(k)}$ следующие системы дифференциальных

уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du_s^{(1)}}{d\vartheta}=\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}u_\sigma^{(1)}+\varphi_s && (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\
&\frac{du^{(l)}}{d\vartheta}=U^{(l)} && (l=2,\ 3,\ \ldots),\\
&\frac{du_s^{(l)}}{d\vartheta}=\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}u_\sigma^{(l)}+\varphi_s u^{(l)}+U_s^{(l)} && \begin{pmatrix} l=2,\ 3,\ \ldots\\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n\end{pmatrix},
\end{aligned}\right\} \qquad (3.21')$$

где $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ — известные целые рациональные функции от тех $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < l$, с коэффициентами, представляющими конечные ряды косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Уравнения (3.21) интегрируются последовательно и доставляют искомые функции в следующем порядке:

$$u_s^{(1)},\ u^{(2)},\ u_s^{(2)},\ u^{(3)},\ u_s^{(3)},\ \ldots,\ u^{(l)},\ u_s^{(l)},\ \ldots, \qquad (3.21'')$$

и когда уравнения (3.20) действительно имеют периодическое решение, то функции $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ будут получаться в виде конечных сумм косинусов и синусов целых кратностей ϑ с постоянными коэффициентами.

Допустим, что все функции $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < l$, определены и вышли периодическими функциями указанного характера. Тогда прежде всего найдем следующую по порядку функцию $u^{(l)}$ простой квадратурой:

$$u^{(l)}=\int_0^{\vartheta} U^{(l)}\,d\vartheta, \qquad (3.22)$$

и если периодическая функция, стоящая под знаком интеграла, не содержит постоянного члена, то функция $u^{(l)}$ также будет периодической.

Но тогда уравнения из системы (3.21′), определяющие функции $u_s^{(l)}$, заведомо будут иметь периодическое решение, так как свободные члены в этих уравнениях суть периодические функции, являющиеся конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей ϑ, а уравнение

$$\Delta(\varkappa)=|\,\|q_{s\sigma}\|-\varkappa E\,|=\frac{1}{\lambda^n}D(\lambda\varkappa)=0 \qquad (3.23)$$

при сделанных допущениях не имеет корней вида $m\sqrt{-1}$.

Поэтому рассматриваемые уравнения принадлежат к типу уравнений (3.8), рассмотренных в § 1 этой главы, только неза-

висимой переменной является ϑ и период свободных членов равен 2π.

Если же подынтегральная функция в формуле для $u^{(l)}$ содержит постоянный член, то функция $u^{(l)}$ будет представляться в виде

$$u^{(l)} = g\vartheta + v, \qquad g = \text{const},$$

где v — периодическая функция, а поэтому $u^{(l)}$, а следовательно, и все последующие определяемые функции не будут периодическими и периодическое решение системы (3.20) не существует *).

3. Докажем теперь, что в случае, когда все функции (3.21′) оказываются периодическими, ряды (3.21) будут абсолютно сходящимися, по крайней мере при достаточно малых значениях $|c|$ и при всех вещественных значениях ϑ.

Для доказательства предположим, что при помощи некоторого линейного преобразования система (3.20) приведена к такому виду, в котором все коэффициенты $q_{s\sigma}$, которые не содержатся в группе

$$q_{11} = \varkappa_1,\ q_{22} = \varkappa_2,\ \ldots,\qquad q_{nn} = \varkappa_n,$$
$$q_{21} = \sigma_1,\ q_{32} = \sigma_2,\ \ldots,\ q_{n,\,n-1} = \sigma_{n-1},$$

суть нули, а $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — корни уравнения (3.23).

Такое преобразование, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, всегда возможно, и мы можем считать, что оно уже выполнено.

Рассматривая теперь в этом предположении ряды (3.21), допустим, что в этих рядах все коэффициенты $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$ для которых $\mu < l$, уже определены и, таким образом, известны.

Тогда для определения коэффициентов $u^{(l)}$ и $u_s^{(l)}$ получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du^{(l)}}{d\vartheta} = U^{(l)},\\
&\frac{du_1^{(l)}}{d\vartheta} = \varkappa_1 u_1^{(l)} + \varphi_1 u^{(l)} + U_1^{(l)},\\
&\frac{du_j^{(l)}}{d\vartheta} = \varkappa_j u_j^{(l)} + \sigma_{j-1} u_{j-1}^{(l)} + \varphi_j u^{(l)} + U_j^{(l)}\\
&\qquad\qquad (j = 2, 3, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

где $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ (а также, конечно, и все φ_s) являются известными периодическими функциями ϑ с общим периодом 2π.

---

*) В сущности, мы можем только утверждать, что в этом случае не существует периодическое решение рассматриваемого типа.

Первое из этих уравнений дает опять формулу (3.22) и определяет, по нашему предположению, периодическую функцию $u^{(l)}$. Каждое из следующих уравнений представляет собой уравнение с одной только неизвестной типа (3.5). В самом деле, второе из уравнений (3.24) после нахождения $u^{(l)}$ определяет функцию $u_1^{(l)}$, а затем из третьего уравнения (3.24) находим последовательно $u_2^{(l)}, \ldots, u_n^{(l)}$.

Для нахождения каждой периодической функции $u_s^{(l)}$ мы можем воспользоваться общей формулой (3.6″) § 1, заменяя в последней t на ϑ, ω на 2π, $\varkappa$ на $\varkappa_s$ и $R(t)$ — соответствующим выражением.

Таким образом, для функций $u_s^{(l)}$ мы получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(l)} &= \frac{e^{\varkappa_1\vartheta}}{e^{-2\pi\varkappa_1}-1}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\varkappa_1\tau}\left[\varphi_1 u^{(l)} + U_1^{(l)}\right]d\tau, \\ u_j^{(l)} &= \frac{e^{\varkappa_j\vartheta}}{e^{-2\pi\varkappa_j}-1}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\varkappa_j\tau}\left[\sigma_{j-1}u_{j-1}^{(l)} + \varphi_j u^{(l)} + U_j^{(l)}\right]d\tau \\ &\qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Положим теперь

$$\varkappa_s = \lambda_s + i\mu_s, \qquad \rho_s = \frac{\lambda_s}{e^{2\pi\lambda_s}-1}\sqrt{1-2e^{2\pi\lambda_s}\cos 2\pi\mu_s + e^{4\pi\lambda_s}},$$

где λ_s и μ_s — вещественные числа, а радикал считается положительным. Если $\lambda_s = 0$, то под ρ_s будем подразумевать предел

$$\frac{|\sin \pi\mu_s|}{\pi},$$

к которому стремится его выражение при $\lambda_s \to 0$.

При сделанных предположениях о корнях определяющего уравнения все ρ_s будут во всяком случае отличными от нуля.

Обозначим затем через $v^{(l)}$, $v_s^{(l)}$ высшие пределы модулей функций $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ в пределах изменяемости ϑ от 0 до 2π (а следовательно, и для всех вещественных значений ϑ), а через a_s — такие же пределы модулей функций φ_s.

Замечая теперь, что $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ в формулах (3.25) — целые функции от найденных ранее $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, в которых коэффициенты представляют линейные формы с положительными числовыми коэффициентами от коэффициентов разложений функций R и Z_s, и обозначая через $V^{(l)}$, $V_s^{(l)}$ — результаты замены в функциях $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ величин $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, φ_s величинами $v^{(i)}$, $v_s^{(i)}$, a_s и коэффициентов

разложений R, Z_s высшими пределами их модулей в пределах изменяемости ϑ от нуля до 2π, мы можем принять:

$$v^{(l)} = 2\pi V^{(l)},$$

$$v_1^{(l)} = \frac{a_1 v^{(l)} + V_1^{(l)}}{|e^{-2\pi\varkappa_1} - 1|} e^{\lambda_1\vartheta} \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\lambda_1\tau}\, d\tau,$$

$$v_j^{(l)} = \frac{|\sigma_{j-1}|\, v_{j-1}^{(l)} + a_j v^{(l)} + V_j^{(l)}}{|e^{-2\pi\varkappa_j} - 1|} \cdot e^{\lambda_j\vartheta} \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\lambda_j\tau}\, d\tau.$$

Но легко проверить, что

$$|e^{-2\pi\varkappa_s} - 1| = \frac{1 - e^{2\pi\lambda_s}}{\lambda_s} \rho_s, \qquad \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{-\lambda_s\tau}\, d\tau = e^{-\lambda_s\vartheta} \frac{1 - e^{-2\pi\lambda_s}}{\lambda_s},$$

поэтому из предыдущих формул выводим следующее:

$$\begin{gathered} v^{(l)} = 2\pi V^{(l)}, \qquad \rho_1 v_1^{(l)} = a_1 v^{(l)} + V_1^{(l)}, \\ \rho_j v_j^{(l)} = |\sigma_{j-1}|\, v_{j-1}^{(l)} + a_j v^{(l)} + V_j^{(l)} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n), \end{gathered} \tag{3.26}$$

в которых $V^{(l)}$, $V_s^{(l)}$ будут зависеть только от тех $v^{(\mu)}$, $v_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < l$. Уравнениями этими можно будет пользоваться для всякого $l > 1$. Притом можно будет принять

$$\rho_1 v_1^{(1)} = a_1, \quad \rho_j v_j^{(1)} = |\sigma_{j-1}|\, v_{j-1}^{(1)} + a_j, \tag{3.26'}$$

и тогда они дадут возможность найти всякую из постоянных v и определят высшие пределы модулей для всех функций $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, годные для всех вещественных значений ϑ.

Но по свойству функций R, Z_s для модулей коэффициентов в их разложениях (которые суть периодические функции от ϑ) всегда можно выбрать постоянные высшие пределы так, чтобы ряды, в которые обратятся эти разложения после замены коэффициентов такими высшими пределами, были сходящимися при отличных от нуля r, z_s, модули которых достаточно малы. Тогда этими рядами определятся некоторые голоморфные функции переменных r, z_s, которые обозначим соответственно через $F(r|z_\sigma)$ и $F_s(r|z_\sigma)$. Функции эти будут уничтожаться при $r = z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ и притом заведомо не будут содержать в своих разложениях члены первого порядка.

Если же высшие пределы, о которых идет речь, выбраны таким образом, то величины $v^{(l)}$, $v_s^{(l)}$, определяемые формулами

(3.26), представят коэффициенты в разложениях

$$\left.\begin{aligned} r &= c + v^{(2)}c^2 + v^{(3)}c^3 + \ldots, \\ z_s &= v_s^{(1)}c + v_s^{(2)}c^2 + v_s^{(3)}c^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

по целым положительным степеням c величин r, z_s, удовлетворяющих уравнениям

$$\left.\begin{aligned} r &= c + 2\pi F(r \mid z_\sigma), \\ \rho_1 z_1 &= a_1 r + F_1(r \mid z_\sigma), \\ \rho_j z_j &= \mid \sigma_{j-1} \mid z_{j-1} + a_j r + F_j(r \mid z_\sigma) \quad (j = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{3.27'}$$

и обращающихся в нуль при $c = 0$.

Но существование решения (3.27) уравнений (3.27′) вытекает из общей теоремы о неявных функциях (см. § 2 главы I), так как уравнения (3.27′) удовлетворяют, как легко установить, всем условиям упомянутой теоремы.

Поэтому ряды (3.27) будут абсолютно сходящимися по крайней мере при достаточно малых значениях $|c|$, а так как эти ряды являются усиливающими для рядов (3.21), то последние также будут абсолютно сходящимися при достаточно малом $|c|$ и при всех вещественных значениях ϑ.

Поэтому построенные нами ряды (3.21), в которых все коэффициенты — периодические функции ϑ с периодом 2π (представляющиеся конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей ϑ), действительно определят периодическое решение уравнений (3.20), зависящее от произвольной постоянной c и стремящееся к нулю, когда c стремится к нулю.

4. Найденному частному решению системы (3.20) соответствует по формулам (3.19) некоторое частное решение уравнений (3.17), которое напишется предварительно в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \left[c + \sum_{k=2}^{\infty} u^{(k)}c^k\right]\cos\vartheta, \\ y &= \left[c + \sum_{k=2}^{\infty} u^{(k)}c^k\right]\sin\vartheta, \\ x_s &= rz_s = \sum_{k=2}^{\infty} \bar{u}_s^{(k)}c^k \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

где

$$\bar{u}_s^{(k)} = u^{(k-1)}u_s^{(1)} + \ldots + u^{(2)}u_s^{(k-2)} + u_s^{(k-1)}$$

также периодические функции ϑ с периодом 2π.

В формулах (3.28) нужно теперь заменить вспомогательную переменную ϑ ее выражением в функции t и установить периодичность полученного решения относительно t.

Покажем, как найдется эта функция и каков будет вид периодического решения системы (3.17).

Для этого обратимся к уравнению, определяющему переменную ϑ в зависимости от времени, т. е. ко второму из уравнений (3.19′), которое можно написать в виде

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta. \tag{3.29}$$

Здесь через Θ обозначена голоморфная функция переменных r, z_s, уничтожающаяся при одновременном равенстве последних нулю и обладающая в своем разложении коэффициентами, представляющими целые рациональные функции от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, которые можно также представить в виде конечных сумм косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Заменяя теперь в выражении функции Θ величины r и z_s разложениями (3.21), мы сделаем Θ функцией переменной ϑ, а поэтому из уравнения (3.29) можно будет определить ϑ как функцию t.

Полагая, что при $t = t_0$ $\vartheta = 0$, мы выведем сначала из (3.29)

$$\int_0^{\vartheta} \frac{\lambda\, d\vartheta}{\lambda + \Theta} = \lambda (t - t_0). \tag{3.29′}$$

Так как после подстановки в Θ вместо r и z_s рядов (3.21) эта величина делается голоморфной функцией c, уничтожающейся при $c = 0$, то функция, стоящая под знаком интеграла в (3.29′), также голоморфна относительно c и равна единице при $c = 0$.

Поэтому разложение этой функции по степеням c имеет следующий вид:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \Theta} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \Theta_j,$$

где все Θ_j — не зависящие от c периодические функции ϑ, которые можно представить в виде конечных рядов косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Поэтому из уравнения (3.29′) выводим следующее:

$$\vartheta + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \int_0^{\vartheta} \Theta_j\, d\vartheta = \lambda (t - t_0), \tag{3.30}$$

и наша задача заключается теперь в определении ϑ как функции t из этого уравнения.

Для решения этого уравнения преобразуем его к другому виду, выделяя в левой его части все члены, содержащие

множителем ϑ. Для этого выделим из функции Θ_j постоянную часть («вековой» член!), полагая

$$\Theta_j = h_j + \bar{\Theta}_j, \tag{3.31}$$

где $\bar{\Theta}_j$ — сумма членов вида $M \cos k\vartheta + N \sin k\vartheta$, а h_j определяется формулой

$$h_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_j \, d\vartheta. \tag{3.31'}$$

При этом, рассматривая внимательно структуру функций Θ_j, мы без труда убедимся, что $h_1 = 0$.

В самом деле, разложение функции Θ начинается членами первого порядка относительно r, z_s и коэффициенты этих членов содержат только первые степени $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Поэтому и Θ_1 есть линейная функция этих величин и ее вековой член, разумеется, есть нуль.

Теперь уравнению (3.30) можно придать вид

$$h\left[\vartheta + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \Phi_j(\vartheta)\right] = \lambda(t - t_0), \tag{3.30'}$$

где положено для сокращения

$$h = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j c^j \tag{3.31''}$$

и где все $\Phi_j(\vartheta)$ — некоторые, не зависящие от c, конечные ряды косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Ряды (3.30′) и (3.31″), как это следует из самого способа их получения, будут абсолютно сходящимися для всякого значения ϑ (как вещественного, так и комплексного), пока $|c|$ не превосходит некоторого, отличного от нуля предела.

Положим теперь

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} h = \frac{2\pi}{\lambda}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j c^j\right] \tag{3.32}$$

и введем вместо t и ϑ новые переменные τ и φ формулами

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \qquad \varphi = \vartheta - \tau. \tag{3.32'}$$

Тогда уравнение (3.30′) приведется к виду

$$\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \Phi_j(\varphi + \tau) = 0, \tag{3.33}$$

в котором будем рассматривать φ как неизвестную, постоянную c — как независимую переменную, а τ — как параметр. Замечая теперь, что каждая из функций $\Phi_j(\varphi+\tau)$ по своему характеру может быть представлена в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням φ и абсолютно сходящегося при всяких φ и τ, мы можем применить к уравнению (3.33) теорему 1 о неявных функциях (см. § 2 главы I). Действительно, уравнение (3.33) удовлетворяется при $c=0$, $\varphi=0$, а его левая часть голоморфна относительно c и φ, причем производная по φ от левой части этого уравнения равна единице при $\varphi=c=0$. Поэтому на основании упомянутой теоремы можем утверждать, что искомая функция φ, удовлетворяющая этому уравнению и обращающаяся в нуль при $c=0$, будет голоморфна относительно c и представится рядом вида

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty} c^k\varphi_k(\tau), \tag{3.33'}$$

абсолютно сходящимся по крайней мере при достаточно малых $|c|$ и при всех значениях τ. Функции $\varphi_k(\tau)$ легко находятся последовательно и выражаются при помощи функций Φ_j и их производных. Например, мы имеем

$$\varphi_1(\tau)=-\Phi_1(\tau),\qquad \varphi_2(\tau)=\Phi_1(\tau)\Phi_1'(\tau)-\Phi_2(\tau),\ \ldots$$

Все эти функции представляются конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей τ, а поэтому являются периодическими относительно τ с периодом 2π.

Таким образом, для ϑ найдем следующее выражение:

$$\vartheta=\tau+\sum_{k=1}^{\infty} c^k\varphi_k(\tau), \tag{3.34}$$

из которого видно, что ϑ увеличивается на 2π, когда τ получает такое же приращение.

Внося это выражение для ϑ в формулы (3.28) и затем разлагая результаты подстановок в ряды по степеням c, мы получим искомое решение уравнений (3.17) в виде рядов:

$$\left.\begin{aligned} x&=\sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}(\tau), & y&=\sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}(\tau),\\ x_s&=\sum_{k=2}^{\infty} c^k x_s^{(k)}(\tau) & &(s=1,2,\ldots,n),\end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

абсолютно сходящихся по крайней мере при достаточно малых значениях $|c|$ и при всяком значении τ. Все коэффициенты рядов (3.35) будут периодическими функциями от τ, представляющимися конечными рядами косинусов и синусов целых кратно-

стей τ. Заменяя, наконец, τ его выражением (3.32′), мы убедимся, что формулы (3.35) определяют решение уравнений (3.17), периодическое относительно t, с общим периодом T, зависящим от произвольной постоянной c.

Таким образом, теорема А. М. Ляпунова доказана.

Заметим теперь, что, возвращаясь от переменных системы (3.17) к первоначальным переменным заданной системы (3.12), мы выведем, в силу линейных соотношений с постоянными коэффициентами, связывающими эти системы переменных, периодическое решение системы (3.12) в виде аналогичных рядов

$$x_s = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_s^{(k)}(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n+2), \tag{3.35′}$$

коэффициенты которых суть периодические функции t с тем же периодом T, определяемым формулой (3.32), причем ряды (3.35′) будут абсолютно сходящимися при достаточно малых значениях $|c|$ и при всех значениях времени t.

Это периодическое решение содержит две произвольные постоянные c и t_0, из которых последняя не имеет, впрочем, существенного значения для характера движения, определяемого формулами (3.35′). Характер движения определяется главным образом произвольной постоянной c, изменяя которую непрерывным образом, получим некоторый непрерывный ряд периодических движений, близких к исходному движению, которое представляется теми же формулами при $c = 0$.

Полезно заметить еще, что, отбрасывая в формулах (3.35) или (3.35′) все члены выше первого порядка относительно произвольной постоянной c, мы получим периодическое решение первого приближения, т. е. линейных уравнений (3.17′), или соответственно (3.12′), и это решение будет иметь период, получающийся из (3.32) отбрасыванием всех членов выше первого порядка, т. е. период, равный $2\pi/\lambda$.

Разумеется, что аналогичное периодическое решение системы (3.12) мы получим для каждой пары простых чисто мнимых корней определяющего уравнения, так что если уравнение (3.13) имеет k пар простых чисто мнимых корней $\pm\lambda_s i$, причем ни одно из отношений λ_i/λ_j не есть целое число, то система (3.12) будет иметь k различных периодических решений, каждое с одной существенной произвольной постоянной.

5. Теорема Ляпунова устанавливает, что если уравнениям (3.17) можно удовлетворить периодическими рядами, расположенными по степеням произвольной постоянной c, то эти уравнения действительно имеют периодическое решение, представляемое указанными рядами. Поэтому, если, применяя процедуру, описанную в разделе 2, мы никогда не встретим

функции $u^{(l)}$, содержащей вековой член, то можем быть уверены, что периодическое решение действительно существует. Однако такой способ может привести к цели только в том случае, когда ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным, т. е. когда периодическое решение рассматриваемого типа не существует.

Поэтому для приложений теории Ляпунова к задачам небесной механики чрезвычайно важно иметь какие-либо признаки, которые позволили бы заранее и при помощи конечного числа операций установить, что интересующее нас периодическое решение действительно существует.

Такой признак указан А. М. Ляпуновым в его знаменитом сочинении и позволяет в ряде важных для нас случаев обнаруживать существование периодического решения, которое после этого всегда может быть найдено в виде указанных выше рядов.

Этот признак существования периодических решений вытекает из следующей, чрезвычайно важной теоремы:

Теорема А. М. Ляпунова о голоморфном интеграле. *Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений вида*

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y + X, \qquad \dot{y} = +\lambda x + Y, \\ &\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma + X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

где λ — положительная постоянная, $p_{s\sigma}$ — такие постоянные вещественные коэффициенты, что уравнение $D(\varkappa) = 0$ не имеет корней вида $m\lambda\sqrt{-1}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а X, Y, X_s — голоморфные функции величин x, y и x_s, разложения которых не содержат членов ниже второго порядка и обладают постоянными вещественными коэффициентами.

Тогда, если система (3.36) *имеет не зависящий от времени голоморфный интеграл, в котором совокупность членов второго порядка содержит переменные x и y, то уравнения* (3.36) *всегда имеют периодическое решение, представляемое рядами вида*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}, \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}, \qquad x_s = \sum_{k=2}^{\infty} c^k x_s^{(k)}, \tag{3.36'}$$

где c — произвольная постоянная, а все $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_s^{(k)}$ — периодические функции времени с общим периодом T, являющимся голоморфной функцией c, представляемые конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей величины τ,

определяемой формулами

$$\tau = \frac{2\pi(t-t_0)}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{1 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k c^k\right\}, \tag{3.36''}$$

причем все h_k — вполне определенные постоянные, а t_0 — вторая произвольная постоянная.

По условию теоремы уравнения (3.36) имеют первый интеграл следующего вида:

$$\Phi(x, y \mid x_\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x, y \mid x_\sigma) = \text{const}, \tag{3.37}$$

где Φ_k обозначает целую однородную функцию величин x, y, x_s степени k, причем Φ_2 обязательно содержит члены с x и y.

Нетрудно показать, что при сделанных предположениях $\Phi_1 \equiv 0$, а Φ_2 содержит x и y только в виде суммы $x^2 + y^2$, т. е. что интеграл (3.37) обязательно имеет вид

$$x^2 + y^2 + F(x, y \mid x_\sigma) = \text{const}, \tag{3.37'}$$

где F означает голоморфную функцию от x, y, x_s, разложение которой не содержит членов ниже второго порядка, а в членах второго порядка, если такие входят в нее, не содержится ни x, ни y. Чтобы показать это, напишем интеграл Φ в возможно более общем виде, выписывая только члены первого и второго порядков:

$$\Phi = \alpha x + \beta y + \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma x_\sigma + ax^2 + 2bxy + cy^2 + \\ + \sum_{\sigma=1}^{n} a_\sigma x x_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{n} b_\sigma y y_\sigma + \sum_{s,\,\sigma=1}^{n} a_{s\sigma} x_s x_\sigma + \ldots = \text{const}. \tag{3.38}$$

Так как $\Phi = \text{const}$ есть по условию первый интеграл системы (3.36), то должно выполняться следующее тождество:

$$(-\lambda y + X)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + (\lambda x + Y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \\ + \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s)\frac{\partial\Phi}{\partial x_s} \equiv 0. \tag{3.38'}$$

Подставляя сюда вместо Φ выражение (3.38) и приравнивая в тождестве (3.38′) коэффициенты членов первой степени нулю, получим, очевидно:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma s}\gamma_\sigma = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как определитель $D(0)$ не равен нулю, то все γ_s — нули, а следовательно, $\Phi_1 \equiv 0$.

Приравнивая теперь в тождестве (3.38′) нулю коэффициенты при xx_s и yy_s, получим следующие условия:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma s} a_\sigma + \lambda b_s = 0, \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma s} b_\sigma - \lambda a_s = 0,$$

которые, как мы уже неоднократно делали в аналогичных случаях, можно переписать в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma s} (a_\sigma + i b_\sigma) - \lambda i (a_s + i b_s) = 0.$$

Но определитель этой системы есть $D(\lambda i)$ и он не равен нулю по условию теоремы. Поэтому все $a_s + i b_s$, а значит и все a_s, b_s, равны нулю.

Наконец, приравнивая нулю коэффициенты при x^2, xy, y^2 в тождестве (3.38′), мы получим

$$b = 0, \qquad a - c = 0,$$

а так как по условию теоремы функция Φ_2 должна содержать члены с x и y, то $a = c \neq 0$ и, следовательно, функция Φ_2 имеет вид

$$\Phi_2 = a(x^2 + y^2) + \sum_{s,\ \sigma=1}^{n} a_{s\sigma} x_s x_\sigma.$$

Поэтому интеграл системы (3.36) действительно имеет вид (3.37′), что мы и хотели показать.

Имея интеграл системы (3.36) в виде (3.37′), вводим теперь в этот интеграл вместо переменных x, y, x_s переменные r, ϑ, z_s при помощи подстановки (3.19). Тогда извлечением квадратного корня выведем из интеграла (3.37′) следующий:

$$r + r\Psi(r, \vartheta \mid z_\sigma) = \text{const}, \tag{3.39}$$

где Ψ — голоморфная функция величин r, z_s, уничтожающаяся при одновременном равенстве их нулю и обладающая в своем разложении периодическими относительно ϑ коэффициентами, являющимися конечными суммами косинусов и синусов целых кратностей ϑ.

Очевидно, что равенство (3.39) есть интеграл уравнений (3.20), к которым сделанной подстановкой приводится система (3.36) (совпадающая с системой (3.17)).

Чтобы доказать теперь сформулированную выше теорему Ляпунова, допустим, что периодическое решение не существует и что при составлении рядов (3.21), удовлетворяющих уравнениям (3.20), это обнаруживается в первый раз в членах m-го

порядка. Следовательно, все коэффициенты $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$ — периодические функции, а коэффициент $u^{(m)}$ имеет вид

$$u^{(m)} = g\vartheta + v,$$

где g — отличная от нуля постоянная, а v — периодическая функция.

В этом предположении делаем в (3.39) подстановку

$$r = c + u^{(2)}c^2 + \ldots + u^{(m-1)}c^{m-1} + u^{(m)}c^m,$$
$$z_s = u_s^{(1)}c + u_s^{(2)}c^2 + \ldots + u_s^{(m-1)}c^{m-1},$$

и результат подстановки располагаем по степеням c.

Так как (3.39) есть интеграл системы (3.20), то по самому определению величин u в результате должны выйти постоянными все члены, содержащие c в степенях ниже $(m+1)$-й. Но это, по крайней мере для члена с m-й степенью c, очевидно, невозможно, так как для функции $r\Psi$ такой член необходимо будет периодическим, и следовательно, наверное, не даст постоянной величины в сумме с членом $(g\vartheta + v)c^m$ функции r.

Мы должны поэтому заключить, что наше допущение неверно и что, следовательно, как бы далеко ни были продолжаемы ряды (3.21), все члены в них необходимо будут выходить периодическими функциями ϑ.

Но тогда, как было доказано выше, ряды эти будут абсолютно сходящимися при всех вещественных значениях ϑ и при $|c|$, не превышающем известного предела, и представляют действительно периодическое решение уравнений (3.20).

А тогда уравнения (3.36) обязательно будут иметь периодическое решение вида (3.36′), и теорема доказана.

Примечание. Мы предполагали до сих пор, что уравнение $D(\varkappa) = 0$ не имеет равных нулю корней. Однако, как замечает А. М. Ляпунов в своем сочинении, периодические решения могут существовать и при наличии нулевых корней, если только выполняются некоторые дополнительные условия.

Точно так же А. М. Ляпунов отметил, что предположение о том, что уравнение $D(\varkappa) = 0$ не имеет корней вида $m\lambda i$, тоже не является существенным и периодические решения могут существовать и в этих случаях. Сам Ляпунов ограничивается доказательством той теоремы, которая изложена выше в этой книге, и общего доказательства не приводит.

Это общее доказательство дано Ю. А. Рябовым *), который подробно рассмотрел случаи, не разобранные Ляпуновым, и

*) Ю. А. Рябов, Обобщение одной теоремы А. М. Ляпунова, Учен. зап. МГУ, «Математика», т. VII, вып. 165, 1954. В этой статье рассмотрены также и некоторые другие вопросы теории периодических решений.

выявил некоторые достаточно общие условия существования периодических решений систем Ляпунова вида (3.36), не налагая никаких ограничений на корни определяющего уравнения $D(\varkappa) = 0$.

6. Если существование периодического решения, соответствующего паре чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ определяющего уравнения, заранее обеспечено, то ряды, представляющие такое решение, всегда могут быть найдены, причем для их вычисления не нужно даже делать те предварительные преобразования, которые требовались для доказательства общей теоремы.

Действительно, пусть нам известно, что определяющее уравнение системы (3.12) имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ и что периодическое решение вида (3.35′) действительно существует. Тогда можем поступать следующим образом: положим

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k c^k\right), \tag{3.40}$$

где h_k обозначают некоторые неопределенные коэффициенты, и введем в уравнения (3.12) новую переменную τ посредством подстановки

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}. \tag{3.40′}$$

Полученные преобразованные уравнения

$$\frac{dx_s}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k c^k\right]\left\{\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_\sigma + \bar{X}_s\right\} \tag{3.41}$$

стараемся удовлетворить рядами вида

$$x_s = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_s^{(k)}(\tau), \tag{3.41′}$$

где все коэффициенты обозначают не зависящие от c функции τ. Подставляя для этого ряды (3.41′) в уравнения (3.41) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c в левых и правых частях равенств, мы получим для определения неизвестных коэффициентов следующие системы уравнений:

$$\frac{dx_s^{(1)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_s^{(1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.42}$$

и для $m > 1$:

$$\frac{dx_s^{(m)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_s^{(m)} + \frac{h_{m-1}}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_s^{(1)} + \frac{1}{\lambda} X_s^{(m)}, \tag{3.42′}$$

где $X_s^{(m)}$ — известные целые рациональные функции от тех $x_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$, и тех h_j, для которых $j < m - 1$. Из этих уравнений последовательно находим функции $x_s^{(m)}$ в порядке возрастания m, распоряжаясь при вычислениях неопределенными коэффициентами h_j таким образом, чтобы все $x_s^{(m)}$ выходили периодическими функциями τ с общим периодом 2π.

Посмотрим, как найти функции $x_s^{(1)}$, $x_s^{(2)}$, ...

Как уже было показано в § 1 этой главы, однородные уравнения (3.42) имеют периодическое решение, соответствующее паре чисто мнимых корней, и это решение запишется в нашем случае (т. е. для линейной системы с независимой переменной τ) следующим образом:

$$x_s^{(1)} = a_s \cos\tau + b_s \sin\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.43}$$

где a_s и b_s — некоторые постоянные. Для определения этих постоянных подставим выражения (3.43) в уравнения (3.42) и сравним коэффициенты при $\cos\tau$ и $\sin\tau$ в обеих частях равенств. Тогда получим следующие уравнения:

$$\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} a_\sigma = \lambda b_s, \qquad \sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} b_\sigma = -\lambda a_s, \tag{3.43'}$$

которые (так же как мы поступали и ранее в подобных случаях) перепишем в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} (a_\sigma + i b_\sigma) + \lambda i (a_s + i b_s) = 0. \tag{3.43''}$$

Но определитель этой системы, как легко видеть, есть $\bar{D}(-\lambda i)$ и равен нулю по условию. Поэтому уравнения (3.43″) имеют решения, в которых не все $a_s + i b_s$ равны нулю. Найдя это решение, получим сейчас же a_s и b_s, и функции $x_s^{(1)}$ будут полностью определены.

Заметим, что так как $\pm\lambda i$, по условию, являются простыми корнями определяющего уравнения, то постоянные a_s и b_s определятся с точностью до неопределенного множителя, которым мы можем распорядиться по своему произволу. Например, мы можем принять этот множитель просто равным единице.

После этого рассматриваем систему (3.42′) для $m = 2$, причем эта система еще не содержит никакой неопределенной постоянной h_j. Так как свободные члены $X_s^{(2)}$ зависят только от $x_s^{(1)}$, то они могут считаться известными периодическими функциями τ, представляемыми конечными суммами косинусов и синусов целых кратностей τ (эти кратности будут, очевидно, не выше 2).

Так как определяющее уравнение рассматриваемой системы не имеет корней вида $m\lambda i$, то, как показано в § 1, эта система будет иметь единственное, вполне определенное периодическое решение, имеющее такую же структуру, как и функции $X_s^{(2)}$, представляющие свободные члены уравнений.

После этого перейдем к системе (3.42′), определяющей функции $x_s^{(3)}$ и содержащей первую из неопределенных постоянных — h_2, которую и нужно выбрать так, чтобы все $x_s^{(3)}$ вышли периодическими. Мы покажем, как выбирается постоянная h_j в общем случае. Допустим, что все функции $x_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$, и все постоянные h_j, для которых $j < m - 1$, уже определены, так что все определенные функции оказались периодическими, и посмотрим, как найдутся функции $x_s^{(m)}$ и постоянная h_{m-1}.

Нетрудно видеть, имея в виду формулы (3.43′), что уравнения (3.42′) могут быть переписаны в виде

$$\frac{dx_s^{(m)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma} x_\sigma^{(m)} + h_{m-1}(b_s \cos\tau - a_s \sin\tau) + \frac{1}{\lambda} X_s^{(m)}, \qquad (3.44)$$

где $X_s^{(m)}$ — известные функции, являющиеся конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей τ (как легко видеть, эти кратности не выше числа m), которые представим в виде

$$X_s^{(m)} = A_{sm}^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \left(A_{sm}^{(k)} \cos k\tau + B_{sm}^{(k)} \sin k\tau\right),$$

где все коэффициенты — известные постоянные.

Поступая так же, как и в § 1, ищем решение системы (3.44) в виде такой же суммы

$$x_s^{(m)} = a_{sm}^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \left(a_{sm}^{(k)} \cos k\tau + b_{sm}^{(k)} \sin k\tau\right)$$

с неопределенными коэффициентами. Тогда, как показано в § 1, все коэффициенты $a_{sm}^{(k)}$ и $b_{sm}^{(k)}$, для которых $k \neq 1$, могут быть однозначно определены. Что же касается коэффициентов $a_{sm}^{(1)}$ и $b_{sm}^{(1)}$, то уравнения, их определяющие, будут обладать некоторой особенностью, вследствие чего вычисление этих коэффициентов требует отдельного и более внимательного рассмотрения *).

*) В первом издании этой книги автором была допущена в этом месте некоторая неточность, которая была впоследствии замечена Г. И. Ширминым (см. журнал «Небесная механика», т. 10, 1974 г.), которому автор очень признателен. В этом издании изложение указанного особенного случая взято из упомянутой работы Г. И. Ширмина.

Система уравнений, определяющих постоянные коэффициенты $a_{sm}^{(1)}$, $b_{sm}^{(1)}$ и неопределенную постоянную h_{m-1}, может быть написана, аналогично системе (3.43), в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{n+2} \bar{p}_{s\sigma}\left(a_{\sigma m}^{(1)} + ib_{\sigma m}^{(1)}\right) + \lambda i\left(a_{sm}^{(1)} + ib_{sm}^{(1)}\right) =$$
$$= \lambda h_{m-1}\left(-b_s + ia_s\right) - \left(A_{sm}^{(1)} + iB_{sm}^{(1)}\right) \quad (s = 1, 2, \ldots, n+2). \quad (3.45)$$

Постоянная h_{m-1} должна быть теперь выбрана так, чтобы уравнения (3.45) с неизвестными $a_{sm}^{(1)} + ib_{sm}^{(1)}$ были совместны.

Но согласно известной теореме Кронекера — Капелли система линейных уравнений (3.45) будет совместна только в том случае, когда ранг расширенной матрицы $\bar{Q}$, определяемой формулой

$$\bar{Q} = \left\| \begin{array}{ccc|cc} \bar{p}_{11} + \lambda i, & \ldots, & \bar{p}_{1,\,n+1}, & \bar{p}_{1,\,n+2}, & q_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{p}_{n+1,\,1}, & \ldots, & \bar{p}_{n+1,\,n+1} + \lambda i, & \bar{p}_{n+1,\,n+2}, & q_{n+1,\,m} \\ \hline \bar{p}_{n+2,\,1}, & \ldots, & p_{n+2,\,n+1}, & p_{n+2,\,n+2} + \lambda i, & q_{n+2,\,m} \end{array} \right\|,$$

где

$$q_{sm} = \lambda h_{m-1}\left(-b_s + ia_s\right) - \left(A_{sm}^{(1)} + iB_{sm}^{(1)}\right), \quad (3.45')$$

равен рангу матрицы Q, образованной из коэффициентов системы (3.45):

$$Q = \left\| \begin{array}{ccc|c} \bar{p}_{11} + \lambda i, & \ldots, & \bar{p}_{1,\,n+1}, & \bar{p}_{1,\,n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{p}_{n+1,\,1}, & \ldots, & \bar{p}_{n+1,\,n+1} + \lambda i, & \bar{p}_{n+1,\,n+2} \\ \hline \bar{p}_{n+2,\,1}, & \ldots, & \bar{p}_{n+2,\,n+1}, & \bar{p}_{n+2,\,n+2} + \lambda i \end{array} \right\|.$$

Определитель матрицы Q равен нулю и, следовательно, ранг этой матрицы меньше ее порядка $n+2$. Можно считать, для определенности, что ранг Q равен $n+1$ и диагональный минор M_{n+1} (в матрицах $\bar{Q}$ и Q он выделен окантовкой) отличен от нуля. Для выполнения условия

$$\text{Ранг}\,\bar{Q} = \text{Ранг}\,Q$$

необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю характеристические определители системы (3.45) — миноры $(n+2)$-го порядка матрицы $\bar{Q}$, окаймляющие отличный от нуля минор M_{n+1} и не содержащиеся в матрице Q.

Из выражений для $\bar{Q}$ и Q видно, что система (3.45) имеет лишь один характеристический определитель:

$$H = \left| \begin{array}{ccc} \bar{p}_{11} + \lambda i, & \ldots, & \bar{p}_{1,\,n+1}, & q_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{p}_{n+1,\,1}, & \ldots, & \bar{p}_{n+1,\,n+1} + \lambda i, & q_{n+1,\,m} \\ \bar{p}_{n+2,\,1}, & \ldots, & p_{n+2,\,n+1}, & q_{n+2,\,m} \end{array} \right|.$$

Разлагая определитель H по элементам последнего столбца и приравнивая результат нулю, имеем в силу (3.45′)

$$\lambda h_{m-1} \sum_{\sigma=1}^{n+2} (-b_\sigma + ia_\sigma) H_{\sigma, n+2} = \sum_{\sigma=1}^{n+2} (A_{\sigma m}^{(1)} + iB_{\sigma m}^{(1)}) H_{\sigma, n+2}, \tag{3.46}$$

где $H_{\sigma, n+2}$ — алгебраические дополнения элементов последнего столбца определителя H, которые, как легко проверить, совпадают с алгебраическими дополнениями $Q_{\sigma, n+2}$ элементов последнего столбца определителя матрицы Q.

Полагая

$$R_{\sigma, n+2} = R(Q_{\sigma, n+2}), \quad I_{\sigma, n+2} = J(Q_{\sigma, n+2}) \tag{3.47}$$

(R и J обозначают вещественную и мнимую части величины $Q_{\sigma, n+2}$) и приравнивая в (3.46) вещественные и мнимые части, мы получим

$$-\lambda h_{m-1} \sum_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma I_{\sigma, n+2} + b_\sigma R_{\sigma, n+2}) = \sum_{\sigma=1}^{n+2} (A_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2} - B_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2}),$$

$$+\lambda h_{m-1} \sum_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma R_{\sigma, n+2} - b_\sigma I_{\sigma, n+2}) = \sum_{\sigma=1}^{n+2} (A_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2} + B_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2}).$$

В последние два уравнения входит единственная неизвестная величина — неопределенный коэффициент h_{m-1}, и так как эти равенства получены из условия совместности уравнений (3.45), то отсюда имеем, например

$$h_{m-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{\sum_{\sigma=1}^{n+2} (A_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2} + B_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2})}{\sum_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma R_{\sigma, n+2} - b_\sigma I_{\sigma, n+2})}. \tag{3.48}$$

Из этих же уравнений следует, что соотношение

$$-\frac{\sum_{\sigma=1}^{n+2} (A_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2} + B_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2})}{\sum_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma I_{\sigma, n+2} + b_\sigma R_{\sigma, n+2})} = \frac{\sum_{\sigma=1}^{n+2} (A_{\sigma m}^{(1)} I_{\sigma, n+2} + B_{\sigma m}^{(1)} R_{\sigma, n+2})}{\sum_{\sigma=1}^{n+2} (a_\sigma R_{\sigma, n+2} - b_\sigma I_{\sigma, n+2})}, \tag{3.48′}$$

связывающее коэффициенты $\bar{p}_{s\sigma}$ и коэффициенты разложений функций $X_s^{(m)}$, выполняется автоматически.

Найдя величину h_{m-1}, обращаемся опять к системе (3.45), которая является неопределенной, так как ее ранг меньше порядка. Поэтому, одну из неизвестных $a_{sm}^{(1)} + ib_{sm}^{(1)}$ можно выбрать произвольным образом, вследствие чего система (3.45)

превращается в определенную систему $(n+1)$-го порядка с таким же числом неизвестных. Решая эту систему, мы и найдем все искомые величины $a_{sm}^{(1)}$, $b_{sm}^{(1)}$, а поэтому все функции $x_s^{(m)}$ определятся единственным образом и выйдут периодическими относительно τ с общим периодом 2π.

Следовательно, ряды (3.41′) действительно определят искомое периодическое решение уравнений (3.12).

Подставляя в эти ряды вместо $x_s^{(m)}$ их выражения, мы получим искомое периодическое решение в следующем виде:

$$x_s = c\,(a_s \cos\tau + b_s \sin\tau) + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} c^m \left[a_{sm}^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \left(a_{sm}^{(k)} \cos k\tau + b_{sm}^{(k)} \sin k\tau\right)\right], \qquad (3.41'')$$

а так как эти ряды сходятся абсолютно при значениях $|c|$, не превышающих некоторого предела, и при всех вещественных значениях τ (или, что то же, при всяком значении t), то решение (3.41′) путем перестановки членов можно также представить в следующем виде:

$$x_s = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\alpha_s^{(m)} \cos m\tau + \beta_s^{(m)} \sin m\tau\right), \qquad (3.41''')$$

где все коэффициенты $\alpha_s^{(m)}$ и $\beta_s^{(m)}$ — голоморфные функции постоянной c, уничтожающиеся при $c = 0$.

Заметим, что если бы существование периодического решения нам не было известно заранее, то это обстоятельство все же не могло бы помешать нам применить указанный прием вычисления.

Притом, если бы, доведя вычисления до какого-либо m, мы нашли, что соответствующие ему условия (3.48′) не выполняются, то это явилось бы признаком того, что система (3.12) не имеет периодического решения (по крайней мере рассматриваемого здесь вида). Но если бы, как бы далеко мы ни шли в вычислениях, все функции $x_s^{(m)}$ выходили бы периодическими, то эти вычисления ничего доказать не могли бы и разрешить таким способом нашу задачу было бы невозможно.

Примечание. В задачах небесной механики дифференциальные уравнения движения обыкновенно задаются в виде системы уравнений второго порядка, вследствие чего и уравнения, соответствующие уравнениям (3.12), также будут представлять вообще систему уравнений второго порядка. Как известно, мы всегда можем заменить такую систему равносильной ей системой уравнений первого порядка, которой всегда можно придать нормальную форму (3.12).

Однако для разыскания периодических решений по изложенному выше способу такое приведение к системе первого порядка вовсе не является необходимым, и мы можем применить способ Ляпунова непосредственно к первоначальной системе уравнений второго порядка. Ниже, во второй части книги, это замечание будет нами использовано.

7. Для задач небесной механики весьма важен случай, когда исходные уравнения (3.12) имеют каноническую форму

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \tag{3.49}$$

где характеристическая функция предполагается голоморфной функцией величин x_s, y_s, в которой члены наинизшего порядка образуют квадратичную форму H_2.

Как известно, система (3.49) всегда имеет интеграл

$$H(x_\sigma \mid y_\sigma) = \text{const}, \tag{3.50}$$

не зависящий от t и голоморфный относительно x_s и y_s. Поэтому, если определяющее уравнение, соответствующее системе (3.49) имеет хотя бы одну пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ и не имеет корней вида $m\lambda i$, то определитель формы H_2 заведомо будет отличен от нуля и по теореме раздела 5 система (3.49) обязательно будет иметь периодическое решение с двумя произвольными постоянными (и с периодом, зависящим от одной произвольной постоянной).

Притом, если определяющее уравнение имеет только чисто мнимые корни $\pm\lambda_s i$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, то всякий раз, когда числа λ_s таковы, что ни одно из отношений, которые можно из них составить, комбинируя их по два, не представляет целого числа, для нашей канонической системы найдется n периодических решений, содержащих по две произвольные постоянные каждое.

В каждом из этих решений функции x_s, y_s выйдут периодическими функциями времени с периодом

$$T_j = \frac{2\pi}{\lambda_j}\left\{1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} h_j^{(\sigma)} c_j^k\right\} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.51}$$

где все h обозначают числа, не зависящие от произвольных постоянных, а

$$c_j = H_j(x_j^{(0)}, y_j^{(0)}).$$

Мы закончим на этом изложение теории периодических решений, созданной А. М. Ляпуновым, имея в виду, что для приложения к задачам небесной механики, которые будут рассмотрены ниже, изложенных теорем вполне достаточно.

Пример. Для иллюстрации теоремы Ляпунова и его метода нахождения периодического решения рассмотрим простой пример. Пусть дано уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + x = 4\mu x^3,$$

в котором μ означает какую-либо вещественную постоянную.

Это уравнение можно также переписать в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -x + 4\mu x^3,$$

или в виде канонической системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y},$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

где функция Гамильтона H определяется формулой:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \mu x^4.$$

Отсюда сейчас же следует, что наша система имеет первый интеграл

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \mu x^4 = \text{const},$$

который, очевидно, полностью удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле.

Поэтому предложенная система заведомо имеет периодическое решение, в котором x и y (или x и $\dot{x}$) представляются рядами, расположенными по степеням произвольной постоянной c, и коэффициенты которых суть периодические функции времени с общим периодом T, являющимся также голоморфной функцией постоянной c.

Это решение проще всего искать непосредственно из данного уравнения второго порядка.

Так как в нашем случае можно принять $\lambda = 1$, а за произвольную постоянную c принять значение функции x при $t = 0$, то задача сводится к нахождению периодического решения в виде ряда

$$x = cx_1 + c^2x_2 + c^3x_3 + \ldots,$$

где все коэффициенты суть периодические функции вспомогательной переменной

$$\tau = \frac{2\pi t}{T}$$

с общим периодом 2π, определяемые условиями

$$x_1(0)=1, \quad \dot{x}_1(0)=0,$$
$$x_k(0)=0, \quad \dot{x}_k(0)=0, \qquad k>1.$$

Период по времени T также имеет вид ряда, расположенного по степеням c,

$$T=2\pi(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots)$$

с неопределенными коэффициентами

$$h_2, \quad h_3, \ldots,$$

которые должны быть определены так, чтобы все функции x_k выходили периодическими с общим периодом 2π.

Переходя в предложенном уравнении от независимой переменной t к τ, получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=(-x+4\mu x^3)(1+h_2c^2+\ldots)^2,$$

подставляя в которое вместо x ряд, имеем

$$\ddot{x}_1c+\ddot{x}_2c^2+\ddot{x}_3c^3+\ldots+(x_1c+x_2c^2+x_3c^3+\ldots)(1+h_2c^2+\ldots)^2=$$
$$=4\mu(x_1c+x_2c^2+\ldots)^3(1+h_2c^2+\ldots)^2.$$

Сравнивая в обеих частях равенства коэффициенты при одинаковых степенях c, получим бесконечную последовательность уравнений

$$\ddot{x}_1+x_1=0,$$
$$\ddot{x}_2+x_2=0,$$
$$\ddot{x}_3+x_3=-2x_1h_2+4\mu x_1^3+12\mu x_1^2x_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

из которых последовательно находим прежде всего

$$x_1=\cos\tau, \quad x_2=0,$$

после чего уравнение для x_3 напишется в виде

$$\ddot{x}_3+x_3=-2h_2\cos\tau+4\mu\cos^3\tau=-2h_2\cos\tau+\frac{\mu}{2}(\cos\tau+\cos3\tau).$$

Чтобы частное решение этого неоднородного уравнения не содержало члена, имеющего множителем τ, необходимо, чтобы

$$-2h_2+\frac{\mu}{2}=0,$$

откуда находим первый неопределенный коэффициент h_2:

$$h_2=\frac{\mu}{4}.$$

Затем, интегрируя уравнение для x_3 при условии, что

$$x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0,$$

находим без труда

$$x_3 = -\frac{\mu}{2}\cos\tau + \frac{\mu}{2}\cos 3\tau.$$

Подобным же образом находятся и следующие функции $x_4, x_5, \ldots$ и следующие неопределенные коэффициенты $h_3, h_4, \ldots$

Итак, искомое периодическое решение будет иметь вид

$$x = c\cdot\cos\tau + \frac{\mu}{2}(\cos 3\tau - \cos\tau)\cdot c^3 + \ldots,$$

где

$$\tau = 2\pi\left(1 + \frac{\mu}{4}c^2 + \ldots\right)^{-1}\cdot t,$$

и предложенный пример решен.

§ 3. Метод малого параметра А. Пуанкаре

1. Для большей простоты и краткости мы рассмотрим задачу Пуанкаре только с одним малым параметром. Пусть исходные уравнения задачи имеют вид, подобный (3.1):

$$\dot{z}_s = Z_s(t\,|\,z_\sigma\,|\,\mu) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.52}$$

причем правые части уравнений голоморфны относительно μ, по крайней мере при достаточно малых значениях $|\mu|$, и являются периодическими функциями времени с одним и тем же вещественным периодом ω, так что

$$Z_s(t+\omega\,|\,z_\sigma\,|\,\mu) \equiv Z_s(t\,|\,z_\sigma\,|\,\mu) \tag{3.52'}$$

при любом значении t и для всякого μ.

Предположим, что при $\mu = 0$ уравнения (3.52) или возможно проинтегрировать полностью, или, по крайней мере, возможно найти частное периодическое решение этих уравнений, обладающее тем же самым периодом ω.

Пусть

$$\tilde{z}_s = f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.53}$$

где $f_s(t+\omega) = f_s(t)$ есть такое решение, так что имеем

$$\dot{\tilde{z}}_s \equiv Z_s(t\,|\,\tilde{z}_\sigma\,|\,0) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k). \tag{3.53'}$$

Решение (3.53), которое будем называть, как это теперь принято, «порождающим решением», может содержать также и некоторое количество произвольных постоянных, т. е. может образовывать семейство периодических решений, но может быть также и изолированным.