

Затем, интегрируя уравнение для x_3 при условии, что

$$x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0,$$

находим без труда

$$x_3 = -\frac{\mu}{2} \cos \tau + \frac{\mu}{2} \cos 3\tau.$$

Подобным же образом находятся и следующие функции x_4, x_5, \dots и следующие неопределенные коэффициенты h_3, h_4, \dots

Итак, искомое периодическое решение будет иметь вид

$$x = c \cdot \cos \tau + \frac{\mu}{2} (\cos 3\tau - \cos \tau) \cdot c^3 + \dots,$$

где

$$\tau = 2\pi \left(1 + \frac{\mu}{4} c^2 + \dots \right)^{-1} \cdot t,$$

и предложенный пример решен.

§ 3. Метод малого параметра А. Пуанкаре

1. Для большей простоты и краткости мы рассмотрим задачу Пуанкаре только с одним малым параметром. Пусть исходные уравнения задачи имеют вид, подобный (3.1):

$$\dot{z}_s = Z_s(t | z_\sigma | \mu) \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.52)$$

причем правые части уравнений голоморфны относительно μ , по крайней мере при достаточно малых значениях $|\mu|$, и являются периодическими функциями времени с одним и тем же вещественным периодом ω , так что

$$Z_s(t + \omega | z_\sigma | \mu) \equiv Z_s(t | z_\sigma | \mu) \quad (3.52')$$

при любом значении t и для всякого μ .

Предположим, что при $\mu = 0$ уравнения (3.52) или возможно проинтегрировать полностью, или, по крайней мере, возможно найти частное периодическое решение этих уравнений, обладающее тем же самым периодом ω .

Пусть

$$\tilde{z}_s = f_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.53)$$

где $f_s(t + \omega) = f_s(t)$ есть такое решение, так что имеем

$$\dot{\tilde{z}}_s \equiv Z_s(t | \tilde{z}_\sigma | 0) \quad (s = 1, 2, \dots, k). \quad (3.53')$$

Решение (3.53), которое будем называть, как это теперь принято, «порождающим решением», может содержать также и некоторое количество произвольных постоянных, т. е. может образовывать семейство периодических решений, но может быть также и изолированным.

Обозначим начальные значения величин \tilde{z}_s , соответствующих периодическому решению (3.53), через $\tilde{z}_s^{(0)}$, т. е. положим $\tilde{z}_s^{(0)} = f_s(t_0)$.

Тогда проблема, поставленная Пуанкаре, заключается в следующем:

Требуется установить, имеют ли исходные уравнения (3.52) периодическое решение с тем же периодом ω , обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее периодическое решение (3.53), и если такое решение существует, то найти его.

Допустим, что система (3.52) имеет подобное периодическое решение и что ему соответствуют начальные значения $z_s^{(0)}$ неизвестных функций z_s .

Полагая, как и ранее,

$$z_s = \tilde{z}_s + x_s \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.54)$$

мы получим для определения отклонений (или «возмущений») x_s функций z_s от их значений в порождающем решении систему уравнений нормального вида

$$\dot{x}_s = X_s(t | x_\sigma | \mu), \quad (3.55)$$

где все X_s — периодические функции с периодом ω , голоморфные относительно параметра μ . Мы будем, сверх того, предполагать, что первоначальные уравнения (3.52) и порождающее решение (3.53) таковы, что величины X_s суть голоморфные функции также и от величин x_s , по крайней мере при численно достаточно малых значениях этих величин. Вообще, как это было уже установлено в § 4 главы I, мы всегда будем предполагать правые части X_s уравнений (3.55) такими функциями t, x_s и μ , чтобы выполнялись все условия общей теоремы Ляпунова, доказанной в § 4 главы I.

Поэтому мы можем представить общее решение уравнений (3.55), в силу указанной теоремы Ляпунова, в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням произвольных постоянных и параметра μ , которые напишем, обозначая здесь по традиции произвольные постоянные через β_s , следующим образом (см. формулировку теоремы Пуанкаре в главе I):

$$x_s = \sum_{m_1 + \dots + m_k + m \geq 1} P_s^{(m_1, \dots, m_k, m)}(t) \beta_1^{m_1} \dots \beta_k^{m_k} \mu^m, \quad (3.55')$$

где все коэффициенты суть непрерывные функции времени.

Так как по теореме Ляпунова ряды (3.55') сходятся абсолютно для всякого значения t , содержащегося в некотором промежутке, пока величины $|\beta_s|, |\mu|$ не превосходят некоторого предела, зависящего от упомянутого промежутка, то всегда можно найти такой предел $g(\omega)$, что ряды (3.55') будут

абсолютно сходящимися для всякого значения t в промежутке $(t_0, t_0 + \omega)$ и для всяких β_s и μ , удовлетворяющих неравенствам

$$|\beta_s| \leq g(\omega), \quad |\mu| \leq g(\omega). \quad (3.55'')$$

Посмотрим теперь, нельзя ли выбрать произвольные постоянные β_s так, чтобы все ряды (3.55') были периодическими функциями от t с тем же самым периодом ω .

Для этого должны, очевидно, выполняться следующие условия:

$$\psi_s(\beta_\sigma | \mu) = x_s(t_0 + \omega | \beta_\sigma | \mu) - x_s(t_0 | \beta_\sigma | \mu) = 0, \quad (3.56)$$

которые являются необходимыми и достаточными для существования периодического решения системы (3.55).

В самом деле, если формулы (3.55') определяют периодическое решение, то условия (3.56), очевидно, выполняются. Обратно, если условия (3.56) выполнены, то значения функций x_s , удовлетворяющих уравнениям (3.55), в момент t_0 и в момент $t_0 + \omega$ будут одинаковы, а следовательно, решение (3.55') действительно будет периодическим.

Рассмотрим теперь уравнения (3.56), представляющие собой условия периодичности. Эти условия дают систему k уравнений, в которых величины β_s можем рассматривать как неизвестные, а параметр μ — как независимую переменную.

Применяя теперь к уравнениям (3.56) общую теорему о неявных функциях, установленную в главе I, мы можем утверждать, что если функциональный определитель

$$\Delta(\beta_\sigma | \mu) = \frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)} \quad (3.56')$$

не обращается в нуль при $\beta_s = \mu = 0$, то уравнения (3.56) имеют единственное решение, голоморфное относительно параметра μ , уничтожающееся при $\mu = 0$.

Это решение представляется рядами вида

$$\beta_s = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_s^{(j)} \mu^j \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.57)$$

абсолютно сходящимися, пока $|\mu|$ не превосходит некоторого предела, меньшего или равного $g(\omega)$.

Подставляя выражения (3.57) для β_s в формулы (3.55'), мы получим единственное решение системы (3.55), голоморфное относительно параметра μ и уничтожающееся при $\mu = 0$. Это решение, периодическое в силу самого способа его получения, можно написать, следовательно, в виде

$$x_s = \sum_{j=1}^{\infty} x_s^{(j)}(t) \cdot \mu^j \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.58)$$

где все коэффициенты — периодические функции t с периодом ω . А отсюда по формулам (3.54) найдем и периодическое решение системы (3.52), обращающееся в порождающее решение $f_s(t)$ при $\mu = 0$. Поэтому начальные значения величин z_s в этом периодическом решении определяются формулами

$$z_s^{(0)} = f_s(t_0) + \sum_{j=1}^{\infty} x_s^{(j)}(t_0) \cdot \mu^j \quad (3.58')$$

и также, конечно, являются голоморфными функциями параметра μ , по крайней мере при численно достаточно малых его значениях.

Полученный результат и составляет содержание общей теоремы Пуанкаре о существовании периодических решений системы (3.52), близких к порождающему периодическому решению, которую полезно сформулировать отдельно.

Теорема Пуанкаре. Если функциональный определитель $\Delta(\beta_s | \mu)$, соответствующий рассматриваемому порождающему решению, не равен нулю при $\beta_s = \mu = 0$, то, по крайней мере при достаточно малых значениях $|\mu|$, система (3.52) имеет единственное периодическое решение, голоморфное относительно μ и обращающееся в порождающее решение при $\mu = 0$.

Для фактического нахождения периодического решения, если известно, что оно существует, проще всего воспользоваться рядами (3.58), рассматривая в них все величины $x_s^{(j)}$ как неопределенные коэффициенты.

Чтобы определить эти коэффициенты, подставим ряды (3.58) в уравнения (3.55), которые более подробно напишутся в виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^k p_{s\sigma} x_{\sigma} + p_s \mu + \sum_{m=2}^{\infty} X_s^{(m)}(t | x_{\sigma} | \mu), \quad (3.59)$$

где все коэффициенты — периодические функции от t с общим периодом ω . Тогда сравнение коэффициентов при одинаковых степенях μ в левых и правых частях равенств даст следующие уравнения:

$$\dot{x}_s^{(1)} = \sum_{\sigma=1}^k p_{s\sigma} x_{\sigma}^{(1)} + p_s \quad (s = 1, 2, \dots, k) \quad (3.60)$$

и для $j > 1$:

$$\dot{x}_s^{(j)} = \sum_{\sigma=1}^k p_{s\sigma} x_{\sigma}^{(j)} + R_s^{(j)} \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.60')$$

где свободные члены — целые многочлены относительно тех $x_s^{(i)}$, для которых $i < j$. Поэтому все $x_s^{(j)}$ найдутся последовательно, в порядке возрастания j из однотипных систем

неоднородных линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

При этом нам вовсе не требуется полностью интегрировать каждую из этих систем, но достаточно найти для каждой из них частное периодическое решение. Если такие периодические решения найдутся для каждой из систем (3.60), (3.60'), то ряды (3.58) выйдут периодическими и действительно представлят искомое периодическое решение.

Однако если существование периодического решения нам заранее не известно, то описанная процедура приведет к цели только в том случае, когда ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным, т. е. когда периодическое решение рассматриваемого типа не существует.

Из раздела 3 § 1 этой главы следует, что периодическое решение каждой из систем (3.60), (3.60') обязательно найдется, если характеристическое уравнение линейной однородной системы с коэффициентами $p_{s\sigma}$ имеет корень, модуль которого равен единице, т. е. если среди характеристических показателей упомянутой линейной системы есть равный нулю.

Последнее условие, как следует из раздела 3 § 3 главы I, приводится к тому, чтобы матрица, элементами которой являются числа $x_{s\sigma}(t_0 + \omega)$, была единичной матрицей.

Примечание 1. Если не найдется периодического решения с периодом ω , то аналогичным образом можно искать периодическое решение системы (3.55) с периодом, представляющим целую кратность ω . Для этого можно пользоваться теми же рядами (3.55'), но условия периодичности нужно написать в виде

$$\tilde{\Psi}_s(\beta_\sigma | \mu) = x_s(t_0 + p\omega | \beta_\sigma | \mu) - x_s(t_0 | \beta_\sigma | \mu) = 0.$$

Разумеется, что сходимость рядов (3.55') соответствующим выбором величин $|\beta_s|$ и $|\mu|$ должна быть обеспечена для всякого значения t в промежутке $(t_0, t_0 + p\omega)$, где p — заданное целое положительное число.

При этом, если якобиан от функций $\tilde{\Psi}_s$ по β_σ не будет нулем при $\beta_s = \mu = 0$, то периодическое решение, обладающее периодом $p\omega$, заведомо существует. Это решение может быть найдено таким же путем, как было описано выше.

Примечание 2. Метод Пуанкаре может быть без всякого затруднения обобщен на случай системы самого общего вида, типа системы (1.82), которую мы рассматривали в главе I.

Общее решение такой системы может быть определено формулами типа (1.87), которые дают функции z_s в виде рядов, расположенных по степеням произвольных постоянных и v разностей $\mu_j - \mu_j^{(0)}$. Условия периодичности решения системы (1.82)

будут иметь вид

$$\Psi_s(\beta_\sigma | \mu_j - \mu_j^{(0)}) = 0$$

и опять могут быть рассматриваемы как уравнения с k неизвестными функциями и v независимыми переменными.

Поэтому к этим уравнениям можем применить общую теорему о неявных функциях и утверждать, что если якобиан функций Ψ_s по величинам β_σ отличен от нуля, когда все переменные (зависимые и независимые) полагаются равными нулю, то система (1.82) действительно имеет периодическое решение, представляемое рядами, расположеннымими по степеням разностей $\mu_j - \mu_j^{(0)}$, все коэффициенты которых — периодические функции времени с одним и тем же периодом ω , какой имеют и правые части системы (1.82).

Эти ряды будут абсолютно сходящимися для всех действительных значений t , пока разности $\mu_j - \mu_j^{(0)}$ остаются численно достаточно малыми.

Это решение может быть найдено таким же путем, как и в предыдущих, более простых случаях, только выкладки будут более сложными и громоздкими.

Таким же путем можно найти и периодические решения с периодом $p\omega$, где p — целое число.

2. Возвращаясь к основной задаче Пуанкаре, т. е. к уравнениям (3.52), рассмотрим теперь случай, когда определитель $\Delta(\beta_\sigma | \mu)$ обращается в нуль при $\beta_s = \mu = 0$.

В этом случае вопрос о разрешимости уравнений (3.56), а вместе с тем и вопрос о существовании периодических решений, становится чрезвычайно сложным и не разобран во всех подробностях и по настоящее время. Мы рассмотрим только два простейших случая этой задачи, которые исследовал сам Пуанкаре в своей знаменитой монографии и которые являются наиболее характерными в теории периодических решений.

Допустим сначала, что первоначальная система (3.52) имеет при $\mu = 0$ не одно изолированное частное решение, как предполагалось в предыдущем разделе, но ∞^1 периодических решений, образующих семейство с одной произвольной постоянной h . Пусть

$$z_s = f_s(t, h) \quad (s = 1, 2, \dots, k) \quad (3.61)$$

будет это семейство, причем рассматриваемое порождающее решение принадлежит к этому семейству и соответствует значению h^* постоянной h (так что h^* есть вполне определенное число). Покажем, что в этом случае определитель $\Delta(\beta_\sigma | \mu)$ необходимо обращается в нуль при $\beta_s = \mu = 0$. В самом деле, если бы $\Delta(0 | 0)$ было отлично от нуля, то система уравнений

(3.56) имела бы при $\mu = 0$ единственное решение $\beta_s = 0$ ($s = 1, 2, \dots, k$).

Но при $\mu = 0$ уравнения (3.56) выражают необходимые и достаточные условия периодичности решения системы (3.53'), получающейся из (3.52) при $\mu = 0$.

Но, так как по предположению система (3.53') имеет семейство периодических решений, то условиям периодичности должно удовлетворять не только решение $\beta_s = 0$, но и решение

$$\beta_s = f_s(t_0, h) - f_s(t_0, h^*),$$

зависящее от произвольного параметра h , что противоречит вышесказанному.

Таким образом, в рассматриваемом случае определитель $\Delta(0|0)$ действительно необходимо равен нулю.

Чтобы выяснить вопрос о существовании периодического решения системы (3.52), обращающегося в порождающее решение $f_s(t, h^*)$ при $\mu = 0$, допустим, что среди первых миноров якобиана $\Delta(\beta_s|\mu)$ хотя бы один не обращается в нуль при $\beta_s = \mu = 0$. Не нарушая общности, можем считать, что этот минор есть якобиан первых $k - 1$ функций ψ_s по переменным β_s ($s = 1, 2, \dots, k - 1$).

Тогда так же, как мы это делали в разделе 3 § 2 главы I, мы можем исключить из уравнений (3.56) величины $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}$, в результате чего получим единственное уравнение вида

$$\Psi(\beta_k, \mu) = 0, \quad (3.62)$$

из которого нужно определить β_k как функцию параметра μ , обращающуюся в нуль при $\mu = 0$.

Рассмотрим подробнее уравнение (3.62). Функция Ψ , очевидно, голоморфна относительно β_k и μ . Кроме того, она будет зависеть также от параметра h^* , входящего в порождающее решение. Так как при $\mu = 0$ уравнения (3.56) имеют бесчисленное множество решений, зависящих от произвольного параметра, то и уравнение (3.62) должно иметь при $\mu = 0$ бесчисленное множество решений для β_k и, следовательно, должно удовлетворяться тождественно.

Поэтому уравнение (3.62) необходимо имеет вид

$$\mu \bar{\Psi}(\beta_k, \mu, h^*) = 0, \quad (3.62')$$

где $\bar{\Psi}$ — также голоморфная функция величин β_k и μ , не обращающаяся, вообще говоря, в нуль при $\beta_k = \mu = 0$. Отбрасывая множитель μ и разлагая функцию $\bar{\Psi}$ в ряд, мы напишем последнее уравнение в следующем виде:

$$0 = \bar{\Psi}(0, 0, h^*) + \beta_k \bar{\Psi}'_{\beta_k}(0, 0, h^*) + \mu \bar{\Psi}'_{\mu}(0, 0, h^*) + \dots \quad (3.62'')$$

Для того чтобы это уравнение имело решение, обращающееся в нуль при $\mu = 0$, необходимо, чтобы h^* удовлетворяла условию

$$\bar{\Psi}(0, 0, h^*) = 0, \quad (3.63)$$

и мы приходим к следующему важному результату, установленному Пуанкаре:

Из бесчисленного множества порождающих решений семейства (3.61) только тем могут соответствовать периодические решения системы (3.52), для которых постоянная h является корнем уравнения (3.63).

Пусть постоянная h имеет значение h^* , удовлетворяющее уравнению (3.63). Если при этом $\bar{\Psi}'_{\beta_k}(0, 0, h^*) \neq 0$, то мы можем определить из этого уравнения β_k как голоморфную функцию от μ в виде ряда

$$\beta_k = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_k^{(r)}(h^*) \mu^r, \quad (3.64)$$

коэффициенты которого зависят от h^* и который сходится абсолютно при достаточно малых значениях $|\mu|$.

Тогда из уравнений

$$\psi_s(\beta_s | \mu) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k-1),$$

в которых β_k заменено его значением (3.64), однозначно определим все остальные β_s также в виде рядов, расположенных по степеням параметра μ , после чего найдем искомое периодическое решение при помощи формул (3.55') и (3.54) в виде подобных же рядов.

Может случиться, что значение h^* , являющееся корнем уравнения (3.63), обращает также в нуль величину $\bar{\Psi}'_{\beta_k}(0, 0, h^*)$. Тогда мы не можем найти из уравнения (3.62'') величину β_k как голоморфную функцию μ , но (как следует из теорем о неявных функциях) рассматриваемое уравнение всегда будет

иметь решения, голоморфные относительно $\mu^{\frac{1}{v}}$, где v — целое, положительное число. Если среди таких решений найдется хотя бы одно вещественное, то ему будет соответствовать вещественное периодическое решение системы (3.52), представляющееся рядами, расположенными по степеням $\mu^{\frac{1}{v}}$, т. е. по дробным степеням параметра.

Если все первые миноры определителя $\Delta(\beta_s | \mu)$ обращаются в нуль при $\beta_s = \mu = 0$, то может случиться, что среди миноров

второго порядка есть хотя бы один отличный от нуля, когда все переменные — нули. Этот более сложный случай может быть разобран подобно предыдущему, но на этом анализе мы останавливаться не будем.

П р и м е ч а н и е. Результаты, полученные Пуанкаре, могут быть обобщены и дополнены рассмотрением задачи, в которой упрощенная система (3.53') имеет периодическое решение, зависящее от любого числа произвольных постоянных (меньшего k).

Этот общий случай мы также не будем рассматривать, отсылая читателя к более специальной литературе.

Рассмотрим второй случай Пуанкаре. Мы уже отметили выше, что если не существует изолированное периодическое решение с периодом ω , то может существовать подобное решение с периодом, кратным ω . Это будет случай, когда определитель $\Delta(0|0)$ равен нулю, но аналогичный определитель $\tilde{\Delta}(0|0)$, составленный из функций $\tilde{\psi}_s$, отличен от нуля. Тогда система (3.52) будет иметь единственное изолированное решение с периодом $p\omega$ (p — определенное число).

Если определитель $\Delta(0|0)$ отличен от нуля и определитель $\tilde{\Delta}(0|0)$ также не равен нулю, то существует только одно периодическое решение с периодом ω или, лучше сказать, в этом случае любое решение с периодом $p\omega$ совпадает с решением, которое имеет период ω *).

Допустим теперь, что упрощенная система (3.53') имеет множество периодических решений вида (3.61) и что некоторому определенному значению h^* постоянной h соответствует также периодическое решение системы (3.52), голоморфное, вообще

говоря, относительно $\mu^{\frac{1}{v}}$ ($v = 1, 2, \dots$).

Тогда, как мы уже знаем, определитель $\Delta(0|0)$ равен нулю для любого значения h . Если для этого значения h определитель $\tilde{\Delta}(0|0)$ отличен от нуля, то система (3.52) будет иметь также единственное периодическое решение с периодом $p\omega$ (p — определенное число), которое будет превращаться в порождающее решение при $\mu = 0$.

Может также случиться, что при некотором значении h система (3.52) имеет решение периода ω и при другом значении этой постоянной — периодическое решение с периодом $p\omega$. Тогда соответствующие периодические решения системы (3.52), если они существуют, конечно, не будут совпадать друг с другом при $\mu = 0$.

*.) Это следует из того, что решение с периодом ω может быть рассматриваемо так же как решение с периодом $p\omega$ при произвольно выбранном целиком p .

Рассмотрим еще случай, когда уравнения (3.52) имеют интеграл

$$F(t|z_\sigma|\mu) = \text{const}, \quad (3.65)$$

левая часть которого есть периодическая функция времени с периодом ω . В этом случае уравнения $\psi_s = 0$ не будут, вообще говоря, различными.

В самом деле, мы имеем тождественно

$$\begin{aligned} F[t_0|\tilde{z}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma|\mu] &= F[t_0 + \omega|\tilde{z}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \psi_\sigma|\mu] = \\ &= F[t_0|\tilde{z}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \psi_\sigma|\mu]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$F[t_0|\tilde{z}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \psi_\sigma|\mu] - F[t_0|\tilde{z}_\sigma + \beta_\sigma|\mu] = 0, \quad (3.65)$$

левая часть которого может быть разложена в ряд по степеням ψ_s , β_s и μ и уничтожается, когда все ψ_s равны нулю.

Допустим, что производная $F'_{z_k}(t|z_\sigma|\mu)$ не обращается в нуль, когда положим $z_s = \tilde{z}_s$, $\mu = 0$.

Тогда производная от левой части равенства (3.65') по ψ_k не будет равна нулю при $\psi_s = 0$, $\beta_s = 0$, $\mu = 0$.

Следовательно, мы можем применить основную теорему о неявных функциях и найти из уравнения (3.65')

$$\Psi_k = \Psi(\psi_\sigma|\beta_\sigma|\mu) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, k-1),$$

где Ψ — голоморфная функция величин ψ_σ , β_s , μ , обращающаяся в нуль, когда мы положим $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{k-1} = 0$. Поэтому k -е из уравнений (3.56) будет следствием $k-1$ первых.

Следовательно, определитель $\Delta(\beta_\sigma|\mu)$ в этом случае тождественно равен нулю, и мы опять приходим к особенному случаю.

Для нахождения периодического решения в этом случае отбросим из системы (3.56) уравнение $\psi_k = 0$ и к оставшимся уравнениям

$$\psi_1 = 0, \psi_2 = 0, \dots, \psi_{k-1} = 0$$

присоединим произвольно выбранное k -е уравнение, например уравнение $\beta_i = \text{const}$ (i — любое из чисел 1, 2, ..., k) или уравнение $F = C$, где C — данная постоянная. Тогда для каждого (достаточно малого по модулю) значения μ мы будем иметь бесчисленное множество периодических решений с периодом ω . Но если рассматривать C как данную задачи, то вообще будем иметь только одно периодическое решение, соответствующее этой постоянной.

Аналогичные выводы получаются также для случаев, когда уравнения (3.52) имеют несколько интегралов типа (3.65).

3. До сих пор мы предполагали, что функции Z_s , входящие в уравнения (3.52), содержат явно время t .

Рассмотрим теперь случай, когда первоначальные уравнения не зависят от времени и имеют вид

$$\dot{z}_s = Z_s(z_\sigma | \mu) \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.66)$$

причем все остальные предположения относительно правых частей уравнений (3.66) остаются прежними.

Этот случай имеет существенные особенности, резко отличающие его от случая систем, зависящих от времени.

В самом деле, для уравнений (3.52) любое периодическое решение (если оно существует) имеет вполне определенный период, равный периоду ω правых частей этих уравнений или кратный ему.

Наоборот, уравнения (3.66) могут иметь периодические решения любого периода T , который будет, вообще говоря, функцией параметра μ .

Кроме того, уравнения (3.66) не могут иметь изолированных периодических решений. Действительно, если

$$z_s = \varphi_s(t) \quad (3.67)$$

есть какое-нибудь решение системы (3.66), то функции

$$\tilde{z}_s = \varphi_s(t + h) \quad (3.67')$$

также будут представлять решение этой системы, какова бы ни была постоянная h *). Поэтому, если (3.67) есть периодическое решение, то (3.67') также есть периодическое решение с тем же периодом.

Вследствие указанных особенностей рассматриваемый теперь случай требует специального исследования.

Положим в уравнениях (3.66) $\mu = 0$ и предположим, что полученные упрощенные уравнения

$$\dot{z}_s = Z_s(z_\sigma | 0) \quad (s = 1, 2, \dots, k) \quad (3.66')$$

имеют периодическое решение с периодом T

$$\tilde{z}_s = f_s(t), \quad (3.68)$$

так что имеем для любого значения t

$$f_s(t + T) = f_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Будем искать периодическое решение системы (3.66), обращающееся в порождающее решение (3.68) при $\mu = 0$.

Обозначим через $T + \tau$ период искомого решения и через $f_s(t_0) + \beta_s$ соответствующие ему начальные значения функций z_s .

*) Действительно, делая подстановку $t' = t + h$, мы получим новые уравнения $\dot{z}'_s = Z_s(z_\sigma | \mu)$, имеющие такой же вид, как и старые.

Используя опять формулы (3.55'), получим отклонения x_s искомого решения от порождающего периодического в виде рядов, расположенных по степеням β_s и μ , после чего само решение системы (3.66) представится в виде

$$z_s(t|\beta_\sigma|\mu) = f_s(t) + x_s(t|\beta_0|\mu). \quad (3.69)$$

Теперь составляем условия периодичности, требуя, чтобы решение (3.69) имело период $T + \tau$, что даст следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \psi_s(\tau|\beta_\sigma|\mu) &= z_s(t_0 + T + \tau|\beta_\sigma|\mu) - z_s(t_0|\beta_\sigma|\mu) = f_s(t_0 + T + \tau) - \\ &- f_s(t_0) + x_s(t_0 + T + \tau|\beta_\sigma|\mu) - x_s(t_0|\beta_\sigma|\mu) \quad (s = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Так как все коэффициенты рядов (3.55') и все $f_s(t)$ суть непрерывные, ограниченные функции времени, то значения этих величин для $t = t_0 + T + \tau$ можно разложить в ряды, расположенные по степеням τ , абсолютно сходящиеся по крайней мере для численно достаточно малых значений τ .

Поэтому все функции ψ_s будут голоморфными функциями величин τ , β_σ и μ , уничтожающимися, когда все эти величины равны нулю в силу заведомой периодичности порождающего решения (3.68).

Мы получили таким образом систему k уравнений, в которой величины β_s и τ рассматриваем как неизвестные, а параметр μ — как независимую переменную.

Следовательно, одну из неизвестных мы можем выбрать совершенно произвольно. Будем считать, что величине β_k , например, приписано какое-нибудь произвольно выбранное, но определенное значение β_k^* (для простоты можно взять $\beta_k^* = 0$). Тогда, если функциональный определитель

$$\Delta_k = \frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{k-1}, \psi_k)}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, \tau)}$$

не равен нулю при $\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = \tau = 0$, то, согласно теореме о неявных функциях, уравнения (3.70) разрешимы и определяют единственное голоморфное решение, в котором все величины $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \tau$ представляются рядами, расположеными по степеням μ , абсолютно сходящимися по крайней мере при достаточно малых $|\mu|$.

Подставляя найденные значения β_s ($\beta_k = 0$) в ряды (3.55'), мы найдем затем по формулам (3.69) ряды, расположенные по степеням μ , определяющие искомое периодическое решение с периодом $T + \tau$, который также является рядом, расположенным по степеням μ .

Если определитель Δ_k обращается в нуль, можно произвольно выбрать какую-нибудь другую из постоянных β_i (просто полагая ее равной нулю) и затем рассуждать таким же образом, как и выше.

Таким образом мы приедем к заключению, что система (3.66) будет иметь периодическое решение, голоморфное относительно μ и обращающееся в порождающее решение (3.68) при $\mu = 0$, если только не все определители k -го порядка, заключающиеся в матрице

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_k} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \psi_k}{\partial \beta_k} & \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \end{array} \right|,$$

обращаются в нуль при $\beta_1 = \dots = \beta_k = \tau = 0$ (Δ_i — определитель, получающийся выбрасыванием i -й колонки написанной выше матрицы).

Отметим, что последний определитель, содержащийся в матрице, т. е. определитель Δ_{k+1} , заведомо равен нулю при одновременном равенстве нулю всех переменных, что непосредственно следует из того, что порождающее решение остается периодическим при замене t на $t + h$ и, следовательно, система уравнений (3.70) должна иметь при $\tau = \mu = 0$ бесчисленное множество решений, отличных от решения $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$.

Что же касается остальных определителей Δ_i матрицы ($i = 1, 2, \dots, k$), то среди них, вообще говоря, заведомо будут отличные от нуля, и изложенный способ позволит почти всегда найти периодическое решение и его период.

Если же все определители Δ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) равны нулю, когда все β_s, τ, μ — нули, то мы имеем особенный случай, который может быть рассмотрен так же, как и в предыдущем разделе, и мы для сокращения этого анализа производить не будем.

Допустим теперь, что уравнения (3.66) имеют интеграл

$$F(z_\sigma | \mu) = \text{const.}$$

Тогда, так же как и выше, можно показать, что уравнения (3.70) не будут различными, и их можно заменить следующими:

$$\beta_k = 0, \quad F = C + \lambda\mu, \quad \psi_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k - 1),$$

где

$$C = F(\tilde{z}_\sigma^{(0)}, 0),$$

а λ — какая-нибудь постоянная.

Можно также заменить уравнения (3.70) следующими:

$$\beta_k = 0, \quad \tau = 0, \quad \psi_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k - 1),$$

решение которых даст величины β_s ($s = 1, 2, \dots, k - 1$) как голоморфные функции μ , что будет соответствовать периодическому решению системы (3.66), обладающему тем же периодом T , что и порождающее решение.

Таким образом, получаем важный результат: вообще система (3.66) не имеет при $\mu \neq 0$ (но достаточно малом) периодического решения с периодом T ; если же система (3.66) имеет интеграл, то при достаточно малом, но отличном от нуля μ можно найти единственное периодическое решение, имеющее в точности период T .

Заметим теперь, что порождающее решение, которое по условию имеет период T , можно также рассматривать как периодическое решение с периодом pT (p целое).

Посмотрим, можно ли найти периодические решения системы (3.66), период которых мало отличается от pT и которые превращаются в исходное, порождающее решение при $\mu = 0$.

Для этого вместо условий периодичности (3.70) напишем следующие:

$$\tilde{\psi}(\beta_\sigma | \mu | \tilde{\tau}) = z_s(t_0 + pT + \tilde{\tau} | \beta_\sigma | \mu) - z_s(t_0 | \beta_\sigma | \mu), \quad (3.70')$$

с которыми можно, очевидно, рассуждать так же, как и выше.

Следовательно, если мы обозначим, подобно предыдущему, через $\tilde{\Delta}_i$ определитель, получающийся выбрасыванием столбца с номером i из матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial \beta_k} & \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial \tilde{\tau}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \beta_k} & \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \tilde{\tau}} \end{array} \right\|,$$

то, вообще говоря, не все $\tilde{\Delta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) будут равны нулю, когда мы положим $\beta_s = \mu = \tilde{\tau} = 0$.

Следовательно, вообще говоря, найдутся периодические решения системы (3.66) с периодом $pT + \tilde{\tau}$, которые не будут совпадать с решениями периода $T + \tau$, но которые также превращаются в порождающее решение при $\mu = 0$.

4. Понятие периодического решения, как заметил Пуанкаре, можно несколько обобщить, что может оказаться полезным при рассмотрении вопроса о периодических решениях в задачах небесной механики.

Допустим, что правые части уравнений (3.66), т. е. функции $Z_s(z_\sigma|\mu)$, суть периодические функции некоторых из аргументов z_s с одним и тем же периодом ω .

Пусть таким свойством обладают функции Z_s относительно q первых из величин z_s , так что Z_s не изменяются, когда мы заменим какую-либо из величин z_i ($i = 1, 2, \dots, q$) на $z_i + \omega$.

Допустим теперь, что некоторое решение $\varphi_s(t)$ системы (3.66) обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned}\varphi_i(t_0 + T) &= \varphi_i(t_0) + m_i\omega & (i = 1, 2, \dots, q), \\ \varphi_j(t_0 + T) &= \varphi_j(t_0) & (j = q + 1, \dots, k),\end{aligned}$$

где m_i — целые числа.

Тогда в момент $t_0 + T$ первые q переменных будут отличаться от своих начальных значений на величины, кратные ω , а остальные переменные вовсе не изменятся. Так как при этом величины Z_s не изменяются, то в момент $t_0 + T$ система, состоящая которой определяется уравнениями (3.66), будет находиться в тех же условиях, что и в начальный момент t_0 . Следовательно, мы будем иметь для любого значения t :

$$\left. \begin{aligned}\varphi_i(t + T) &= \varphi_i(t) + m_i\omega & (i = 1, 2, \dots, q), \\ \varphi_j(t + T) &= \varphi_j(t) & (j = q + 1, \dots, k).\end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

Решение $\varphi_s(t)$ системы (3.66), удовлетворяющее условиям (3.71), условимся называть, следуя Пуанкаре, *периодическим решением второго рода* с периодом T .

Особенно важным случаем задачи, в которой существуют периодические решения второго рода, является тот, когда предложенные дифференциальные уравнения имеют каноническую форму с функцией Гамильтона, обладающей некоторыми характерными свойствами.

Пусть дана каноническая система

$$\dot{x}_s = \frac{\partial F}{\partial y_s}, \quad \dot{y}_s = -\frac{\partial F}{\partial x_s} \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (3.72)$$

где функция Гамильтона не зависит от времени и для всех вещественных значений y_s является голоморфной функцией параметра μ , т. е. представляется рядом

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k, \quad (3.72')$$

абсолютно сходящимся при достаточно малых значениях $|\mu|$.

Предположим, кроме того, что F_0 зависит только от x_s , а все F_k ($k > 1$) — периодические функции каждой из переменных y_s с одним и тем же периодом ω .

Уравнения (3.72) при $\mu = 0$ легко интегрируются. Действительно, полагая $\mu = 0$, получаем упрощенную систему

$$\dot{\tilde{x}}_s = 0, \quad \dot{\tilde{y}}_s = -\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{x}_s}, \quad (3.73)$$

из которой выводим немедленно

$$\tilde{x}_s = \tilde{x}_s^{(0)}, \quad \tilde{y}_s = n_s(t - t_0) + \tilde{y}_s^{(0)}, \quad (3.73')$$

где $\tilde{x}_s^{(0)}$ и $\tilde{y}_s^{(0)}$ — произвольные постоянные, а n_s — постоянные, зависящие от $\tilde{x}_s^{(0)}$ и определяемые формулами

$$n_s = -\left[\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{x}_s} \right]_{\tilde{x}_s = \tilde{x}_s^{(0)}} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (3.73'')$$

Решение (3.73') упрощенной системы (3.73) будем рассматривать как «порождающее» решение. Если притом существует такая постоянная T , что мы имеем

$$n_s T = m_s \omega, \quad (3.74)$$

где все m_s — целые числа, то условия (3.71) будут выполнены и порождающее решение (3.73') есть периодическое второго рода с периодом T .

Предполагая, что условия (3.74) выполнены, посмотрим, существуют ли подобные периодические решения, с тем же периодом T , также и при $\mu \neq 0$, но достаточно малом численно.

Рассмотрим для этого некоторое решение первоначальной системы (3.72) с начальными условиями $x_s^{(0)}, y_s^{(0)}$, мало отличающимися от начальных условий порождающего решения.

Пусть для $t = t_0$

$$x_s^{(0)} = \tilde{x}_s^{(0)} + \beta_s, \quad y_s^{(0)} = \tilde{y}_s^{(0)} + \gamma_s. \quad (3.75)$$

Функции x_s и y_s , удовлетворяющие уравнениям (3.72) и принимающие при $t = t_0$ значения (3.75), согласно общим нашим предположениям о свойствах рассматриваемых дифференциальных уравнений (которые здесь предполагаются выполненными), будут голоморфными функциями величин μ , β_s и γ_s , представляемыми рядами, расположенными по степеням этих величин, коэффициенты которых — непрерывные функции времени.

Потребуем теперь, чтобы эти функции удовлетворяли условиям типа (3.71) с периодом T :

$$\begin{aligned} \Phi_s &= x_s(t_0 + T) - x_s(t_0) = 0, \\ \Psi_s &= y_s(t_0 + T) - y_s(t_0) - n_s T = 0, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3.75')$$

т. е. чтобы решение системы (3.72) также было периодическим второго рода.

Условия периодичности (3.75') представляют собой систему $2n$ уравнений с таким же числом неизвестных функций β_s, γ_s , причем μ рассматривается как независимая переменная. Однако уравнения (3.75) не являются независимыми. Действительно, так как функция Гамильтона не зависит от времени, то уравнения (3.72) имеют интеграл

$$F(x_\sigma | y_\sigma | \mu) = \text{const}, \quad (3.76)$$

а так как F — периодическая функция от y_s с периодом ω , то в силу условий (3.75') мы имеем

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma | \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma | \mu) &= F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \Phi_\sigma | \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma + n_\sigma T + \Psi_\sigma | \mu) = \\ &= F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \Phi_\sigma | \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma + \Psi_\sigma | \mu), \end{aligned}$$

откуда получаем соотношение

$$F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma + \Phi_\sigma | \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma + \Psi_\sigma | \mu) - F(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma | \tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_\sigma | \mu) = 0.$$

Следовательно, одну из неизвестных можно выбрать произвольно, после чего задача приведется к нахождению $2n - 1$ неизвестных из такого же числа независимых уравнений.

Положим, например, $\gamma_1 = 0$ и, кроме того, $\tilde{y}_1^{(0)} = 0$, что не нарушает общности, так как для этого достаточно взять начальную эпоху таким образом, чтобы y_1 было равно нулю для $t = t_0$. Теперь нужно показать, что можно определить β_s и γ_s как голоморфные функции от μ , уничтожающиеся при $\mu = 0$.

Заметим, что при $\mu = 0$ мы имеем тождественно $\Phi_s = 0$, откуда следует, что разложения функций Φ_s содержат μ множителем. Сокращая этот множитель, мы напишем подлежащие разрешению уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Phi_s &= 0 & (s = 1, 2, \dots, n-1) \\ \Psi_s &= 0 & (s = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

Теперь, чтобы доказать существование интересующего нас периодического решения, нужно убедиться, что функциональный определитель

$$\Delta = \frac{D \left(\frac{1}{\mu} \Phi_\sigma | \Psi_f \right)}{D(\beta_\sigma | \gamma_f)} \quad (3.77')$$

не равен нулю при одновременном равенстве нулю всех переменных.

Но для $\mu = 0$ имеем, как легко видеть,

$$\Psi_s = -T \frac{\partial}{\partial \beta_s} F_0(\tilde{x}_\sigma^{(0)} + \beta_\sigma) \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

откуда следует, что якобиан функций ψ_s по величинам β_s определяется равенством ($\mu = \beta_s = 0$)

$$\Delta_1 = (-T)^n \left\| \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_s \partial x_\sigma} \right\| \quad (x_s = \tilde{x}_s^{(0)}); \quad (3.78)$$

Δ_1 есть определитель Гессе от функции F_0 по отношению к величинам x_s .

Выразим теперь $\frac{1}{\mu} \varphi_s$ в функции величин γ_s , предполагая одновременно $\mu = 0$ и $\beta_s = 0$.

Но мы имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_s - \tilde{x}_s^{(0)}}{\mu} \right) = \frac{\partial F_1}{\partial y_s} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial y_s} + \dots,$$

откуда

$$\frac{1}{\mu} \varphi_s = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial F_1}{\partial y_s} dt + \mu \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial F_2}{\partial y_s} dt + \dots,$$

и для $\mu = 0$ получаем

$$\frac{1}{\mu} \varphi_s = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial F_1}{\partial y_s} dt. \quad (3.79)$$

Так как мы положили $\mu = 0$, $\beta_s = 0$, то, имея в виду, что мы сделали $\gamma_1 = \tilde{y}_1^{(0)} = 0$, мы должны в правой части последнего уравнения заменить x_s , y_s соответственно на $\tilde{x}_s^{(0)}$, $n_1(t - t_0)$, $n_s(t - t_0) + \tilde{y}_s^{(0)} + \gamma_s$.

Тогда $\frac{\partial F_1}{\partial y_s}$ сделается периодической функцией от t . Но мы можем написать

$$F_1 = \sum A \sin \left[\sum_{\sigma=1}^n m_\sigma y_\sigma + B \right], \quad (3.80)$$

где m_σ — целые числа, а величины A и B — функции от x_s и не зависят от y_s .

Полагая для сокращения

$$\Omega = (t - t_0) \sum_{\sigma=1}^n m_\sigma n_\sigma + B + \sum_{\sigma=2}^n m_\sigma (\tilde{y}_\sigma^{(0)} + \gamma_s),$$

мы имеем

$$F_1 = \sum A \sin \Omega,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_s} = \sum A m_s \cos \Omega = \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{y}_s^{(0)}}.$$

Очевидно, что F_1 при этих условиях также есть периодическая функция от t с периодом T .

Обозначим через $[F_1]$ среднее значение периодической функции F_1 , так что

$$[F_1] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F_1 dt. \quad (3.81)$$

Теперь уравнения (3.79) примут вид

$$\frac{1}{\mu} \varphi_s = T \frac{\partial [F_1]}{\partial \tilde{y}_s^{(0)}}.$$

Отсюда следует, что всегда можно выбрать $\tilde{y}_s^{(0)}$ ($s = 2, \dots, n$) так, чтобы уравнения $\frac{1}{\mu} \varphi_s = 0$ ($s = 1, 2, \dots, n - 1$) удовлетворялись для $y_s = 0$ ($s = 2, 3, \dots, n$).

Действительно, функция $[F_1]$ есть ограниченная периодическая функция от $\tilde{y}_s^{(0)}$ и, следовательно, имеет максимум и минимум, для которых необходимо

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial \tilde{y}_s^{(0)}} = 0 \quad (s = 2, 3, \dots, n),$$

а, следовательно, и $\frac{1}{\mu} \varphi_s = 0$.

Возвращаясь теперь к определителю (3.77'), замечаем, что при $\mu = 0$ функции φ_s зависят только от β_s , а следовательно, этот определитель равен произведению двух других, а именно:

$$\frac{D(\psi_j)}{D(\beta_\sigma)}, \quad \frac{D\left(\frac{1}{\mu} \varphi_\sigma\right)}{D(y_i)} = \Delta_2.$$

Но первый равен определителю Δ_1 , а второй есть определитель Гессе от $[F_1]$ по отношению к $\tilde{y}_s^{(0)}$.

Таким образом, если ни один из определителей Δ_1 и Δ_2 не равен нулю, то определитель Δ не обращается в нуль при одновременном равенстве нулю всех переменных и уравнения (3.77) имеют единственное голоморфное решение относительно β_s и y_j ($j = 2, 3, \dots, n$).

Поэтому при высказанном условии уравнения (3.72) заведомо будут иметь периодическое решение второго рода с периодом T .

Примечание. Можно также поставить задачу об отыскании периодического решения системы (3.72) с периодом, немного отличающимся от T .

Эту задачу мы, для краткости, рассматривать не будем.