Часть вторая

ОГРАНИЧЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Основная задача небесной механики заключается, как известно, в изучении движений всевозможных небесных тел, как естественных, так и искусственных, находящихся под действием разнообразных космических сил, главными из которых являются силы взаимных притяжений.

Известно также, что эти задачи оказываются, вообще говоря, чрезвычайно сложными и в большинстве случаев неразрешимы с математической точки зрения.

Поэтому обычно стараются по возможности упростить поставленную астрономическую задачу настолько, чтобы исследование движения интересующего нас небесного тела сделалось математически доступным и позволило получить желаемые результаты.

Главные затруднения представляют задачи о совместном определении движений нескольких небесных тел, взаимно влияющих друг на друга. Действительно, в этих случаях астрономическая задача приводится к рассмотрению системы дифференциальных уравнений второго порядка, причем общий порядок всей системы оказывается весьма высоким.

Однако в ряде случаев оказывается возможным с известной степенью приближения рассматривать задачу о движении только одного тела, считая, что движения остальных так или иначе могут полагаться известными.

Такого рода задачи, по почину Пуанкаре, будем называть «ограниченными».

Классическим примером ограниченной задачи является ограниченная задача трех тел (материальных точек), возникшая первоначально при изучении движений малых планет или комет. Так как массы этих небесных тел весьма малы по сравнению с массами Солнца и больших планет, то влияние астероида или кометы на остальные тела Солнечной системы совершенно ничтожно и им можно полностью пренебречь. Таким образом, мы приходим к задаче о движении материальной точки под действием притяжений двух других материальных точек — Солнца и Юпитера, причем можно считать, что Юпитер движется вокруг Солнца по законам Кеплера.

Подобным же образом можно рассматривать и более сложные ограниченные задачи, к которым можно отнести также задачу о движении спутника (естественного или искусственного) в поле притяжения центральной планеты, рассматриваемой как тело.

Вообще, если рассматривается система, состоящая из любого числа тел, то под ограниченной задачей мы будем понимать задачу о движении одного-единственного тела, предполагая, что движения всех остальных известны и что рассматриваемое тело не оказывает на все остальные никакого влияния.

Часть вторая нашей книги и посвящается рассмотрению некоторых важнейших ограниченных задач такого рода.

Глава IV

ЗАДАЧА НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

В этой главе рассматривается простейшая ограниченная задача небесной механики — задача о движении материальной точки, притягиваемой (или отталкиваемой) несколькими неподвижными точечными центрами. Сама материальная точка не оказывает на эти центры никакого действия и называется, по этой причине, *пассивно действующей*. Каждый из неподвижных центров обладает некоторой конечной массой, но не оказывает никакого действия на все другие неподвижные точечные массы. Сила, с которой каждый неподвижный точечный центр действует на свободную, пассивно действующую материальную точку, предполагается направленной по прямой, соединяющей обе точки. По величине эта сила предполагается пропорциональной произведению масс этих точек и некоторой функции от расстояния между ними. В более общем случае эта сила может также зависеть от первых двух производных по времени от упомянутого расстояния.

Если число неподвижных центров равно двум, а закон силы есть ньютоновский закон притяжения, обратно пропорционального квадрату взаимного расстояния, то мы имеем классическую задачу двух неподвижных центров. Эта задача, не нашедшая применения в классической небесной механике, имеет в настоящее время большое и важное значение для нового раздела этой науки — теории движения искусственных спутников планет Солнечной системы.

§ 1. Задача многих неподвижных центров

1. Поставим сначала задачу многих неподвижных центров в наиболее общем виде. Пусть в некоторой неизменной системе декартовых координат имеется некоторое количество n $(n \geqslant 1)$ активно действующих, неподвижных центров M_i, обладающих массами m_i, координаты которых обозначим буквами a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть, далее, M — свободная материальная точка с массой m и координатами x, y, z, которая является пассивно

действующей. Таким образом, точка M не оказывает никакого влияния на неподвижные центры, но сама находится под действием сил, исходящих от этих центров.

Допустим, что неподвижный центр M_i действует на точку M с силой, направленной по прямой, соединяющей обе точки и пропорциональной произведению их масс и некоторой функции F_i, определяющей закон действия силы.

Таким образом, масса m находится под действием n сил, равных по величине $f_i m_i m F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где множители пропорциональности f_i— вещественные постоянные или, вообще, заданные функции времени, которые могут иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Закон силы F_i есть заданная функция, вообще, времени, расстояния r_i и его производных по времени $\dot{r}_i$ и $\ddot{r}_i$. Итак,

$$F_i = F_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i,\ \ddot{r}_i). \tag{4.1}$$

Уравнения движения свободной точки M, находящейся под действием n неподвижных центров, напишутся, очевидно, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \cdot \frac{a_i - x}{r_i}, \\ \ddot{y} &= \sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \cdot \frac{b_i - y}{r_i}, \\ \ddot{z} &= \sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \cdot \frac{c_i - z}{r_i}, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

где

$$r_i = \sqrt{(a_i - x)^2 + (b_i - y)^2 + (c_i - z)^2} \tag{4.3}$$

и, соответственно,

$$\dot{r}_i = -\frac{(a_i - x)\dot{x} + (b_i - y)\dot{y} + (c_i - z)\dot{z}}{r_i}, \tag{4.3'}$$

$$\ddot{r}_i = \frac{-(a_i - x)\ddot{x} - (b_i - y)\ddot{y} - (c_i - z)\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \dot{r}_i^2}{r_i}. \tag{4.3''}$$

Таким образом, в самом общем случае правые части уравнений (4.2) зависят не только от координат пассивно действующей точки x, y, z, но, через посредство функций F_i, также от производных по времени координат $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, а также и от времени t.

Поэтому уравнения (4.2) являются весьма сложными и их интегрирование вообще возможно только при помощи бесконечных рядов того или иного вида. Это обстоятельство является,

впрочем, весьма характерным для задач небесной механики, которые допускают интегрирование в конечном виде только в некоторых простейших случаях, например, в задаче о движении двух материальных точек, взаимно притягивающихся (или отталкивающихся) по закону Ньютона.

Уравнения (4.2) чрезвычайно упрощаются, если множители пропорциональности не зависят от времени, а функции F_i, определяющие законы действующих сил, зависят только от расстояний, т. е. когда

$$f_i = \text{const}, \quad F_i = F_i(r_i), \tag{4.4}$$

или когда к тому же еще

$$f_i = f \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.4'}$$

Еще более простым случаем является тот, когда каждый из неподвижных центров действует на точку M по одному и тому же закону, что будет в случае, когда

$$f_i = f, \quad F_i = F(r_i). \tag{4.4''}$$

Из случаев последнего рода полезно особо отметить случай степенно́го закона, когда

$$F_i = r_i^K, \tag{4.4'''}$$

где K — какое-либо вещественное число, положительное или отрицательное (не равное нулю!). В частности, при $K = 1$ имеем закон взаимодействия, пропорционального расстоянию:

$$F_i = r_i.$$

Этот закон мы будем называть *законом Гука*. Если показатель степени K — число отрицательное, то удобнее положить $K = -N$, и тогда мы будем иметь закон действия, обратно пропорционального некоторой степени расстояния:

$$F_i = \frac{1}{r_i^N},$$

который при $N = 2$ есть знакомый нам закон Ньютона.

Из более сложных случаев отметим рассмотренный в т. IV известного трактата Тиссерана закон Вебера

$$F_i(t;\, r_i,\, \dot{r}_i,\, \ddot{r}_i) = \frac{1}{r_i^2}\left(1 - \frac{\dot{r}_i^2}{\sigma_i^2} + \frac{2r_i\ddot{r}_i}{\sigma_i^2}\right), \tag{4.5}$$

где вообще для различных неподвижных центров величины f_i и σ_i могут иметь различные значения и, к тому же, могут зависеть от времени. Более простой случай имеем, когда

$$f_i = f = \text{const}, \quad \sigma_i = \sigma = \text{const}.$$

Заметим, что σ представляет собой *скорость распространения действия* (притяжения или отталкивания) и что при $\sigma = \infty$ закон Вебера совпадает с законом Ньютона.

У читателя может возникнуть естественный вопрос: *зачем рассматривать другие законы, отличные от классического закона Ньютона, с помощью которого как будто объясняются и законы движений планет в Солнечной системе и различные явления в звездных системах*?

На это можно ответить следующим образом: закон Ньютона, как известно, выведен из законов Кеплера, которые в свою очередь получены из многочисленных наблюдений, выполненных Тихо Браге. Ясно, что законы Кеплера являются поэтому только приближенными и что действительные движения планет и их спутников в Солнечной системе этим законам не подчиняются или, во всяком случае, плохо подчиняются! Отсюда следует, что закон Ньютона является также приближенным законом, весьма удобным для практических приложений в небесной механике, но представляющим собой только модель истинного, неизвестного еще нам закона, царствующего во Вселенной.

К тому же уже давно было замечено, что расчеты движений планет, основанные на законе Ньютона, часто оказываются расходящимися с результатами весьма тщательных наблюдений. Вследствие этого неоднократно предлагалось заменить закон Ньютона каким-либо другим законом типа (4.4‴) или (4.5) либо еще каким-нибудь другим. Эти попытки оказывались обычно неудачными или неудобными для приложений, и к тому же предлагавшиеся новые законы также являлись всегда приближенными моделями и не вскрывали истинных свойств закономерностей (если таковые на самом деле существуют!) во Вселенной.

Нужно заметить еще, что хотя результаты, полученные на основании закона Ньютона, все же оказываются более или менее удовлетворительными для практики в пределах Солнечной системы, но считать по этой причине закон Ньютона всеобщим законом всемирного тяготения, как это часто и охотно делается, нет никаких оснований.

В самом деле, мы не имеем еще возможностей следить за движениями далеких звезд и звездных систем достаточно продолжительное время для того, чтобы было возможно сравнивать результаты наблюдений с результатами вычислений, полученными на основании какого-либо модельного закона, хотя бы закона Ньютона.

Поэтому истинные законы движений в отдаленных областях Вселенной нам остаются совершенно неизвестными, вследствие чего рассмотрение наиболее общих форм законов и математи-

ческое исследование получающихся отсюда уравнений и свойств движений является вполне оправданным и целесообразным, что всегда признавали многие выдающиеся математики и астрономы.

Вследствие этих соображений в следующих главах книги мы часто будем обращаться к законам более общего вида, чем закон Ньютона, не отбрасывая при этом из рассмотрения и те выводы, которые следуют из закона Ньютона.

Может возникнуть и второй вопрос: почему в этой книге не излагаются и не используются результаты, полученные на основе теории относительности? На это мы ответим так: теория относительности представляет нам также модель закономерностей Вселенной, но гораздо более сложную математически, чем всякая другая. Использование теории относительности в небесной механике может быть произведено только при помощи ряда упрощений и приближений, а такая методика ничем не отличается от классической. Кроме того, мы имеем прекрасную книгу В. А. Брумберга «Релятивистская небесная механика» («Наука», 1972 г.), и нет надобности повторять то, что в ней изложено.

2. Вернемся теперь к уравнениям (4.2) и посмотрим, в каких случаях эти уравнения могут допускать какие-либо интегралы или даже быть полностью проинтегрированы в квадратурах.

Прежде всего отметим один любопытный случай, в котором уравнения (4.2) интегрируются до конца и притом в элементарных функциях. Это случай, когда каждый из неподвижных центров действует на пассивную точку M по закону Гука.

Действительно, при $F_i = r_i$ уравнения (4.2) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \varkappa^2 \cdot x = A, \\ \ddot{y} + \varkappa^2 \cdot y = B, \\ \ddot{z} + \varkappa^2 \cdot z = C, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i, \\ A = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i a_i, \quad B = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i c_i. \end{aligned}\right\} \tag{4.6'}$$

Уравнения (4.6) составляют три независимых между собой уравнения, каждое из которых есть линейное уравнение второго порядка. Эти уравнения легко интегрируются, если все f_i суть величины постоянные (положительные или отрицательные).

Действительно, если все f_i постоянные, то решение уравнений (4.6) дается следующими формулами ($\varkappa^2 > 0$):

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(x_0 - \frac{A}{\varkappa^2}\right)\cos\varkappa t + \frac{\dot{x}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t + \frac{A}{\varkappa^2}, \\ y &= \left(y_0 - \frac{B}{\varkappa^2}\right)\cos\varkappa t + \frac{\dot{y}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t + \frac{B}{\varkappa^2}, \\ z &= \left(z_0 - \frac{C}{\varkappa^2}\right)\cos\varkappa t + \frac{\dot{z}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t + \frac{C}{\varkappa^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

и для $\varkappa^2 = -\lambda^2$ ($\lambda > 0$), $e = 2{,}7182\ldots$,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2}\right)e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{\dot{x}_0}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t} - \frac{A}{\lambda^2}, \\ y &= \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{\dot{y}_0}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2}\right)e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{\dot{y}_0}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t} - \frac{B}{\lambda^2}, \\ z &= \frac{1}{2}\left(z_0 + \frac{\dot{z}_0}{\lambda} + \frac{C}{\lambda^2}\right)e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\left(z_0 - \frac{\dot{z}_0}{\lambda} + \frac{C}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t} - \frac{C}{\lambda^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.7'}$$

где x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ — начальные значения (для $t = 0$) координат и составляющих скорости точки M.

Заметим еще, что при $f_i = f$, т. е. когда все неподвижные центры действуют на точку M по одному и тому же закону, мы имеем

$$\varkappa^2 = -\lambda^2 = f\bar{m}, \quad A = f\bar{m}\bar{a}, \quad B = f\bar{m}\bar{b}, \quad C = f\bar{m}\bar{c},$$

где $\bar{m}$ — масса системы всех неподвижных центров и $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — координаты их центра масс.

Так как выбор неизменной системы координат совершенно произволен, то за начало координат можно принять центр масс неподвижных центров. Тогда в последнем случае (т. е. когда все f_i одинаковы) будем иметь

$$A = B = C = 0,$$

и формулы (4.7) и (4.7′) напишутся следующим образом:

$$x = x_0\cos\varkappa t + \frac{\dot{x}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t,$$

$$y = y_0\cos\varkappa t + \frac{\dot{y}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t,$$

$$z = z_0\cos\varkappa t + \frac{\dot{z}_0}{\varkappa}\sin\varkappa t,$$

$$x = x_0\operatorname{ch}\lambda t + \frac{\dot{x}_0}{\varkappa}\operatorname{sh}\lambda t,$$

$$y = y_0\operatorname{ch}\lambda t + \frac{\dot{y}_0}{\varkappa}\operatorname{sh}\lambda t,$$

$$z = z_0\operatorname{ch}\lambda t + \frac{\dot{z}_0}{\varkappa}\operatorname{sh}\lambda t.$$

Из этих формул (впрочем, также и из (4.7), (4.7′)) можно извлечь все обстоятельства движения. Так, из (4.7) следует, что движение точки M происходит периодически в конечной области пространства и траектория есть линия пересечения двух эллиптических цилиндрических поверхностей. Наоборот, из (4.7′) следует, что траектория движения есть бесконечная пространственная кривая, являющаяся линией пересечения двух гиперболических цилиндров.

Уравнения упомянутых цилиндров получатся, очевидно, в результате исключения t из двух каких-либо пар уравнений (4.7) и (4.7′). Если в начальный момент $t=0$ точка M находится в центре масс и имеет отличную от нуля начальную скорость или если точка M в начальный момент имеет нулевую начальную скорость, то траектория движения есть прямая линия. При этом начальные значения (начальные составляющие скорости, или начальные координаты) всегда можно выбрать так, чтобы точка M достигла в конечное время любой из точек M_i и продолжала двигаться по своей прямолинейной траектории.

Если некоторые или все из величин f_i являются функциями времени, то уравнения (4.6), за исключением редких случаев, оказываются неинтегрируемыми в конечном виде и свойства движения в таких случаях можно обнаружить только методами качественного анализа. Разумеется, при этом свойства функций f_i должны быть известны. Например, если

$$\bar{a}=\bar{b}=\bar{c}=0, \quad f_i=f(t)$$

и $f(t)$, а следовательно, и $\varkappa^2$ есть периодические функции времени, то к каждому из уравнений (4.6) возможно применить результаты раздела 4 § 4 главы II.

Поэтому если $f(t)$ есть функция времени, принимающая только неположительные значения, то каждое движение точки M, близкое сколь угодно по начальным данным к положению равновесия ($x_0=y_0=z_0=\dot{x}_0=\dot{y}_0=\dot{z}_0=0$), будет покидать область начала координат и способно удаляться от него сколь угодно далеко.

Если же функция $f(t)$ может принимать только неотрицательные значения и при этом удовлетворяет условию

$$\omega\int_0^{\omega} f(t)\,dt \leqslant 4,$$

где ω — период функции $f(t)$, то по второй теореме Ляпунова раздела 5 § 4 главы II, заключаем, что движение точки M, близкое по начальным данным к положению равновесия, будет сколь угодно долго оставаться вблизи этого положения.

В других случаях исследование движения делается гораздо более затруднительным и мы поэтому ограничимся только случаями уже рассмотренными.

3. Рассмотрим теперь случаи, когда уравнения (4.2), которые вообще не могут быть проинтегрированы полностью, могут допускать некоторые первые интегралы, аналогичные классическим.

Допустим прежде всего, что все неподвижные центры M_i лежат на одной прямой, которую всегда можно взять за одну из осей неизменной системы координат.

Пусть, например, все точки M_i лежат на оси z. Тогда $a_i = b_i = 0$. Тогда, каковы бы ни были функции F_i и величины f_i, мы имеем из уравнений (4.2)

$$y\ddot{x} - x\ddot{y} = 0,$$

откуда получаем первый интеграл

$$y\dot{x} - x\dot{y} = c, \tag{4.8}$$

где c — произвольная постоянная. Этот интеграл является интегралом площадей в плоскости (xOy), и если мы введем в этой плоскости вместо x и y полярные координаты ρ и φ обычными формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{4.9}$$

то интеграл (4.8) напишется в виде

$$\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = c, \tag{4.8'}$$

и будет показывать, что проекция радиуса-вектора r точки M на плоскость (xOy) описывает площадь пропорционально времени.

Якоби, который рассматривал задачу неподвижных центров в своих знаменитых лекциях по динамике, замечает, что интеграл площадей (4.8) будет существовать и в том случае, когда к действиям неподвижных центров присоединится постоянная сила, параллельная оси z. В самом деле, в этом случае (если считать, как и выше, что все точки M_i лежат на оси z) уравнения (4.2) напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} &= -x\sum_{i=1}^{n} f_i m_i \frac{F_i}{r_i},\\
\ddot{y} &= -y\sum_{i=1}^{n} f_i m_i \frac{F_i}{r_i},\\
\ddot{z} &= \sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \frac{c_i - z}{r_i} + F,
\end{aligned}\right\} \tag{4.2'}$$

и существование интеграла (4.8) очевидно.

Заметим, что этот результат остается справедливым, не только в случае $F = \text{const}$, но и тогда, когда величина F есть какая угодно функция от t, z, $\dot{z}$ и $\ddot{z}$.

Предположим теперь, что неподвижные центры расположены на оси z симметрично относительно начала координат, так что число точек M_i, лежащих на положительной части оси, равно числу точек, лежащих на отрицательной части, а одна точка находится в начале координат (если число точек нечетное).

Положим тогда $n = 2\nu$ (или $n = 2\nu + 1$) и напишем уравнения (4.2′) в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -x \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{F_j}{r_j}, \\ \ddot{y} &= -y \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{F_j}{r_j}, \\ \ddot{z} &= \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{c_j - z}{r_j} F_j + F. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2'')$$

Неподвижные центры, лежащие на оси z, располагаются теперь в порядке снизу вверх и, таким образом,

$$M_{-\nu},\ M_{-\nu+1},\ \ldots,\ M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_\nu$$

(если n четное, полагаем $m_0 = 0$).

Пусть теперь выполняются условия

$$f_{-j} = f_j, \quad m_{-j} = m_j, \quad F_{-j} = F_j, \quad F = 0. \qquad (4.10)$$

Тогда, как легко видеть, последнее из уравнений (4.2″) удовлетворяется при $z = 0$, а поэтому, если в начальный момент точка M находится в плоскости $z = 0$ и вектор ее начальной скорости также лежит в этой плоскости, то точка M всегда будет оставаться в плоскости $z = 0$ и траекторией ее движения будет плоская кривая.

Из уравнений (4.2′) видно, что плоское движение возможно также и в координатных плоскостях $x = 0$ и $y = 0$, а также, конечно, и на линии их пересечения, т. е. по оси Oz, причем в этих случаях условия (4.10) могут и не соблюдаться.

Останавливаясь на случае движения в плоскости $z = 0$, заметим, что условия (4.10) заведомо выполняются при симметрично равных массах, когда

$$f_j = f_{-j} = f, \quad F_j = F_{-j} = F.$$

Уравнения плоского движения (в плоскости $z = 0$) составляют систему двух уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -x \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{F_j}{r_j}, \\ \ddot{y} &= -y \sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j \frac{F_j}{r_j}, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

обладающую интегралом площадей (4.8).

В уравнениях (4.11) расстояния r_j и их производные выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} r_j &= \sqrt{\rho^2 + c_j^2}, \\ \dot{r}_j &= \frac{\rho\dot{\rho}}{r_j}, \\ \ddot{r}_j &= \frac{\rho\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2 - \dot{r}_j^2}{r_j}. \end{aligned}\right\} \tag{4.11'}$$

Если теперь в уравнениях (4.11) перейти от прямоугольных координат к полярным при помощи формул (4.9), то, имея в виду интеграл площадей (4.8′), мы приведем нашу задачу к интегрированию одного уравнения второго порядка относительно радиуса-вектора ρ:

$$\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} = -\sum_{j=-\nu}^{+\nu} f_j m_j F_j (t;\ r_j,\ \dot{r}_j,\ \ddot{r}_j), \tag{4.12}$$

и если это уравнение проинтегрировано, то полярный угол φ получится из (4.8′) квадратурой:

$$\varphi - \varphi_0 = c \int_0^t \frac{dt}{\rho^2}. \tag{4.12'}$$

Интегрирование уравнения (4.12), конечно, представляет еще весьма сложную математическую задачу, хотя несравненно более простую, чем интегрирование системы (4.2) или даже системы (4.11).

Однако, если величины f_j — постоянные и функции F_j не содержат явно времени, то, если выполняется условие

$$\sum_{j=-\nu}^{\nu} f_j m_j F_j (\bar{c}_j,\ 0,\ 0) > 0,$$

где $\bar{c}_j$ — положительные постоянные, уравнение (4.12) всегда имеет частное решение

$$\rho = a = \text{const},$$

причем

$$\bar{c}_j^2 = a^2 + c_j^2.$$

Таким образом, в этом случае под совместным действием n неподвижных центров, лежащих на оси z, точка M движется в плоскости (xOy) по окружности, радиуса a с постоянной угловой скоростью c/a^2.

4. Исследуем теперь случаи, в которых задача неподвижных центров допускает интеграл, аналогичный интегралу живой силы.

Помножим уравнения (4.2), как это обычно делается, на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и сложим. Тогда, имея в виду формулы (4.3′), мы получим

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -2\sum_{i=1}^{n} f_i m_i F_i \cdot \frac{dr_i}{dt}. \tag{4.13}$$

Чтобы из (4.13) можно было вывести интеграл живой силы, необходимо, очевидно, чтобы правая часть равенства (4.13) оказалась точной производной по времени.

Это заведомо будет в случае, когда $f_i = \text{const}$, и каждая из функций F_i зависит только от соответствующего расстояния r_i. Тогда интегрирование дает

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U(x, y, z) + 2h, \tag{4.13′}$$

где

$$U(x, y, z) = -\sum_{i=1}^{n} f_i m_i \int F_i(r_i)\, dr_i \tag{4.14}$$

есть силовая функция системы неподвижных центров и h есть произвольная постоянная.

Например, пусть каждая из F_i есть степенна́я функция, т. е.

$$F_i = r_i^{K_i}.$$

Тогда

$$\int F_i\, dr_i = \frac{1}{K_i + 1} r_i^{K_i + 1},$$

и силовая функция представится формулой

$$U(x, y, z) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i m_i}{K_i + 1} r_i^{K_i + 1} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i m_i}{K_i + 1} [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2]^{\frac{1}{2}(K_i + 1)}.$$

В частности, если каждый из неподвижных центров притягивает точку M по закону Ньютона, то $K_i = -2$ и силовая функция имеет следующее выражение:

$$U = f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i} = f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}}.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Допустим, что для каждой из функций F_i найдется такая функция Φ_i, что выполняется равенство ($f_i = \text{const}$)

$$\dot{r}_i F_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i,\ \ddot{r}_i) = \frac{d}{dt}\Phi_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i). \tag{4.15}$$

Тогда равенство (4.13) может быть проинтегрировано, и в результате мы получим обобщенный интеграл живой силы в виде

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = -\sum_{i=1}^{n} f_i m_i \Phi_i(t;\ r_i,\ \dot{r}_i) + h. \tag{4.16}$$

Пример такого рода дает нам закон Вебера, определяемый формулой (4.5) в случае, когда $f_i = \text{const}$ и $\sigma_i = \text{const}$.

В самом деле, легко непосредственно проверить, что в этом случае функция Φ_i, соответствующая закону Вебера (4.5), будет

$$\Phi_i(r_i,\ \dot{r}_i) = \frac{1}{r_i}\left[-1+\frac{\dot{r}_i^2}{\sigma_i^2}\right],$$

так что из (4.16) получим в этом случае

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i m_i}{r_i}\left[1-\frac{\dot{r}_i^2}{\sigma_i^2}\right] + h, \tag{4.16'}$$

где r_i и $\dot{r}_i$ по-прежнему определяются формулами (4.3) и (4.3′).

Обозначая, как обычно, живую силу через T и вводя обобщенную силовую функцию $U(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$ посредством формулы

$$U(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i m_i}{r_i}\left[1-\frac{\dot{r}_i^2}{\sigma_i^2}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i m_i}{r_i}\left[1-\frac{[(a_i-x)\dot{x}+(b_i-y)\dot{y}+(c_i-z)\dot{z}]^2}{\sigma_i^2[(a_i-x)^2+(b_i-y)^2+(c_i-z)^2]^2}\right],$$

напишем (4.16′) в виде

$$T = U + h.$$

Возвращаясь к общему случаю существования интеграла живой силы, посмотрим теперь, каким условиям должна удовлетворять функция F_i, чтобы было возможно равенство (4.15).

Написав равенство (4.15) в раскрытом виде,

$$\dot{r}_i F_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_i}\dot{r}_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{r}_i}\ddot{r}_i, \tag{4.17}$$

мы видим непосредственно, что оно может быть возможно только в том случае, когда F_i есть линейная функция $\ddot{r}_i$ и, следовательно, должна иметь вид

$$F_i(t;\, r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i) = F_i^{(0)}(t;\, r_i, \dot{r}_i) + \ddot{r}_i F_i^{(1)}(t;\, r_i, \dot{r}_i). \tag{4.18}$$

Сравнение (4.17) и (4.18) приводит к условиям

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_i}\cdot \dot{r}_i &= \dot{r}_i F_i^{(0)}(t;\, r_i, \dot{r}_i), \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{r}_i} &= \dot{r}_i F_i^{(1)}(t;\, r_i, \dot{r}_i). \end{aligned}\right\} \tag{4.18'}$$

Рассматривая функцию F_i, а следовательно, и функции $F_i^{(0)}$ и $F_i^{(1)}$ как данные, а Φ_i как неизвестную, мы видим, что искомая функция Φ_i должна удовлетворять двум уравнениям (4.18′), которые поэтому должны быть совместными. Чтобы вывести условия совместности, предположим сначала, что функции F и Φ не зависят явно от времени t. Тогда частная производная по t от функции Φ равна нулю и, исключая в этом случае функцию Φ из уравнений (4.18′), мы получим условие, которому должны удовлетворять данные функции $F_i^{(0)}$ и $F_i^{(1)}$, в виде

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} F_i^{(0)}(r_i, \dot{r}_i) = \dot{r}_i \frac{\partial}{\partial r_i} F_i^{(1)}(r_i, \dot{r}_i). \tag{4.19}$$

Если это условие выполнено, то, интегрируя (4.18′), мы получим искомую функцию Φ_i при помощи формулы

$$\Phi_i(r_i, \dot{r}_i) = \int F_i^{(0)}\, dr_i + \int \left[\dot{r}_1 F_i^{(1)} - \int \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \dot{r}_i}\, dr_i\right] d\dot{r}_i.$$

Примером функции F_i, удовлетворяющей условию (4.19) и имеющей форму (4.18), является закон Вебера (4.5), а функция Φ_i, соответствующая этому закону, может быть вычислена по только что приведенной формуле.

Если заданная функция F_i содержит явно t, то условие совместности двух уравнений (4.18′) получается следующим образом: продифференцируем частным образом первое из

уравнений (4.18′) по $\dot{r}_i$, а второе по t и r_i соответственно. Мы получим

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t\,\partial\dot{r}_i}+\dot{r}_i\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r_i\,\partial\dot{r}_i}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial r_i}=F_i^{(0)}+\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\dot{r}_i\,\partial t}=\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\dot{r}_i\,\partial r_i}=\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}.$$

Исключая из этих трех соотношений две частные производные второго порядка, мы получим

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial r_i}=F_i^{(0)}+\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i}-\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}-\dot{r}_i^2\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}.$$

Дифференцируя, наконец, последнее равенство частным образом по $\dot{r}_i$ и исключая из результата вторую производную с помощью последнего из трех написанных выше равенств, мы получим соотношение, не содержащее функции Φ_i и ее производных и являющееся поэтому условием совместности уравнений (4.18′):

$$(1+3\dot{r}_i)\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}=2\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}}+\dot{r}\frac{\partial^2F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i^2}-(\dot{r}_i+\ddot{r}_i^2)\frac{\partial^2F_i^{(1)}}{\partial r_i\,\partial\dot{r}_0}. \qquad (4.20)$$

Итак, в случае выполнимости условия (4.19) или (4.20) общие уравнения (4.2) задачи n неподвижных центров допускают интеграл живой силы, который может быть использован иногда для понижения порядка системы или даже, в исключительных случаях, для полного интегрирования этих уравнений.

§ 2. Некоторые частные случаи задачи неподвижных центров

1. Простейшим случаем задачи неподвижных центров является, очевидно, тот, когда имеется только один неподвижный центр. Приняв этот неподвижный центр за начало неизменной, декартовой системы координат и сохраняя предположения, принятые в начале § 1, мы получим хорошо знакомые дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки, находящейся под действием центральной силы:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=-fm\frac{x}{r}\cdot F,\\ \ddot{y}&=-fm\frac{y}{r}\cdot F,\\ \ddot{z}&=-fm\frac{z}{r}\cdot F,\end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$