уравнений (4.18′) по $\dot{r}_i$, а второе по t и r_i соответственно. Мы получим

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t\,\partial\dot{r}_i}+\dot{r}_i\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r_i\,\partial\dot{r}_i}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial r_i}=F_i^{(0)}+\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\dot{r}_i\,\partial t}=\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\dot{r}_i\,\partial r_i}=\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}.$$

Исключая из этих трех соотношений две частные производные второго порядка, мы получим

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial r_i}=F_i^{(0)}+\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i}-\dot{r}_i\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}-\dot{r}_i^2\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}.$$

Дифференцируя, наконец, последнее равенство частным образом по $\dot{r}_i$ и исключая из результата вторую производную с помощью последнего из трех написанных выше равенств, мы получим соотношение, не содержащее функции Φ_i и ее производных и являющееся поэтому условием совместности уравнений (4.18′):

$$(1+3\dot{r}_i)\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial r_i}=2\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}}+\dot{r}\frac{\partial^2F_i^{(0)}}{\partial\dot{r}_i^2}-(\dot{r}_i+\ddot{r}_i^2)\frac{\partial^2F_i^{(1)}}{\partial r_i\,\partial\dot{r}_0}. \qquad (4.20)$$

Итак, в случае выполнимости условия (4.19) или (4.20) общие уравнения (4.2) задачи n неподвижных центров допускают интеграл живой силы, который может быть использован иногда для понижения порядка системы или даже, в исключительных случаях, для полного интегрирования этих уравнений.

§ 2. Некоторые частные случаи задачи неподвижных центров

1. Простейшим случаем задачи неподвижных центров является, очевидно, тот, когда имеется только один неподвижный центр. Приняв этот неподвижный центр за начало неизменной, декартовой системы координат и сохраняя предположения, принятые в начале § 1, мы получим хорошо знакомые дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки, находящейся под действием центральной силы:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=-fm\frac{x}{r}\cdot F,\\ \ddot{y}&=-fm\frac{y}{r}\cdot F,\\ \ddot{z}&=-fm\frac{z}{r}\cdot F,\end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

где m — масса неподвижного центра, находящегося в начале координат, f — множитель пропорциональности, который есть либо величина постоянная (положительная или отрицательная), либо заданная функция времени t,

$$F = F(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}) \tag{4.22}$$

— заданная функция, определяющая характер действия массы m на пассивную материальную точку, масса которой не входит в уравнения (4.21) и, как обычно;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

есть радиус-вектор движущейся точки M.

Известно, что уравнения (4.21) имеют три интеграла площадей,

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_3,$$

из которых следует также хорошо известное соотношение

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0,$$

показывающее, что в рассматриваемой задаче движение точки M всегда происходит в неизменной плоскости, которую удобно принять за одну из координатных плоскостей, например, за плоскость (xOy). Оставляя для координат точки M, движущейся в этой плоскости, те же обозначения x и y, мы приведем нашу задачу к интегрированию системы двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -fm\frac{x}{r}F, \\ \ddot{y} &= -fm\frac{y}{r}F, \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \ddot{r} &= \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y} + V^2 - \dot{r}^2}{r}, \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \end{aligned}\right\} \tag{4.23'}$$

с одним интегралом площадей

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi} = c, \tag{4.24}$$

что позволяет привести систему (4.23) к виду (4.12), т. е.

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -fmF(t,\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}) \tag{4.25}$$

и к квадратуре вида (4.12′)

$$\varphi - \varphi_0 = c \int_0^t \frac{dt}{r^2}. \tag{4.25′}$$

Если функция F удовлетворяет условиям (4.19) или (4.20), то существует также интеграл живой силы вида (4.16), который напишем сразу в полярных координатах

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

в форме

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = -fm\Phi(t, r, \dot{r}) + h. \tag{4.26}$$

Исключая отсюда с помощью интеграла площадей угловую скорость $\dot{\varphi}$, получим единственное уравнение первого порядка

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}\right) = -fm\Phi(t, r, \dot{r}) + h, \tag{4.27}$$

в результате интегрирования которого найдем уравнение траектории (уравнение орбиты) с тремя произвольными постоянными c, h, C, которые нетрудно выразить через начальные значения r_0, $\dot{r}_0$, φ_0, $\dot{\varphi}_0$ или через начальные значения x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ координат и составляющих скорости точки M в плоскости орбиты.

Если закон силы F не зависит от времени, то функция Φ также не будет содержать время, вследствие чего в уравнении (4.27) можно взять за независимую переменную угол φ вместо t, а если ввести еще вместо r величину, пропорциональную обратному радиусу, полагая

$$\frac{c}{r} = u, \tag{4.28}$$

то уравнение (4.26) примет вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -2\mu\Phi\left(\frac{c}{u}, -\frac{du}{d\varphi}\right) + 2h, \tag{4.29}$$

где положено для краткости

$$\mu = fm. \tag{4.28′}$$

Разрешая уравнение (4.29) относительно производной $\frac{du}{d\varphi}$, разделяя затем переменные и интегрируя, мы получим уравнение орбиты в квадратурной форме

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\Psi(u, c, h, \mu)} = \varphi - \varphi_0, \tag{4.30}$$

откуда, выполняя квадратуру и разрешая полученное равенство относительно u, получаем

$$u = \psi(\varphi - \varphi_0;\ u_0,\ c,\ h,\ \mu) \tag{4.30'}$$

или

$$r = \frac{c}{\psi\left(\varphi - \varphi_0;\ \frac{c}{r_0},\ c,\ h,\ \mu\right)}. \tag{4.30''}$$

Примечание. Если функция F, а следовательно, и функция Φ, зависят только от радиуса-вектора, то из (4.29) имеем просто

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -2\mu\Phi\left(\frac{c}{u}\right) + 2h, \tag{4.31}$$

откуда, после выполнения квадратуры и разрешения относительно u, опять получим уравнение орбиты в виде (4.30′) или (4.30″).

2. Вывод уравнения орбиты в окончательной форме зависит от разрешимости уравнения (4.29) и от выполнения квадратуры (4.30). И то и другое может оказаться весьма затруднительным или даже невыполнимым в элементарных функциях, и тогда остается воспользоваться разложением в ряд или применить методы численного интегрирования.

Рассмотрим теперь некоторые примеры задачи одного неподвижного центра, ограничиваясь простейшими случаями, когда задача оказывается так или иначе разрешимой.

Пусть сначала функция F определяется формулой типа (4.4″), т. е.

$$F = r^K = r^{-N}. \tag{4.32}$$

Тогда формула (4.31) дает

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2h - u^2 + \gamma u^{N-1}, \quad \gamma = \frac{2\mu c^{1-N}}{N-1}, \tag{4.31'}$$

откуда имеем

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{2h - u^2 + \gamma u^{N-1}}} = \pm(\varphi - \varphi_0). \tag{4.33}$$

Из (4.33) видим, что при $K = 1$ (закон Гука) и при $N = 2$ (закон Ньютона) интеграл вычисляется в элементарных функциях, причем в последнем случае уравнения (4.23) такие же, как и в классической задаче двух тел, которая подробно рассмотрена в любом курсе небесной механики. Случай закона Гука рассмотрен выше для любого числа неподвижных центров. При $N = 1$ имеем $\Phi = \ln r$ и интеграл в равенстве (4.33) сразу делается неэлементарным. При $N = 3$ интеграл опять

вычисляется легко. При $N = 0, 4, 5$ интеграл в (4.33) превращается в эллиптический и, следовательно, u выражается через эллиптические функции.

При $N = -3, -5, +7$ интеграл будет опять эллиптическим относительно переменной u^2 и задача опять будет разрешима в эллиптических функциях.

Можно показать, что задача может быть разрешена в эллиптических функциях также при

$$N = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}.$$

Непосредственное вычисление интеграла в уравнении (4.33) мы предоставляем учащимся в качестве упражнения.

Рассмотрим теперь пример, когда функция Φ в уравнении (4.29) определяется законом Вебера, т. е. когда имеем

$$F(r, \dot{r}, \ddot{r}) = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{\sigma^2} + \frac{2r\ddot{r}}{\sigma^2}\right)$$

и, следовательно,

$$\Phi(r, \dot{r}) = -\frac{1}{r}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{\sigma^2}\right).$$

В этом случае уравнение (4.29) напишется в виде

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2\mu u}{c}\left[1 - \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right] + h,$$

откуда

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2h + \frac{2\mu}{c}u - u^2}{1 + \frac{2\mu u}{c\sigma^2}}$$

и

$$\int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\mu u}{c\sigma^2}}{2h + \frac{2\mu}{c}u - u^2}}\, du = \pm(\varphi - \varphi_0).$$

Мы снова приходим к эллиптическому интегралу, а поэтому u, а следовательно, и r выражаются через эллиптические функции.

Непосредственное приведение эллиптических интегралов в рассмотренных выше задачах, а затем их обращение удобно производить при помощи широко известных таблиц И. С. Градштейна и И. М. Рыжика (Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е, Физматгиз, 1962).

После нахождения u, или r, мы должны затем установить связь между полярным углом φ и временем t при помощи уравнения (4.25′), что обычно не удается сделать в конечном виде даже при помощи эллиптических функций.

Поэтому здесь приходится прибегать всегда к бесконечным рядам. Пример такого представления дает даже простейшая задача двух тел (материальных точек).

3. Приведем теперь классический пример задачи с одним неподвижным центром, в котором правые части уравнений (4.23) содержат явно время t. Пример такого рода дает нам задача, называемая в настоящее время *задачей И. В. Мещерского*, где или масса неподвижного центра m, или коэффициент пропорциональности f (или и то и другое вместе) зависят известным образом от времени, а закон силы F — ньютоновский. Уравнения (4.23) напишутся тогда в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu(t)\cdot\frac{x}{r^3} = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu(t)\cdot\frac{y}{r^3} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

где $\mu(t)$, определяемая формулой (4.28′), есть заданная функция времени.

И. В. Мещерский впервые показал, что в некоторых случаях уравнения (4.34) путем преобразования зависимых и независимой переменных возможно привести к уравнениям, правые части которых не будут содержать независимой переменной и, кроме того, могут быть проинтегрированы до конца в элементарных или в эллиптических функциях.

Действительно, введем новые зависимые переменные ξ и η и новую независимую переменную τ, положив

$$\xi = x\psi(t), \quad \eta = y\psi(t), \quad d\tau = \sigma(t)\,dt, \tag{4.34′}$$

где $\psi(t)$ и $\sigma(t)$ — две пока неизвестные функции, выбором которых мы распорядимся несколько позже.

Вычисляя вторые производные от ξ и η по переменной τ и имея ввиду первоначальные уравнения, мы получим без труда

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\frac{\mu\psi^3}{\sigma^2}\cdot\frac{\xi}{\rho^3} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{2\psi'}{\psi} - \frac{\sigma'}{\sigma}\right)\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\psi\psi'' - 2\psi'^2}{\psi^2\sigma^2}\cdot\xi, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\frac{\mu\psi^3}{\sigma^2}\cdot\frac{\eta}{\rho^3} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{2\psi'}{\psi} - \frac{\sigma'}{\sigma}\right)\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\psi\psi'' - 2\psi'^2}{\psi^2\sigma^2}\cdot\eta, \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

где штрихи обозначают производные от ψ и σ по времени и

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2. \tag{4.35′}$$

Теперь постараемся выбрать функции ψ и σ так, чтобы в правые части равенств (4.35) не входило t.

Для этого положим прежде всего

$$\frac{2\psi'}{\psi} - \frac{\sigma'}{\sigma} = 0, \tag{4.36}$$

вследствие чего в уравнениях (4.35) исчезнут члены с первыми производными от новых зависимых переменных.

Из (4.36) интегрированием получаем

$$\sigma = C \cdot \psi^2, \tag{4.36'}$$

где C — постоянная.

Чтобы в уравнения (4.35) не вошла переменная τ, а следовательно, и t, должны еще удовлетворяться условия

$$\frac{\psi\psi'' - 2\psi'^2}{\psi^2\sigma^2} = \text{const}, \quad \frac{\mu\psi^3}{\sigma^2} = \mu_0 = \text{const}.$$

Исключая из первого равенства σ посредством (4.36′), мы получим для функции ψ простенькое дифференциальное уравнение вида

$$\frac{1}{\psi^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'}{\psi}\right) = \text{const},$$

откуда без труда находим ψ, а затем и функцию μ, которой можно придать следующую форму:

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + 2\beta t + \gamma t^2}}. \tag{4.37}$$

Отсюда мы заключаем, что переменная τ и первые производные от ξ и η не будут входить в уравнения (4.35) при условии, что функция $\mu(t)$ определяется формулой (4.37). Преобразование (4.34′), соответствующее этому случаю, напишется в виде

$$\xi = \mu(t) \cdot x, \quad \eta = \mu(t) \cdot y, \quad d\tau = \mu^2(t) \cdot dt, \tag{4.37'}$$

и уравнения (4.34) преобразуются в следующие:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\frac{\mu_0\xi}{\rho^3} + \alpha\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\frac{\mu_0\eta}{\rho^3} + \alpha\eta, \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

где

$$\alpha = \frac{\beta^2 - \gamma}{\mu_0^4}, \tag{4.38'}$$

а μ_0 — начальное значение функции $\mu(t)$, соответствующее начальному значению $t = 0$, а β и γ — какие угодно постоянные.

Таким образом, задача о движении пассивной точки M, определяемая уравнениями (4.34), приводится преобразованием (4.37′) с функцией $\mu(t)$ вида (4.37) к задаче о движении точки, притягиваемой (или отталкиваемой) неподвижным центром по закону Ньютона и под действием силы, пропорциональной рас-

стоянию до неподвижного центра (закон Гука!), причем эта сила есть сила притяжения, если $\gamma > \beta^2$, и отталкивания, если $\gamma < \beta^2$. Если

$$\gamma = \beta^2,$$

то сила Гука отсутствует и функция (4.37) приводится к простейшему виду

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta t}. \tag{4.37''}$$

Заметим, что И. В. Мещерский доказывает (Работы по механике тел переменной массы, Гостехиздат, 1949), что случай (4.37) является единственным, когда уравнения (4.34) могут быть приведены к виду (4.38).

Однако этот случай вовсе не является единственным, когда уравнения вида (4.34) могут быть приведены к уравнениям, отличным от (4.38), но оказывающимися все же интегрируемыми.

Такие случаи изучены в работах советского ученого Б. Е. Гельфгата (Бюллетень ИТА, 1959 г.), который показал, в частности, что если функция $\mu(t)$ изменяется со временем по закону

$$\frac{d\mu}{dt} = A\mu^n \qquad (A = \text{const}), \tag{4.39}$$

то уравнения (4.34) допускают строгое интегрирование в случаях

$$n = 0, \quad n = \frac{3}{2},$$

причем результат интегрирования содержит, кроме элементарных еще цилиндрические функции.

Заметим, что законы И. В. Мещерского получаются из уравнения (4.39) при $n = 2$ и $n = 3$ и окончательное решение получается только в элементарных функциях, если $\alpha = 0$ (что соответствует случаю кеплеровского движения), или в эллиптических функциях, если $\alpha \neq 0$, так как в этом случае к ньютоновой силе присоединяется сила Гука и решение задачи приводится к уравнению типа (4.31).

Примечание. К рассмотренным в последнем разделе задачам можно привести порядочное число различных задач иного рода. Ограничимся только одним примером. Пусть неподвижный центр окружен газовой или пылевой атмосферой, имеющей сферическую структуру, с плотностью, зависящей от времени, оказывающей на движущуюся точку силу сопротивления, пропорциональную плотности атмосферы и скорости движущейся точки

Тогда вместо уравнений (4.34) будем иметь следующие:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(t)\cdot\frac{x}{r^3} + \frac{4}{3}\pi\delta(t)\cdot x + \lambda\delta(t)\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu(t)\cdot\frac{y}{r^3} + \frac{4}{3}\pi\delta(t)\cdot y + \lambda\delta(t)\frac{dy}{dt} = 0,$$

где $\delta(t)$ — плотность атмосферы, λ — постоянный коэффициент пропорциональности и $\pi = 3{,}14159\ \ldots$

Если функция $\mu(t)$ и плотность $\delta(t)$ определяются формулами ($\beta = 2\lambda\delta_0$)

$$\mu(t) = \frac{\mu}{1+\beta t}, \quad \delta(t) = \frac{\delta_0}{1+\beta t},$$

то предыдущие уравнения посредством введения полярных координат и новой независимой переменной τ формулой

$$d\tau = dt\cdot e^{-\lambda\int\limits_0^t \delta(t)\,dt}$$

приводятся к виду

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} - \frac{c^2}{r^3} + \mu_1 r + \frac{\mu_0}{r^2} = 0,$$

где c — постоянная и $\mu_1 = \frac{4}{3}\pi\delta_0$.

Это уравнение подстановкой (4.28) приводится к виду (4.31) и может быть проинтегрировано в эллиптических функциях.

Действительно, умножая предыдущее уравнение на $2\frac{dr}{d\tau}$ и интегрируя, получим

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 2\left[h + \frac{\mu_0}{r} - \frac{1}{2}\mu_1 r^3 - \frac{c^2}{r^3}\right],$$

откуда интегрированием получаем

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{h + \frac{\mu_0}{r} - \frac{\mu_1}{2}r^3 - \frac{c^2}{r^3}}} = \pm\sqrt{2}\,(\tau - \tau_0),$$

и интеграл в этой формуле действительно эллиптический. Здесь h, так же как и c, есть произвольная постоянная и τ_0 — значение вспомогательной переменной τ, соответствующее начальному значению времени $t = 0$.

4. В качестве последнего примера этого параграфа рассмотрим вкратце наиболее известную из задач теории неподвижных центров, а именно задачу двух неподвижных центров. Краткость изложения в этом случае объясняется тем, что классическая задача двух неподвижных центров подробно изложена

в первом издании настоящей книги, а также во втором и третьем изданиях книги автора «Небесная механика. Основные задачи и методы». Кроме того, обобщенная задача двух неподвижных центров составляет основное содержание упоминавшейся монографии профессора Е. П. Аксенова.

Здесь мы будем рассматривать задачу двух неподвижных центров как частный случай общей задачи многих неподвижных центров. Пусть имеются только два неподвижных центра M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 соответственно. Выберем неизменную систему координат так, чтобы одна из координатных осей (пусть это будет ось Oz) проходила через эти неподвижные центры.

Тогда уравнения нашей задачи можно написать в виде (4.2), и мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -x\left(\mu_1\frac{F_1}{r_1}+\mu_2\frac{F_2}{r_2}\right),\\ \ddot{y} &= -y\left(\mu_1\frac{F_1}{r_1}+\mu_2\frac{F_2}{r_2}\right),\\ \ddot{z} &= (c_1-z)\mu_1\frac{F_1}{r_1}+(c_2-z)\mu_2\frac{F_2}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

где F_1 и F_2 — функции такого же характера, как и функции (4.1), т. е. вообще

$$F_1 = F_1(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1),\quad F_2 = F_2(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2), \tag{4.40'}$$

и $\mu_1 = f_1 m_1$, $\mu_2 = f_2 m_2$ — вещественные постоянные или вообще заданные функции времени t.

Наконец,

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2+y^2+(z-c_1)^2},\\ r_2 &= \sqrt{x^2+y^2+(z-c_2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.40''}$$

являются расстояниями (радиусами-векторами) от движущейся пассивной точки $M(x,\ y,\ z)$ до активных неподвижных центров M_1 $(0,\ 0,\ c_1)$ и $M_2(0,\ 0,\ c_2)$.

Как было показано выше, в общем случае уравнения (4.40) всегда допускают интеграл площадей в плоскости (xOy)

$$y\dot{x} - x\dot{y} = c = \text{const}. \tag{4.41}$$

Поэтому, вводя вместо x и y полярные координаты ρ и φ формулами (4.9), мы можем заменить систему 6-го порядка (4.40) системой 4-го порядка с неизвестными ρ и z (цилиндрические координаты) следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} &= -\rho\left(\mu_1\frac{F_1}{r_1}+\mu_2\frac{F_2}{r_2}\right),\\ \ddot{z} &= (c_1-z)\mu_1\frac{F_1}{r_1}+(c_2-z)\mu_2\frac{F_2}{r_2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

и уравнением, вытекающим из (4.41):

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{4.41'}$$

Разрешая систему (4.42), мы получим цилиндрические координаты в функции времени, постоянной c, которая является произвольной постоянной, и еще четырех произвольных постоянных, за которые можно принять ρ_0, $\dot{\rho}_0$, z_0, $\dot{z}_0$, т. е. начальные значения (для $t = 0$) цилиндрических координат и их первых производных.

Беря затем квадратуру из (4.41′), мы получим соотношение

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^t \frac{dt}{\rho^2}, \tag{4.42'}$$

связывающее полярный угол φ с временем и содержащее шестую произвольную постоянную задачи φ_0.

Расстояния r_1, r_2 и их производные первого и второго порядка определяются формулами (4.11′), где нужно положить $j = 1, 2$.

Заметим, что при произвольных значениях μ_1, μ_2 и функций F_1 и F_2 уравнения (4.42) пригодны также для определения движения точки M в любой плоскости, проходящей через ось Oz, в том числе и в плоскости (xOz) или (yOz). Для этого нужно только, чтобы в начальный момент точка M находилась в этой плоскости и чтобы вектор ее начальной скорости также лежал в этой плоскости. При этом уравнение (4.41′) отпадает.

Но движение точки M в плоскости (xOy) возможно, очевидно, только в том случае, когда точки M_1 и M_2 симметричны относительно начала координат и когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Действительно, при высказанных условиях $r_1 = r_2 = r$, а следовательно, при всяком значении t также $F_1 = F_2 = F$ и второе из уравнений (4.42) удовлетворяется при $z = 0$ тождественно. Следовательно, в этом случае задача сводится к первому из уравнений (4.42) и к квадратуре (4.42′). При этом первое из уравнений (4.42) принимает более простой вид

$$\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} = -\mu \frac{\rho}{r} F(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}), \tag{4.43}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + \bar{c}^2}, \\ \bar{c} &= c_1 = -c_2. \end{aligned}\right\} \tag{4.43'}$$

Возвратимся теперь к уравнениям (4.40) и предположим, что каждая из функций F_1 и F_2 удовлетворяет условию (4.20). Тогда существуют такие две новые функции $\Phi_1(t;\ r_1,\ \dot{r}_1)$ и

$\Phi_2(t;\ r_2,\ \dot{r}_2)$, что мы будем иметь

$$\dot{r}_1 F_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}, \quad \dot{r}_2 F_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}. \tag{4.44}$$

Тогда, как мы показали в общем случае, уравнения (4.40) допускают интеграл живой силы, который напишется следующим образом:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\mu_1\Phi_1 - \mu_2\Phi_2 + h. \tag{4.45}$$

Для уравнений (4.42), определяющих цилиндрические координаты, интеграл живой силы принимает вид

$$\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = -\mu_1\Phi_1 - \mu_2\Phi_2 + h, \tag{4.45'}$$

или (с учетом интеграла площадей)

$$\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} + \dot{z}^2 = -2\mu_1\Phi_1 - 2\mu_2\Phi_2 + 2h, \tag{4.45''}$$

причем в (4.45′) и (4.45″)

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z - c_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z - c_2)^2}.$$

Для случая, когда возможно движение в плоскости (xOy), т. е. для уравнения (4.43), интеграл живой силы имеет еще более простой вид:

$$\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} = -4\mu\Phi\left(t;\ \sqrt{\rho^2 + \bar{c}^2};\ \frac{\rho\rho}{\sqrt{\rho^2 + \bar{c}^2}}\right) + 2h.$$

Если притом закон силы F зависит только от r, а следовательно, функция Φ в последнем уравнении зависит только от ρ, то интеграл живой силы примет вид

$$\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} = -2\mu\Phi\left(\sqrt{\rho^2 + \bar{c}^2}\right) + 2h, \tag{4.46}$$

и это уравнение можно непосредственно интегрировать.

Однако предпочтительнее ввести в (4.46) вместо времени переменную φ посредством (4.41) и получить дифференциальное уравнение орбиты (или траектории) в виде

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -2\mu\Phi\left(\frac{1}{u}\sqrt{c^2 + \bar{c}^2u^2}\right) + 2h, \tag{4.46'}$$

причем в формулах (4.45), (4.45′), (4.46), (4.46′) величины μ_1, μ_2 и μ должны рассматриваться как постоянные, а u, как и ранее, есть величина, обратно пропорциональная радиусу-вектору ρ, т. е. $u = c/\rho$.

Из уравнения (4.46′) получаем уравнение орбиты в квадратурной форме

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{2h - u^2 - 2\mu\Phi}} = \pm(\varphi - \varphi_0), \tag{4.47}$$

но выполнение квадратуры зависит, конечно, от вида закона силы F.

5. Для классической задачи двух неподвижных центров

$$F_1 = \frac{1}{r_1^2}, \quad F_2 = \frac{1}{r_2^2}$$

и

$$\mu_1 = fm_1, \quad \mu_2 = fm_2,$$

где f — обычная постоянная притяжения.

Уравнения (4.40) будут иметь обычный вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -fx\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right), \\ \ddot{y} &= -fy\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right), \\ \ddot{z} &= f\left(m_1\frac{c_1 - z}{r_1^3} + m_2\frac{c_2 - z}{r_2^3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

или, в цилиндрических координатах,

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} &= -f\rho\left\{\frac{m_1}{[\rho^2 + (z - c_1)^2]^{3/2}} + \frac{m_2}{[\rho^2 + (z - c_2)^2]^{3/2}}\right\}, \\ \ddot{z} &= f\left\{\frac{m_1(c_1 - z)}{[\rho^2 + (z - c_1)^2]^{3/2}} + \frac{m_2(c_2 - z)}{[\rho^2 + (z - c_2)^2]^{3/2}}\right\}, \\ \rho^2\frac{d\varphi}{dt} &= c. \end{aligned}\right\} \tag{4.48′}$$

Наконец, уравнение (4.43) движения пассивной точки в плоскости (xOy), которое возможно только в случае

$$m_1 = m_2 = m, \quad c_1 = -c_2 = \bar{c},$$

принимает следующий вид:

$$\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} = -\frac{2fm\rho}{(\rho^2 + \bar{c}^2)^{3/2}}. \tag{4.48″}$$

Так как в классической задаче функции Φ_1 и Φ_2 существуют и определяются формулами

$$\Phi_1 = -\frac{1}{r_1}, \quad \Phi_2 = -\frac{1}{r_2},$$

то существует также и интеграл живой силы, который в прямоугольных координатах напишется в виде

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{2fm_1}{r_1}+\frac{2fm_2}{r_2}+2h, \tag{4.49}$$

и соответственно в цилиндрических координатах,

$$\dot{\rho}^2+\frac{c^2}{\rho^2}+\dot{z}^2=\frac{2fm_1}{r_1}+\frac{2fm_2}{r_2}+2h. \tag{4.49'}$$

Уравнение (4.48″), наконец, имеет интеграл

$$\dot{\rho}^2+\frac{c^2}{\rho^2}=\frac{4fm}{\sqrt{\rho^2+\bar{c}^2}}+2h \tag{4.49''}$$

или

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{4fmu}{\sqrt{c^2+\bar{c}^2u^2}}+2h,$$

откуда уравнение орбиты получается, как и в случае (4.47), простой квадратурой.

Уравнения (4.48) так же, как известно, интегрируются в квадратурах, но только после преобразования прямоугольных координат к эллипсоидальным координатам Ламе.

Отметим также случай, когда в задаче двух неподвижных центров вместо закона Ньютона имеем закон Вебера (4.5).

Тогда (при постоянных μ_1, μ_2, σ_1, σ_2) имеем интеграл живой силы типа (4.16′)

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{2\mu_1}{r_1}\left[1-\frac{\dot{r}_1^2}{\sigma_1^2}\right]+\frac{2\mu_2}{r_2}\left[1-\frac{\dot{r}_2^2}{\sigma_2^2}\right]+2h$$

или, в цилиндрических координатах,

$$\dot{\rho}^2+\frac{c^2}{\rho^2}+\dot{z}^2=\frac{2\mu_1}{r_1}\left[1-\frac{\dot{r}_1^2}{\sigma_1^2}\right]+\frac{2\mu_2}{r_2}\left[1-\frac{\dot{r}_2^2}{\sigma_2^2}\right]+2h.$$

Когда движение пассивной точки M возможно в плоскости (xOy), т. е. когда

$$m_1=m_2=m, \quad c_1=-c_2=\bar{c}$$

и, кроме того, $\sigma_1=\sigma_2$, мы можем написать интеграл

$$\dot{\rho}^2+\frac{c^2}{\rho^2}=\frac{4fm}{r}\left[1-\frac{\dot{r}^2}{\sigma^2}\right]+2h,$$

где

$$r=\sqrt{\rho^2+\bar{c}^2}, \quad \dot{r}=\frac{\rho\dot{\rho}}{\sqrt{\rho^2+\bar{c}^2}}.$$

Вводя опять вместо t угол φ и вместо ρ величину u, разрешая полученное уравнение относительно производной от u по φ, раз-

деляя переменные и интегрируя, мы получим квадратурное уравнение орбиты, которое напишем в следующей форме:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{v^4 + a^2u^2}}{\sqrt[4]{u^2v^3}}\, du = \pm 2\sqrt{fm} \cdot (\varphi - \varphi_0),$$

где положено для сокращения

$$v = \sqrt{c^2 + \bar{c}^2u^2}, \quad a^2 = \frac{4fmc^3}{\sigma^2}.$$

Таким образом, плоская задача двух симметричных неподвижных центров с равными массами разрешается в квадратурах.

Однако интеграл, входящий в уравнение орбиты, не является элементарным, и исследование свойств орбиты оказывается весьма трудной и сложной задачей.

В общем, несимметричном случае, с неравными массами задача двух неподвижных центров, действующих на пассивную точку по закону Вебера, сводится к системе третьего порядка, в которой одно уравнение (интеграл живой силы) первого порядка, а второе (одно из двух уравнений движения в цилиндрических координатах) — второго порядка

Если пассивная точка движется в плоскости, проходящей через ось Oz, то и в этом случае уравнения движения образуют неинтегрируемую систему третьего порядка и только отпадает интеграл площадей и не приходится выполнять дополнительную квадратуру.

В заключение заметим, что в некоторых случаях задача двух неподвижных центров может иметь простые частные решения.

Эти случаи мы упомянем ниже, в соответствующем месте.